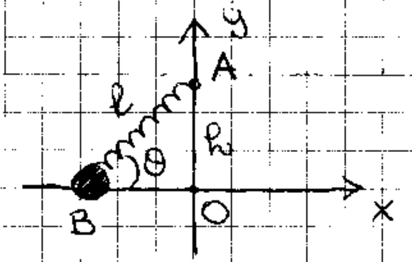
SOLUZIONI ESAME 29/1/07 (1)

Esercizio 1

1) Nella posizione di equilibrio $\sum \vec{F}_{ext} = 0$



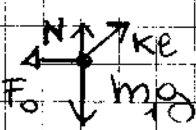


Diagramma di corpo libero

Componente x: $-F_0 + K\ell\cos\theta = 0$

Componente y: $N - m_1 g + K\ell\sin\theta = 0$

N = forza esercitata dal vincolo

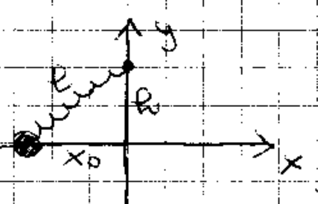
introducendo $x_0 = |\overline{BO}| = \ell\cos\theta$

$\Rightarrow -F_0 + Kx_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \dfrac{F_0}{K} = 0{,}15\ m$

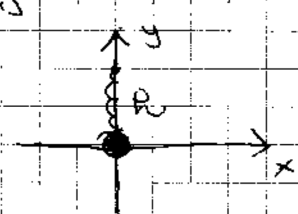
$\ell = \sqrt{h^2 + x_0^2}$

$\Rightarrow \underline{\ell = 0{,}18\ m}$

2) il vincolo è liscio = non compie lavoro $\Rightarrow$ conservazione dell'energia meccanica



E_i



$U_g = 0$

E_f

$E_i = \frac{1}{2}K\ell^2 \qquad E_f = \frac{1}{2}m_1 v_0^2 + \frac{1}{2}Kh^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2}m_1 v_0^2 + \frac{1}{2}Kh^2 = \frac{1}{2}K\ell^2$

$v_0 = \sqrt{\dfrac{K}{m_1}} \cdot \sqrt{\ell^2 - h^2}$ ovvero $v_0 = \sqrt{\dfrac{K}{m_1}} \cdot x_0$

$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\dfrac{100}{0{,}1}} \cdot 0{,}15\ m/s = \underline{4{,}7\ m/s} \qquad \vec{v}_0 = v_0\hat{x}$

3) Nell'urto tra m_1 e m_2 si conserva la quantità di moto lungo l'asse x. Infatti le forze esterne presenti o non sono impulsive (la forza della molla) o non hanno componenti nella direzione x (forza esercitata dal vincolo).

$$P_{i_x} = P_{f_x}$$

$$\Rightarrow \quad m_1 v_0 = (m_1 + m_2)\, v_1$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 \qquad \boxed{v_1 = 3{,}2 \ m/s \quad \text{con } \vec{v}_1 = v_1 \hat{x}}$$

4) Nell'istante di massimo allungamento della molla il sistema (m_1+m_2) ha velocità nulla. Conservazione dell'energia meccanica

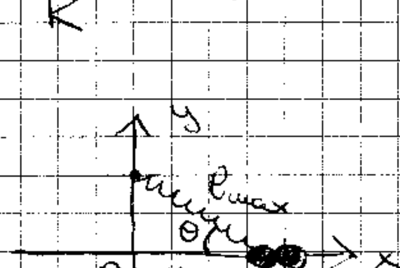
$$E_i = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_1^2 + \frac{1}{2}K\ell_0^2$$ energia del sistema un istante dopo l'urto

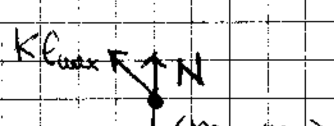
$$E_f = \frac{1}{2}K\ell_{max}^2$$ energia del sistema nell'istante di massimo allungamento della molla

$$E_i = E_f \quad \Rightarrow \quad \ell_{max} = \sqrt{\ell_0^2 + \frac{m_1+m_2}{K} v_1^2}$$

$$\underline{\underline{\ell_{max} = 0{,}16 \ m}}$$

5) $$\sum \vec{F}_{ext} = (m_1+m_2)\vec{a}$$





$a_y = 0$ (il moto si svolge lungo l'asse x)

$$-K\underbrace{\ell_{max}\cos\theta}_{= x_{max}} = (m_1+m_2)a_x$$

con $x_{max} = \sqrt{\ell_{max}^2 - h^2}$ $\quad x_{max} = 0,12\, m$

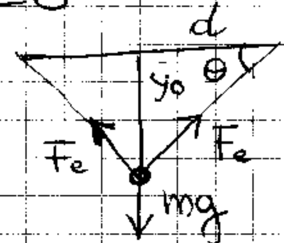
$$\Rightarrow a_x = \frac{-K x_{max}}{m_1 + m_2} \Rightarrow \underline{\underline{a_x = -82\, m/s^2}}$$

$\vec{a} = a_x \hat{x}$ accelerazione diretta come $-\hat{x}$

Esercizio 2

1) Nella posizione di equilibrio $\sum \vec{F}_{ext} = 0$ ovvero la somma delle forze esterne applicata alla massa $m = 0$

Diagramma di corpo libero:



$$F_e = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 (d^2 + y_0^2)}$$ modulo della Forza di Coulomb

$\sum \vec{F}_{ext} = 0$ lungo x: $-F_e \cancel{\cos\theta} + F_e \cancel{\cos\theta} = 0$

lungo y: $2F_e \sin\theta - mg = 0$

con $y_0 = \sqrt{d^2 + y_0^2}\, \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{y_0}{\sqrt{d^2 + y_0^2}}$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{2}qQ}{\cancel{4}_2\pi\varepsilon_0 (d^2 + y_0^2)} \cdot \frac{y_0}{\sqrt{d^2 + y_0^2}} - mg = 0$$

$$m = \frac{qQ y_0}{2\pi\varepsilon_0 g (d^2 + y_0^2)^{3/2}} \Rightarrow \underline{\underline{m = 6,6 \times 10^{-5} kg}}$$

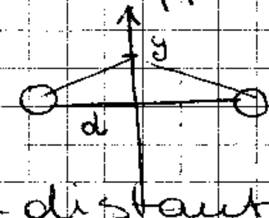
$m = 66\, mg = 66 \cdot 10^{-3} g$

2) Potenziale generato da una sfera dielettrica avente carica Q uniformemente distribuita: (4)

$$V_{Ⓐ}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{per } r > \text{raggio della sfera}$$

Utilizzando il principio di sovrapposizione

$$V(y) = V_{Ⓐ}(y) + V_{Ⓑ}(y)$$

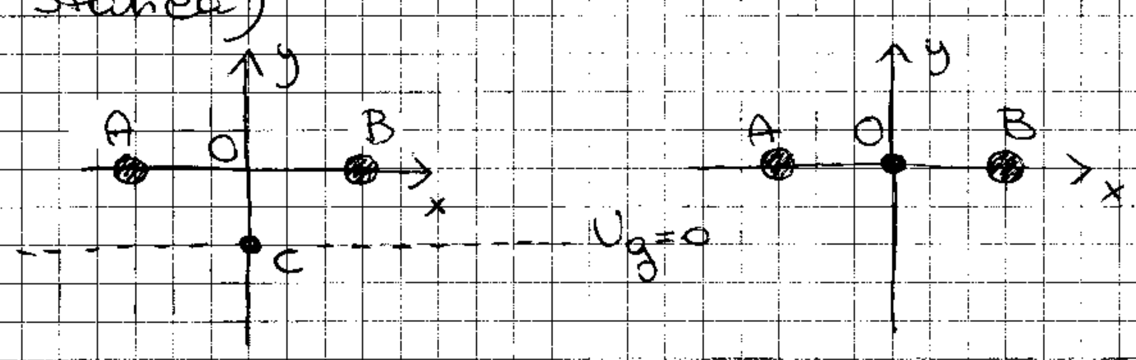


I punti dell'asse y sono equidistanti dalle due sfere

$$\Rightarrow \quad V(y) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{d^2+y^2}} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{d^2+y^2}}$$

$$V(y) = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{d^2+y^2}}$$

3) Conservazione dell'energia (meccanica + elettrostatica)



$$E_i = \frac{1}{2} m v_c^2 + \underbrace{U_c}$$

energia potenziale della carica negativa (di modulo q) nel punto C

$$U_c = -qV_c$$

con V_c = potenziale generato dalle due sfere dielettriche nel punto C

$$\Rightarrow U_c = -q \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{d^2+y_0^2}}$$

$$E_f = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgy_0 + U_0$$

$$\text{con } U_0 = -q\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2}mv_c^2 - \frac{2qQ}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{d^2+y_0^2}} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgy_0 - \frac{2qQ}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

$$v_0 = \sqrt{v_c^2 - 2gy_0 - \frac{2qQ}{m\,4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{d^2+y_0^2}} - \frac{1}{d}\right)}$$

$$v_0 = \sqrt{5^2 - 2\cdot 9{,}8\cdot 0{,}5 - \frac{2\cdot 0{,}1\times10^{-6}\times10^{-6}}{6{,}6\times10^{-5}\cdot 4\pi\cdot 8{,}85\times10^{-12}}\left(\frac{1}{\sqrt{1{,}25}}-1\right)}$$

$$v_0 = 4{,}6\ \mathrm{m/s}$$

4) La velocità minima v' necessaria è quella per cui q arriva a distanza infinita con velocità nulla.

Conservazione dell'energia

$$E_i = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{2qQ}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{d^2+y_0^2}}$$ energia della carica q nel punto C

$E_f = 0$ energia della carica q a distanza infinita dalle sfere con velocità nulla

$$\frac{1}{2} m v'^2 - \frac{2qQ}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{d^2+y_0^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad v' = \sqrt{\frac{qQ}{m\ \pi\varepsilon_0\sqrt{d^2+y_0^2}}}$$

$$v' = \sqrt{\frac{0{,}1\times10^{-6}\times10^{-6}}{6{,}6\times10^{-5}\ \pi\ 8{,}85\times10^{-12}\ \sqrt{1{,}25}}} \quad m/s$$

$$v' = 7{,}0 \quad m/s$$