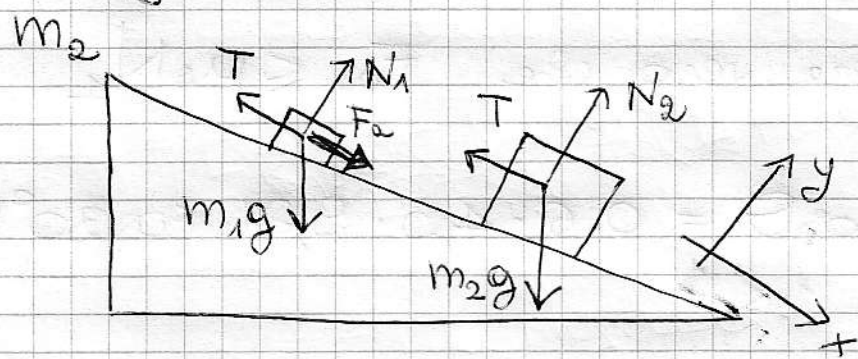


ESERCIZIO 1

Poiché la carrucola, pur avendo massa $\neq 0$, è FERMA, la tensione sui due capi della fune è la stessa.

Diagramma di corpo libero delle masse m_1 e



In assenza di attrito il blocco m_1 si muoverebbe verso l'alto ($m_1 < m_2$)

quindi la forza di attrito statico F_a è diretta verso il basso

$$\vec{F}_a = F_a \hat{x}$$

con F_a = modulo della forza di attrito statico.

Poiché le due masse sono in equilibrio $\sum \vec{F} = 0$

$$\begin{aligned} (m_1) \quad \text{componente } x: & \quad m_1 g \sin \theta - T + F_a = 0 \\ \text{" } y: & \quad N_1 - m_1 g \cos \theta = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m_2) \quad \text{" } x: & \quad m_2 g \sin \theta - T = 0 \\ \text{" } y: & \quad N_2 - m_2 g \cos \theta = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = m_2 g \sin \theta}$$

$$N_1 = m_1 g \cos \theta ; \quad N_2 = m_2 g \cos \theta$$

$$m_1 g \sin \theta - m_2 g \sin \theta + F_a = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_a = (m_2 - m_1) g \sin \theta}$$

Numericamente:

(2)

$$T = 10 \cdot 9,81 \cdot \sin 20^\circ \text{ N} = 33,55 \text{ N}$$

$$T = 34 \text{ N} \quad (2 \text{ cifre signif.})$$

$$F_a = (10 - 4,5) \cdot 9,81 \cdot \sin 20^\circ \text{ N} = 18,45 \text{ N}$$

$$F_a = 19 \text{ N} \quad (2 \text{ cifre signif.})$$

NOTA che deve essere vero che $F_a \leq \mu_s N_1$
ovvero

$$\begin{aligned} \mu_s N_1 &= \mu_s m_1 g \cos \theta = 0,6 \cdot 4,5 \cdot 9,81 \cdot \cos 20^\circ \text{ N} \\ &= 24,9 \text{ N} \end{aligned}$$

$$18,45 \text{ N} \leq 24,9 \text{ N} \quad \text{OK, } \bar{e} \text{ vero}$$

2) Per $\theta = 60^\circ$ i blocchetti si muovono, infatti l'angolo massimo $\theta_{\max}$ per cui il sistema è in equilibrio è quello per cui $F_a = \mu_s N_1$
ovvero

$$(m_2 - m_1) g \sin \theta_{\max} = \mu_s m_1 g \cos \theta_{\max}$$

$$\rightarrow \tan \theta_{\max} = \mu_s \frac{m_1}{m_2 - m_1}$$

$$\tan \theta_{\max} = 0,6 \frac{4,5}{10 - 4,5} = 0,4909$$

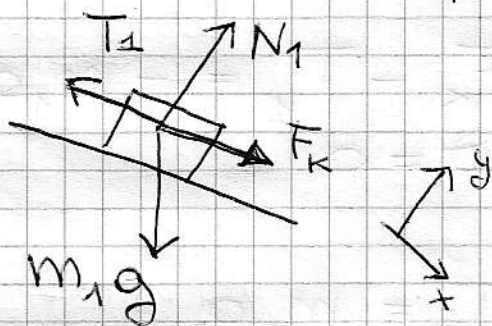
$$\rightarrow \theta_{\max} = 26^\circ$$

Osservo che poiché la carrucola ha masse e non è ferma le tensioni dei due tratti di filo non sono in generale uguali, le chiamo T_1 e T_2

Diagramma di corpo libero:

(3)

(m_1)



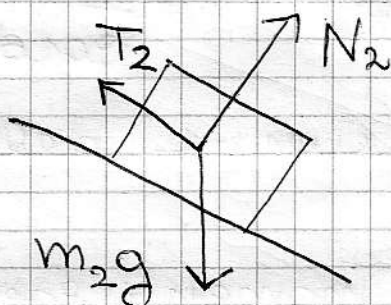
Il blocchetto m_1 inizia a muoversi verso l'alto: quindi la forza di attrito

dinamico è diretta verso il basso:

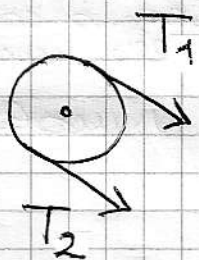
$$\vec{F}_k = F_k \hat{x}$$

$$\text{con } F_k = \mu_k N_1$$

(m_2)



(m_c)



Sul centro suo inoltre applicate la forza peso $m_c g$ e la reazione vincolare.

α = accelerazione angolare della carrucola.

NOTA che m_1 e m_2 hanno la stessa accelerazione a poiché sono collegate da un filo inestensibile.

Inoltre $\boxed{a = \alpha R}$ poiché il filo è avvolto attorno alla carrucola e non vi è scorrimento.

II^a legge di Newton

per le masse m_1 e m_2 :

(m₁) (ricordando che si muove e muovere verso -x) ④

lungo x
lungo y

$$\begin{cases} m_1 g \sin \theta + F_k - T_1 = -m_1 a \\ N_1 - m_1 g \cos \theta = 0 \end{cases}$$

(m₂)

$$\begin{cases} m_2 g \sin \theta - T_2 = m_2 a \\ N_2 - m_2 g \cos \theta = 0 \end{cases}$$

(m_c)

$$I \alpha = T_2 R - T_1 R$$

II^a equazione
cardinale

$$I = \frac{1}{2} m_c R^2 \quad \text{momento d'inerzia della carucola}$$

$T_2 R - T_1 R =$ somma dei momenti esercitati
dalle forze T_1 e T_2 rispetto al
centro di massa [segno con la regola
della mano destra]

(nota che $m_c g$ e la reazione vincolare hanno
momento nullo)

Quindi:

$$\begin{cases} m_1 g \sin \theta + \mu_k m_1 g \cos \theta - T_1 = -m_1 a \\ m_2 g \sin \theta - T_2 = m_2 a \\ \frac{1}{2} m_c R^2 \cdot \frac{a}{R} = (T_2 - T_1) R \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1 = m_1 g \sin \theta + \mu_k m_1 g \cos \theta + m_1 a \\ T_2 = m_2 g \sin \theta - m_2 a \\ \frac{1}{2} m_c a = T_2 - T_1 \end{cases}$$

(5)

Quindi:

$$\frac{1}{2} m_c a = m_2 g \sin \theta - m_2 a - m_1 g \sin \theta - \mu_k m_1 g \cos \theta - m_1 a$$

$$\left(\frac{1}{2} m_c + m_1 + m_2 \right) a = m_2 g \sin \theta - m_1 g \sin \theta - \mu_k m_1 g \cos \theta$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1) g \sin \theta - \mu_k m_1 g \cos \theta}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_c}$$

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

Numericamente:

$$a = \frac{(10 - 4,5) \cdot 9,81 \cdot \sin 60^\circ - 0,4 \cdot 4,5 \cdot 9,81 \cdot \cos 60^\circ}{10 + 4,5 + \frac{1}{2} \cdot 2} \quad \text{m/s}^2$$

$$a = 2,445 \text{ m/s}^2$$

$$a = 2,4 \text{ m/s}^2 \quad \text{2 cifre signific.}$$

$$\alpha = \frac{2,445}{0,05} \text{ rad/s}^2$$

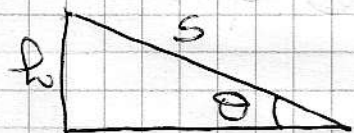
$$\alpha = 48,90 \text{ rad/s}^2$$

$$\alpha \approx 49 \text{ rad/s}^2$$

2 cifre signific.

3) Il blocco m_2 si muove con accelerazione costante a calcolata nel punto precedente percorrendo lo spazio s

$$h = s \cdot \sin \theta$$



$$\rightarrow s = \frac{R}{\sin \theta}$$

6

Quindi vale la formula del moto uniformemente accelerato:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

con $\begin{cases} v^2 = v_B^2 & \text{nel punto di arrivo} \\ v_0 = 0 & \text{velocità di partenza} \\ x - x_0 = s & \text{spazio percorso} \end{cases}$

$$\Rightarrow v_B^2 = 2as$$

$$v_B = \sqrt{2as}$$

Numericamente:

$$v_B = \sqrt{2 \cdot 2,445 \cdot \frac{0,15}{\sin 60^\circ}} \quad \text{m/s} = 0,9203 \text{ m/s}$$

$$v_B = 0,92 \text{ m/s} \quad (2 \text{ cifre significative})$$

ESERCIZIO 2

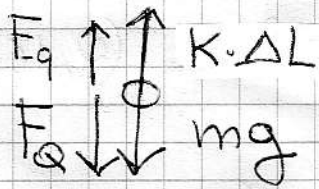
1) La sfera conduttrice è ferma: la somma delle forze ad essa applicate è zero.

• - q

Q
q

Diagramma di corpo libero:

(7)



La molla è allungata, quindi la forza elastica è verso l'alto

Q respinge la carica q della sferetta:

F_Q è diretta verso il basso.

F_Q = modulo della forza elettrostatica esercitata da Q sulla sferetta conduttrice.

$$F_Q = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 (L + \Delta L)^2}$$

La carica $-q$ posta in B attira la sferetta conduttrice: la forza F_{-q} è diretta verso l'alto con F_{-q} = modulo della forza

$$F_{-q} = \left| \frac{-q \cdot q}{4\pi\epsilon_0 (R + (L + \Delta L))^2} \right| = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (R + L + \Delta L)^2}$$

Imponendo che $\sum \vec{F} = 0$

$$-mg - F_Q + F_{-q} + K\Delta L = 0$$

$$-mg - \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 (L + \Delta L)^2} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (R + L + \Delta L)^2} + K\Delta L = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{g} \left[K\Delta L - \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 (L + \Delta L)^2} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (R + L + \Delta L)^2} \right]$$

$$m = \frac{1}{g} \left[K\Delta L + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{(R + L + \Delta L)^2} - \frac{Q}{(L + \Delta L)^2} \right) \right]$$

numericamente:

(8)

$$m = \frac{1}{9,81} \left[150 \cdot 0,02 + \frac{1,2 \times 10^{-6}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \left(\frac{1,2 \times 10^{-6}}{(0,36)^2} - \frac{3 \times 10^{-6}}{(0,16)^2} \right) \right] \text{ Kg}$$

$$m = \frac{1}{9,81} \left[3 + 0,01079 \times (9,259 - 117,2) \right] \text{ Kg}$$

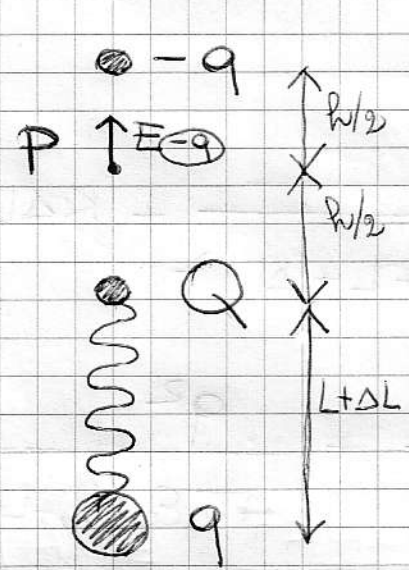
$$m = \frac{1}{9,81} [3 - 1,165] \text{ Kg} = 0,187 \text{ Kg}$$

$m = 0,19 \text{ Kg}$

 2 cifre significative

2) Il campo $\vec{E}$ nel punto P è dato dalla somma vettoriale dei campi elettrici generati da ciascuna delle 3 cariche

$$\vec{E} = \vec{E}_{(-q)} + \vec{E}_{(Q)} + \vec{E}_{(q)}$$



$$\begin{aligned} E_{(-q)} &= \text{modulo di } \vec{E}_{(-q)} \\ &= \left| \frac{-q}{4\pi \epsilon_0 (R/2)^2} \right| = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 (R/2)^2} \end{aligned}$$

$\vec{E}_{(-q)}$ è diretto verso l'alto perché il campo elettrico generato da una carica negativa è diretto verso la sorgente (è entrante)

Le cariche Q e q sono positive e quindi generano un campo elettrico in direzione

uscite dalla sorgente

9

$P \uparrow E_Q$ diretto verso l'alto, ed anche $\uparrow E_q$

con $E_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (R/2)^2}$

modulo del
campo elettrico
generato da Q nel
punto P

$$E_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (L + \Delta L + R/2)^2}$$

" generato da q
"

Quindi

$$\vec{E} = E_{-q} \hat{z} + E_Q \hat{z} + E_q \hat{z}$$

$$\vec{E} = (E_{-q} + E_Q + E_q) \hat{z}$$

$$\vec{E} = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R/2)^2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (R/2)^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (L + \Delta L + R/2)^2} \right) \hat{z}$$

$$\boxed{\vec{E} = E \hat{z}}$$

Numericamente:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{(R/2)^2} + \frac{Q}{(R/2)^2} + \frac{q}{(L + \Delta L + R/2)^2} \right)$$

$$E = \frac{1}{4\pi \cdot 8,85 \times 10^{-12}} \left(\frac{1,2 \times 10^{-6}}{(0,10)^2} + \frac{3 \times 10^{-6}}{(0,1)^2} + \frac{1,2 \times 10^{-6}}{(0,26)^2} \right) \frac{V}{m}$$

$$E = 8,99 \times 10^3 \cdot (437,8) \frac{V}{m}$$

$$E = 3,94 \times 10^6 \frac{V}{m} \approx \boxed{3,9 \times 10^6 \frac{V}{m}} \quad \begin{array}{l} 2 \text{ cifre} \\ \text{signif.} \end{array}$$

NOTA che il campo generato ^{nel punto P} dalla sferetta conduttrice uniformemente carica è uguale a quello generato da una carica puntiforme posta nel centro della sferetta. (10)

3) $V(A)$ Utilizzando ancora il principio di sovrapposizione:

$$V(A) = \underbrace{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}}_{\text{Contributo delle carica } q \text{ posta sulla sferetta conduttrice}} + \underbrace{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (L+\Delta L)}}_{\text{contributo della carica } Q \text{ posta a distanza } (L+\Delta L)} + \underbrace{\frac{-q}{4\pi\epsilon_0 (L+\Delta L+R)}}_{\begin{matrix} \text{"} \\ \text{"} \\ \text{"} \\ -q \\ \text{"} \\ \text{"} \\ \text{"} \end{matrix}}$$

$$V(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R} + \frac{Q}{(L+\Delta L)} - \frac{q}{(L+\Delta L+R)} \right)$$

Numericamente:

$$V(A) = \frac{1}{4\pi \cdot 8,85 \times 10^{-12}} \left(\frac{1,2 \times 10^{-6}}{0,02} + \frac{3 \times 10^{-6}}{0,16} - \frac{1,2 \times 10^{-6}}{0,36} \right) V$$

$$V(A) = \frac{75,42 \times 10^6}{4\pi \cdot 8,85} \text{ V} = 6,78 \times 10^5 \text{ V}$$

$$V(A) \approx 6,8 \times 10^5 \text{ V}$$

2 cifre signific.

4) Conservazione dell'energia meccanica + elettrostatica. (11)

Sia C la posizione di partenza della sfera conduttrice

$$E_C = E_A$$

$$E_C = \underbrace{K_C}_{\text{energia cinetica}} + \underbrace{U_{gC}}_{\text{energia potenziale gravitaz.}} + \underbrace{U_{kC}}_{\text{" " elastica}} + \underbrace{U_C}_{\text{" " elettrostatica}}$$

$K_C = 0$ la sfera parte con velocità iniz. nulla

$U_{gC} = 0$ per la scelta dello zero di U_g

$U_{kC} = \frac{1}{2} K (2\Delta L)^2$ poiché l'allungamento della molla è $\Delta L + \Delta L$

$$U_C = q V(C)$$

$$\text{con } V(C) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (L + 2\Delta L)} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 (L + 2\Delta L + R)}$$

$$V(C) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R} + \frac{Q}{L + 2\Delta L} - \frac{q}{L + 2\Delta L + R} \right)$$

$$E_A = K_A + U_{gA} + U_{kA} + U_A$$

$$K_A = \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$U_{gA} = mg \cdot \Delta L$$

$$U_{kA} = \frac{1}{2} K (\Delta L)^2$$

$$U_A = q V(A)$$

Quindi:

(12)

$$\frac{1}{2} k (2\Delta L)^2 + q V(C) = \frac{1}{2} m v_A^2 + mg \Delta L + \frac{1}{2} k (\Delta L)^2 + q V(A)$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{3}{2} k (\Delta L)^2 - mg \Delta L + q (V(C) - V(A))$$

$$v_A = \sqrt{\frac{3k}{m} (\Delta L)^2 - 2g \Delta L + \frac{2q}{m} (V(C) - V(A))}$$

$$V(C) - V(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{L+2\Delta L} - \frac{q}{L+2\Delta L+h} - \frac{Q}{L+\Delta L} + \frac{q}{L+\Delta L+h} \right)$$

Numericamente:

$$v_A = \sqrt{\frac{3 \cdot 150}{0,187} (0,02)^2 - 2 \cdot 9,81 \cdot 0,02 + \frac{2 \cdot 1,2 \times 10^{-6}}{0,187 \cdot 4\pi 8,85 \times 10^{-12}} \cdot \left(\frac{3 \times 10^{-6}}{0,18} - \frac{1,2 \times 10^{-6}}{0,38} - \frac{3 \times 10^{-6}}{0,16} + \frac{1,2 \times 10^{-6}}{0,36} \right)}$$

$$v_A = \sqrt{0,9626 - 0,3924 + 0,1154 \cdot (-1,9079)} \text{ m/s}$$

$$v_A = \sqrt{0,3500} \text{ m/s} = 0,5916 \text{ m/s}$$

$$\boxed{v_A = 0,59 \text{ m/s}} \quad 2 \text{ cifre signif.}$$