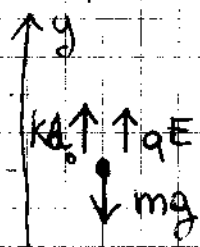


Esercizio 1

1) Nella posizione di equilibrio $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0$



Componente y:

$$-mg + Kd_0 + qE = 0$$

$$\Rightarrow d_0 = \frac{mg}{K} - \frac{qE}{K}$$

$$d_0 = \left(\frac{0,4 \cdot 9,8}{15} - \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 100}{15} \right) \text{ m} = 0,032 \text{ m} = \underline{\underline{3,2 \text{ cm}}}$$

2) Nel punto B di ascensione $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$

Comp. y:

$$ma = Kd + qE - mg$$

$$a = \frac{Kd}{m} + \frac{qE}{m} - g$$

$$a = \left(\frac{15 \cdot 0,1}{0,1} + \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 100}{0,1} - 9,8 \right) \text{ m/s}^2 = \underline{\underline{10 \text{ m/s}^2}}$$

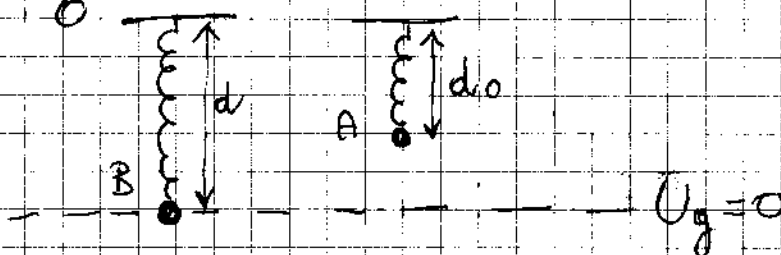
a è la componente y di $\vec{a}$ nel punto B

$$\vec{a} = 10 \text{ m/s}^2 \hat{y} \quad \text{diretta verso l'alto}$$

3) Conservazione dell'energia (meccanica + elettromagnetica)

$$E_B = E_A$$

Ponendo lo zero dell'energia pot. gravitazionale al livello del punto B



$$E_B = \frac{1}{2} K d^2 + U_B$$

energia potenziale elettrostatica della carica q nel punto B

$$E_A = \frac{1}{2} m v_A^2 + mg(d-d_0) + \frac{1}{2} K d_0^2 + U_A \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 + mg(d-d_0) + \frac{1}{2} K d_0^2 + U_A = \frac{1}{2} K d^2 + U_B$$

$$v_A = \sqrt{\frac{K}{m} (d^2 - d_0^2) - 2g(d-d_0) + \frac{2}{m} (U_B - U_A)}$$

calcolo di $U_B - U_A$:

$$U_B - U_A = q(V_B - V_A) = q \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s} = qE(d-d_0)$$

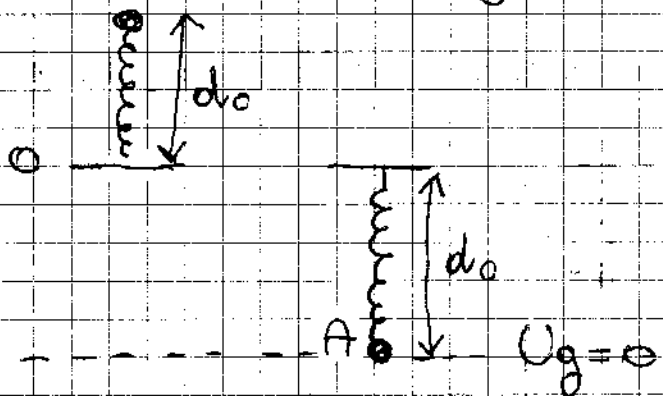
$$\Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{K}{m} (d^2 - d_0^2) - 2g(d-d_0) + \frac{2qE}{m} (d-d_0)}$$

$$v_A = \underline{\underline{0,82 \text{ m/s}}}$$

4) Per determinare se q arriva al punto C calcolo la sua energia cinetica K_C nel punto C e verifico se $K_C \geq 0$

$$E_C = K_C + mg 2d_0 + \frac{1}{2} K d_0^2 + U_C$$

energia potenziale
elettrostatica di q
nel punto C



$$E_A = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} K d_0^2 + U_A$$

$$K_C + 2mg d_0 + \frac{1}{2} K d_0^2 + U_C = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} K d_0^2 + U_A$$

Conservazione dell'energia

$$\Rightarrow K_c = \frac{1}{2} m v_A^2 - 2mgd_0 + U_A - U_c \quad (3)$$

dove $U_A - U_c = q \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{s} = qE(2d_0) = 2qEd_0$

$$K_c = \frac{1}{2} m v_A^2 - 2mgd_0 + 2qEd_0$$

$K_c \geq 0$ perché è un'energia cinetica

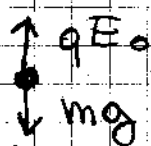
$$\frac{1}{2} m v_A^2 - 2mgd_0 + 2qEd_0 \geq 0$$

$$0,5 \cdot 0,1 \cdot (0,82)^2 - 2 \cdot 0,1 \cdot 9,8 \cdot 0,032 +$$

$$+ 2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 0,032 \geq 0$$

ovvero $(-61,1 \cdot 10^{-3}) J \geq 0$ NO

5) Moto di una particella libera: si muove a velocità costante se $\sum \vec{F}_{ext} = 0$



$$-mg + qE_0 = 0$$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{mg}{q}$$

$$E_0 = \frac{0,1 \cdot 9,8}{5 \cdot 10^{-3}} \text{ V/m} \quad E_0 = 196 \text{ V/m}$$

$E_0 = 200 \text{ V/m}$ (due cifre significative)

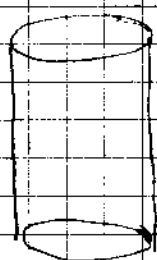
Esercizio 2

(4)

1) All'interno dei conduttori il campo $\vec{E} = 0$
Si ha che $L \gg a, b, c, d$ quindi il problema ha simmetria cilindrica $\Rightarrow$ il campo $\vec{E}$ è diretto radialmente e il suo modulo dipende solo da r (r = distanza dall'asse dei cilindri)

Applichiamo il teo di Gauss ad una superficie chiusa cilindrica, coassiale ai conduttori, di raggio r con $c < r < d$

$$\Phi(\vec{E}) = \Phi_{\text{lat.}} + \Phi_{\text{basi}}$$



flusso attraverso la superficie laterale

flusso attraverso le due basi

$\Phi_{\text{basi}} = 0$ perché $\vec{E} \parallel$ alle due basi

$\Phi_{\text{lat.}} = 0$ perché la superficie laterale è contenuta all'interno del cilindro conduttore più esterno

$$\Rightarrow \Phi(\vec{E}) = 0$$

quindi $q_{\text{int}} = 0$ dove $q_{\text{int}} = Q + Q_c$

$$\Rightarrow Q_c = -Q = \underline{\underline{-9,0 \text{ nC}}}$$

Poiché il conduttore esterno è scarico: $Q_c + Q_d = 0$

$$\Rightarrow Q_d = Q = \underline{\underline{9,0 \text{ nC}}}$$

$$2) \vec{E}(r) = E(r) \hat{r}$$

Applicando le Teo di Gauss
a superfici cilindriche di
raggio r e
altezza L

5

$$0 < r < a$$

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi(\vec{E}) = 2\pi r L E(r) \\ q_{\text{int}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow E(r) = 0$$

$$a < r < b$$

$E(r) = 0$ poiché è all'interno
del conduttore

$$b < r < b + D$$

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi(\vec{E}) = 2\pi r L E(r) \\ q_{\text{int}} = Q \end{array} \right\} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r L r}$$

$$b + D < r < c$$

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi(\vec{E}) = 2\pi r L E(r) \\ q_{\text{int}} = Q \end{array} \right\} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L r}$$

$$c < r < d$$

$E(r) = 0$ poiché è all'interno
del conduttore

$$r > d$$

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi(\vec{E}) = 2\pi r L E(r) \\ q_{\text{int}} = Q + \underbrace{Q_c + Q_d}_{=0} = Q \end{array} \right\} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L r}$$

$$3) \quad V_b - V_c = \int_b^c \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = \int_b^c E(r) dr = \quad (6)$$

$$= \int_b^{b+D} \underbrace{\frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L r}}_{\text{campo } E(r) \text{ nella regione con } b < r < b+D} dr + \int_{b+D}^c \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r} dr =$$

$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \left[\int_b^{b+D} \frac{1}{\epsilon_r r} dr + \int_{b+D}^c \frac{1}{r} dr \right] =$$

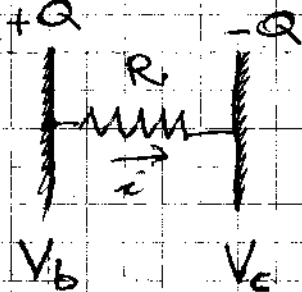
$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \left[\frac{1}{\epsilon_r} \ln\left(\frac{b+D}{b}\right) + \ln\left(\frac{c}{b+D}\right) \right]$$

Ovvero

$$V_b - V_c = \frac{9 \cdot 10^{-9} \text{ B}}{2\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1} \left[\frac{1}{1,5} \ln\left(\frac{6}{2}\right) + \ln\left(\frac{10}{6}\right) \right] \text{ Volt}$$

$$V_b - V_c = 201 \text{ V} \approx \underline{\underline{2,0 \times 10^2 \text{ V}}} \quad (\text{due cifre significative})$$

4) Poiché la resistenza R viene collocata tra due punti tra cui c'è una differenza di potenziale in essa inizia a scorrere una corrente.



$$V_b - V_c = 2,0 \times 10^2 \text{ V}$$

$$t = 0$$

La corrente scorre nella resistenza R nel verso indicato in figura, poiché $V_b > V_c$.

Le cariche positive si spostano quindi dal conduttore interno verso quello esterno, fino a quando $V_b - V_c = 0$ ovvero $Q = 0$.

(vedi espressione di $V_b - V_c$ ricavata nel punto 3)

$$\boxed{Q_b = Q_c = 0} \quad \text{dopo un tempo molto lungo}$$

$$Q_a + Q_b + Q_c + Q_d = Q$$

sempre

(conservazione della carica totale)

$$\Rightarrow Q_a + Q_d = Q$$

Inoltre il campo $\vec{E}$ all'interno dei due conduttori deve essere $= 0$, quindi considerando

$$a < r < b$$

$$\text{dove} \quad \Phi(\vec{E}) = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{\text{int}} = 0$$

$$\text{avendo} \quad q_{\text{int}} = Q_a \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_a = 0}$$

$$\text{da cui} \quad \boxed{Q_d = Q}$$

5) Si tratta dell'energia che ora immagazzinata nel campo elettrico fra i due conduttori, che dopo un tempo infinito si è annullata.

I due cilindri conduttori costituiscono un condensatore parzialmente riempito di dielettrico. L'energia immagazzinata a $t=0$ (prima che si inizi a scaricare) vale

$$E = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} Q V$$

$$\text{con } \begin{cases} V = V_b - V_c = 201 \text{ V} \\ Q = 9 \text{ nC} \end{cases}$$

$$E = 9,05 \cdot 10^{-7} \text{ J} \approx \underline{\underline{9,1 \times 10^{-7} \text{ J}}} \quad (2 \text{ cifre significative})$$