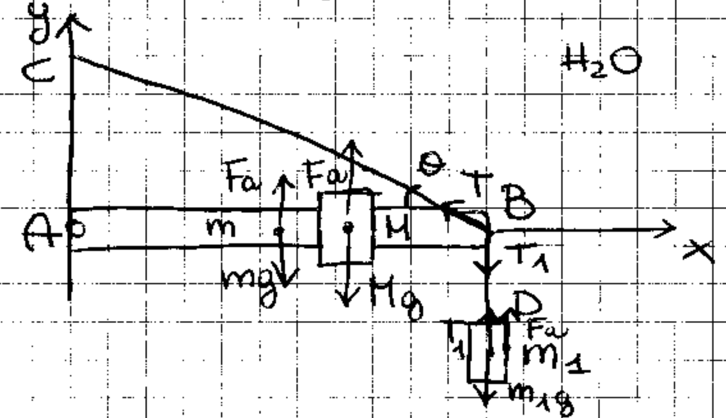
Soluzioni 2° compitino 06/12/2006 (1)

ESERCIZIO (1)

(1)



Il sistema (barra m + massa M) è in equilibrio

$\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$

Calcolo i momenti rispetto all'asse di rotazione in A

Forze esterne agenti sul sistema:

$m\vec{g} + \vec{F}_{a_m}$ applicati al CM della barra m

$M\vec{g} + \vec{F}_{a_M}$ " " di M

$\vec{T}$ tensione del filo BC

$\vec{T}_1$ " " " BD

$\vec{F}_v$ forza vincolare applicata in A dallo snodo.

$\vec{F}_v$ produce momento nullo perché è applicata sull'asse di rotazione

$$\vec{F}_{a_m} = \frac{\rho_{H_2O}}{\rho_m} m g \hat{y} = \frac{1}{2} m g \hat{y}$$

$$m\vec{g} = -mg\hat{y}$$

$$\vec{F}_{a_M} = \frac{\rho_{H_2O}}{\rho_M} M g \hat{y} = \frac{1}{3} M g \hat{y}$$

$$M\vec{g} = -Mg\hat{y}$$

$$\vec{T} = -T\cos\theta\,\hat{x} + T\sin\theta\,\hat{y}$$

con $\sin\theta = \dfrac{h}{\sqrt{h^2+L^2}}$

$$\vec{T}_1 = -T_1\hat{y}$$

② La massa m_1 è in equilibrio:

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0$$

Forze applicate a m_1:

$$m_1 \vec{g} = -m_1 g \hat{y}$$

$$\vec{F}_{a_{m_1}} = \frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{m_1}} m_1 g \hat{y} = \frac{1}{4} m_1 g \hat{y}$$

$$\vec{T}_1 = T_1 \hat{y}$$

$$\Rightarrow -m_1 g + \frac{1}{4} m_1 g + T_1 = 0$$

$$T_1 = \frac{3}{4} m_1 g$$

$$T_1 = \left(\frac{3}{4} \cdot 1 \cdot 9{,}8\right) N = 7{,}35\, N \simeq \boxed{7{,}4 N}$$

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = 0 \quad \text{per il sistema} \quad (m+M)$$

$\Rightarrow$ componente z di $\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$ ovvero

$$-mg\frac{L}{2} + \frac{1}{2} mg \frac{L}{2} - Mgx + \frac{1}{3} Mgx - T_1 L +$$
$$+ T \sin\theta L = 0$$

$$-mg \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - Mg\frac{2}{3}\left(\frac{x}{L}\right) - T_1 + T\frac{h}{\sqrt{h^2+L^2}} = 0$$

$$T = \frac{\sqrt{h^2+L^2}}{h}\left[\frac{m}{4} + \frac{2}{3} M\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{T_1}{g}\right] g$$

$$T = \frac{\sqrt{9+100}}{3}\left[\frac{5}{4} + \frac{2}{\cancel{3}}\, \cancel{10}\, \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\cancel{10}} + \frac{7{,}35}{9{,}8}\right] 9{,}8 \quad N$$

$$T = 204{,}6\, N \simeq \boxed{200 N}$$

2) In assenza di acqua, tutte le forze di Archimede sono $= 0$.

Dall'eq. per la condizione di equilibrio di m_1 si ricava:

$$T_1 - m_1 g = 0$$

$\Rightarrow T_1 = m_1 g$ ← nota che T_1 non dipende dalla posizione di M

Dalla condizione di equilibrio $\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$ per il sistema $(M+m)$ si ha:

$$-mg\frac{L}{2} - Mgx - m_1 g L + T\frac{h}{\sqrt{h^2+L^2}}\,L = 0$$

quando $x = x_A$ $T = T_{max}$ e il cavo CB si spezza.

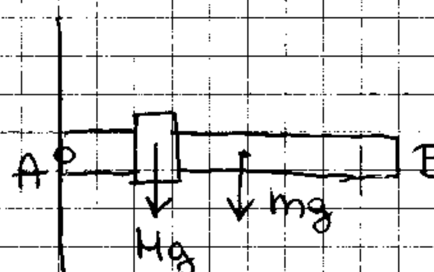
$$-\frac{1}{2}mL - Mx_A - m_1 L + T_{max}\frac{h}{\sqrt{h^2+L^2}}\frac{L}{g} = 0$$

$$\Rightarrow x_A = \frac{L}{M}\left(\frac{h}{\sqrt{h^2+L^2}}\frac{T_{max}}{g} - \left(\frac{m}{2}+m_1\right)\right)$$

$$x_A = \frac{\cancel{10}}{\cancel{10}}\left[\frac{3}{\sqrt{109}}\cdot\frac{250}{9{,}8} - (2{,}5+1)\right]\ m$$

$$x_A = 3{,}83\ m \simeq \boxed{3{,}8\ m}$$

3)



$$-Mgx_A - mg\frac{L}{2} = I\alpha$$

$\alpha_z =$ componente z di $\vec{\alpha}$

ovvero $\vec{\alpha} = \alpha_z \hat{z}$

④ $I = \underbrace{\frac{1}{12} m L^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2}_{I_m} + \underbrace{M x_A^2}_{I_M}$ trattando M come puntiforme

$I = \frac{1}{3} m L^2 + M x_A^2$

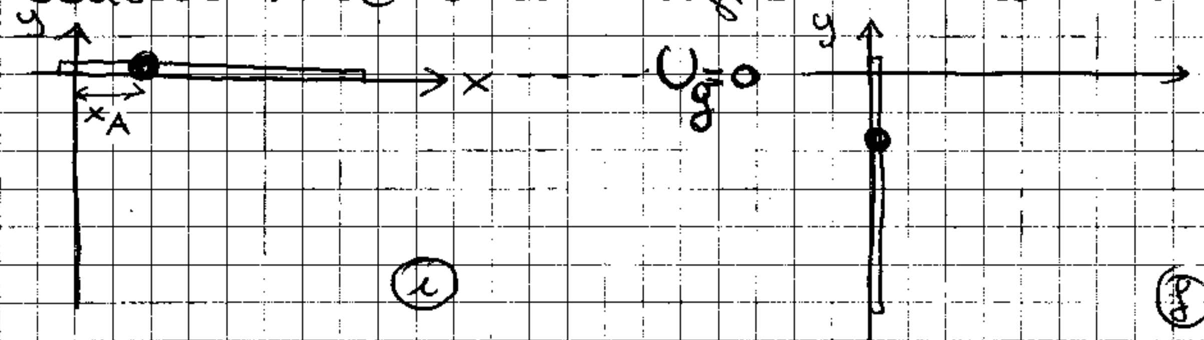
$$\Rightarrow \alpha_z = -\frac{m L/2 + M x_A}{\frac{1}{3} m L^2 + M x_A^2} \, g$$

$$\alpha_z = -\frac{5 \cdot 5 + 10 \cdot 3{,}83}{\frac{5}{3} \cdot 100 + 10 \cdot (3{,}83)^2} \cdot 9{,}8 \; \frac{\text{rad}}{s^2}$$

$$\alpha_z = -\frac{63{,}3}{313{,}356} \cdot 9{,}8 \frac{\text{rad}}{s^2} = -1{,}98 \frac{\text{rad}}{s^2} \simeq \boxed{-2{,}0 \frac{\text{rad}}{s^2}}$$

$\vec{\alpha} = \alpha_z \hat{z} = -|\alpha| \hat{z}$ con $|\alpha| = 2{,}0 \frac{\text{rad}}{s^2}$

④ Conservazione dell'energia meccanica



$E_i = E_f$

$E_i = 0$ poiché il sistema è fermo e ho posto $U_g = 0$ per $y = 0$

$$E_f = \frac{1}{2} I \omega^2 \underbrace{- mg\frac{L}{2} - Mg x_A}_{\text{energia potenziale gravitazionale}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} I \omega^2 - mg\frac{L}{2} - Mg x_A = 0$$ 5

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2}{I}\left(m\frac{L}{2} + M x_A\right)g}$$

$$I = \frac{1}{3} m L^2 + M x_A^2 = \left(\frac{5}{3} \cdot 100 + 10 \cdot (3{,}83)^2\right) Kg\, m^2$$

$$I = 313{,}356\ Kg\, m^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{313{,}356}\left(5 \cdot 5 + 10 \cdot 3{,}83\right) \cdot 9{,}8} \quad \frac{rad}{s}$$

$$\omega = 1{,}99\ \frac{rad}{s} \simeq \boxed{2{,}0\ \frac{rad}{s}}$$

Il sistema ruota in senso orario

$$\vec{\omega} = -|\omega|\hat{z} \quad \text{con} \quad \omega = 2{,}0\ \frac{rad}{s}$$

5) Dopo l'urto con la parete verticale la barra ruota in senso antiorario con velocità angolare ω' (subito dopo l'urto) data da:

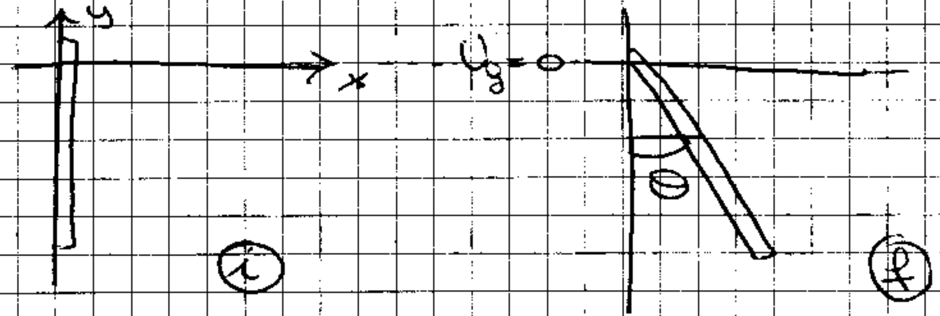
$$\underbrace{\cancel{U_g} + \frac{1}{2} I \omega'^2}_{\text{energia meccanica un istante dopo l'urto}} + \Delta E = \underbrace{\frac{1}{2} I \omega^2 + \cancel{U_g}}_{\text{energia meccanica un istante prima dell'urto}}$$

L'energia gravitazionale è la stessa perché il sistema è nella stessa posizione prima e dopo l'urto

$$\Rightarrow \frac{1}{2} I \omega'^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 - \Delta E$$

Dopo l'urto, mentre la barra sale, l'energia

⑥ meccanica si conserva



$$E_i = -mg\frac{L}{2} - Mgx_A + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$E_f = -mg\frac{L}{2}\cos\theta - Mgx_A\cos\theta$$

$$E_i = E_f$$

$$-\left(mg\frac{L}{2} + Mgx_A\right) + \frac{1}{2}I\omega^2 - \Delta E = -\left(mg\frac{L}{2} + Mgx_A\right)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = 1 - \left(\frac{1}{2}I\omega^2 - \Delta E\right) \Big/ mg\frac{L}{2} + Mgx_A$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{0{,}5 \cdot 313{,}356 \cdot (1{,}99)^2 - 200}{(5 \cdot 5 + 10 \cdot 3{,}83)\,9{,}8}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{420{,}46}{63{,}3 \cdot 9{,}8} = 1 - 0{,}6778 = 0{,}3222$$

$$\Rightarrow \theta = 71{,}20^\circ$$

Quindi la max quota raggiunta da M è

$$y_{M_{max}} = -x_A\cos\theta$$

$$y_{MAX} = -3{,}83 \cdot 0{,}3222\ \text{m} \cong \boxed{-1{,}2\ \text{m}}$$

1) L'energia meccanica NON si conserva perché l'urto è anelastico. La quantità di moto NON si conserva perché è presente la forza vincolare esercitata dal perno sul disco che ha una componente nella direzione di $\vec{P}_{in}$.
Si conserva il momento angolare L_z rispetto all'asse di rotazione del disco

2) L_{z_i} (iniziale) $= L_{z_f}$ (finale)

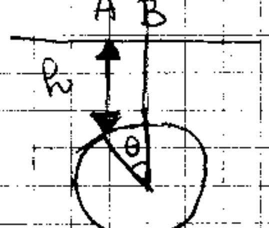
Consideriamo il primo urto, quello con la massa che parte dal punto B.

$L_{z_i} = 0$ perché il disco è fermo e la massa ha velocità diretta verso il centro del disco

Quindi dopo il 1° urto $L_{z_f} = L_{z_i} = 0$

Consideriamo il 2° urto, quello con la massa che parte dal punto A. Essa colpisce il disco con velocità $\vec{v}_A$ diretta nella direzione $-\hat{y}$ avente modulo

$v_A = \sqrt{2gh}$ h = spazio percorso della massa in caduta libera prima di urtare il disco



$\theta = 30°$ $h = 2R - R\cos\theta$

$$h = 2R\left(1 - \frac{\cos\theta}{2}\right) = 0,567 \text{ m}$$

$$\Rightarrow v_A = \sqrt{4gR\left(1 - \frac{\cos\theta}{2}\right)} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 0,567} \text{ m/s}$$

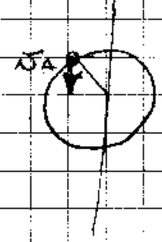
$$v_A = 3,33 \text{ m/s}$$

Prima dell'urto con la massa partita da A:

$$L_{z_i} = 0 + m v_A R \sin\theta$$

del disco + la massa partita da B che è rimasta attaccata al disco (tutto fermo)

della massa partita da A

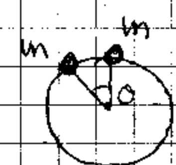


Dopo l'urto:

$$L_{z_f} = I_o \omega_o$$

con I_o = momento d'inerzia del disco con le due masse attaccate

$$I_o = \frac{1}{2} M R^2 + 2 m R^2$$



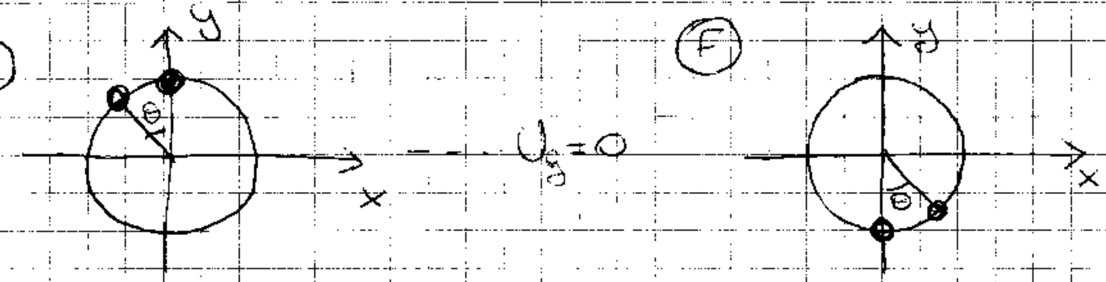
$$\Rightarrow m v_A \cancel{R} \sin\theta = \left(\frac{1}{2} M R^{\cancel{2}} + 2 m R^{\cancel{2}}\right) \omega_o$$

$$m v_A \sin\theta = \left(\frac{1}{2} M + 2m\right) R \omega_o$$

$$\omega_o = \frac{m v_A \sin\theta}{\left(\frac{1}{2} M + 2m\right) R}$$

$$\omega_o = \frac{0,1 \cdot 3,33 \cdot 0,5}{\left(\frac{1}{2} + 0.2\right) 0.5} \text{ rad/s} = 0.48 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

3) Conservazione dell'energia meccanica



ω_0 $\qquad$ ω

$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$

$\omega_0 = 0{,}48$ rad/s

$$\boxed{\vec{\omega}_0 = \omega_0 \hat{z}}$$

Pongo lo zero dell'energia potenziale gravit. al livello $y=0$

$$E_i = mgR + mgR\cos\theta + \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2$$

$$E_f = -mgR - mgR\cos\theta + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

$$E_i = E_f$$

$$\Rightarrow \quad 2mgR + 2mgR\cos\theta + \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

$$\frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 + 2mgR(1+\cos\theta)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{4mgR(1+\cos\theta)}{I_0}}$$

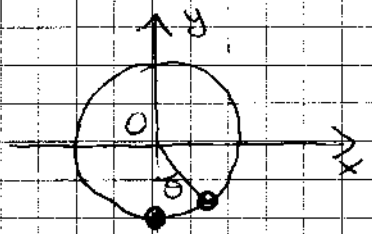
$$\omega = 4{,}6 \text{ rad/s}$$

Osservo che nell'evoluzione tra l'istante (i) (subito dopo l'urto) all'istante (f) (dopo un mezzo giro) L_z non si conserva, infatti è presente la forza peso che genera un momento $\neq 0$ rispetto all'asse di rotazione, e quindi essendo

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \frac{d}{dt}\vec{L}$$

si ha che $\vec{L}$ non si conserva.

4)



$$x_{CM} = \frac{0 \cdot M + 0 \cdot m + R\sin\theta \cdot m}{M+2m}$$

$$\Rightarrow x_{CM} = \frac{m}{M+2m} R\sin\theta$$

$$y_{CM} = \frac{0 \cdot M - Rm - R\cos\theta\, m}{M+2m}$$

$$\Rightarrow y_{CM} = -(1+\cos\theta)R\,\frac{m}{M+2m}$$

$$\begin{cases} x_{CM} = 0{,}021\ m \\ y_{CM} = -0{,}078\ m \end{cases}$$

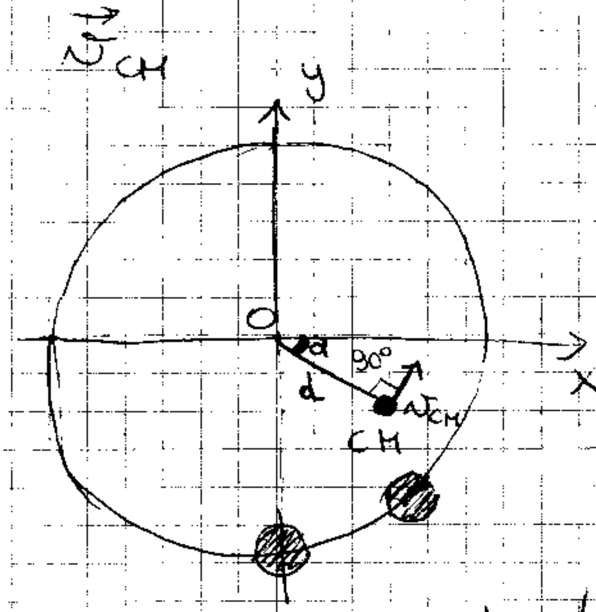
$V_{CM} = \omega d$ $\quad$ d = distanza del C.M. dal punto O

$$d = \sqrt{x_{CM}^2 + y_{CM}^2}$$

$$d = 0{,}080\ m$$

$\Rightarrow V_{CM} = 0{,}37\ m/s$ $\quad$ modulo della velocità del C.M.

Per determinare la direzione di $\vec{v}_{CM}$



$$v_{CM_x} = v_{CM} \sin\alpha$$

$$v_{CM_y} = v_{CM} \cos\alpha$$

con $|y_{CM}| = x_{CM} \tan\alpha$

$$\Rightarrow \tan\alpha = 3{,}738$$

$$\alpha = 75^\circ$$

$$\begin{cases} v_{CM_x} = 0{,}36 \text{ m/s} \\ v_{CM_y} = 0{,}095 \text{ m/s} \end{cases}$$

5) Per $t > 0$ il sistema (disco + 2 masse) è soggetto solo alla forza peso

$$\sum \vec{F}_{ext} = \underbrace{(M + 2m)}_{\text{massa del sistema}} \vec{a}_{CM}$$

con $\sum \vec{F}_{ext} = (M + 2m)\vec{g}$

$$\Rightarrow \vec{a}_{CM} = \vec{g} \qquad a_{CM} = -g$$

con $g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$

$$\begin{cases} v_{CM_x} = 0{,}36 \text{ m/s} \quad \text{costante} \\ v_{CM_y}(T) = \underbrace{v_{CM_y}(0)}_{0{,}095 \frac{m}{s}} - gT = -98 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$x_{CM}(T) = x_{CM}(0) + v_{CM_x} \cdot T$$

$$y_{CM}(T) = y_{CM}(0) + v_{CM_y}(0) \cdot T - \frac{1}{2} g T^2$$

$$x_{CM}(T) = (0{,}021 + 0{,}36 \cdot 1)\ m = 0{,}38\ m$$

$$y_{CM}(T) = \left(-0{,}078 + 0{,}095 \cdot 1 - \frac{1}{2} 9{,}8 \cdot 1^2\right) m =$$

$$= -4{,}9\ m$$