Soluzione I^a Verifica scritta 2/11/2006

ESERCIZIO ①

1)
$$\begin{cases} V_{A0x} = V_{A0}\cos\theta_A \\ V_{A0y} = V_{A0}\sin\theta_A \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{B0x} = V_{B0}\cos\theta_B \\ V_{B0y} = V_{B0}\sin\theta_B \end{cases}$$

Componenti della velocità iniziale dei due proiettili

Equazioni del moto: ($t=0$ è l'istante di sparo)

Ⓐ
$$\begin{cases} x_A(t) = V_{A0}\cos\theta_A \cdot t \\ y_A(t) = V_{A0}\sin\theta_A \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Ⓑ
$$\begin{cases} x_B(t) = V_{B0}\cos\theta_B \cdot t + x_0 \\ y_B(t) = V_{B0}\sin\theta_B \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \qquad x_0 = 60\,m$$

I due proiettili collidono all'istante t_0 in cui

$$\begin{cases} x_A(t_0) = x_B(t_0) \\ y_A(t_0) = y_B(t_0) \end{cases}$$

ovvero

$$V_{A0}\cos\theta_A \cdot t_0 = V_{B0}\cos\theta_B\, t_0 + x_0$$

$$V_{A0}\sin\theta_A \cdot t_0 - \cancel{\frac{1}{2}gt_0^2} = V_{B0}\sin\theta_B \cdot t_0 - \cancel{\frac{1}{2}gt_0^2}$$

Si tratta di due equazioni in due incognite, t_0 e θ_B

Dalla 1^a si ottiene:

$$t_0 = \frac{x_0}{V_{A0}\cos\theta_A - V_{B0}\cos\theta_B}$$

Sostituendo nella 2^a

$$(V_{B0}\sin\theta_B - V_{A0}\sin\theta_A) \cdot \frac{x_0}{V_{A0}\cos\theta_A - V_{B0}\cos\theta_B} = 0$$

Poichè $x_0 \neq 0$ deve essere

$$V_{B0} \sin\theta_B - V_{A0} \sin\theta_A = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta_B = \frac{V_{A0}}{V_{B0}} \sin\theta_A$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta_B = 0{,}625 \quad \Rightarrow \quad \underline{\theta_B = 39^\circ}$$

2) Istante di collisione

$$t_0 = \frac{60}{100 \cdot \cos(30^\circ) - 80 \cdot \cos(39^\circ)} \ s$$

$$\underline{t_0 = 2{,}5 \ s}$$

Il punto in cui avviene la collisione ha coordinate (x, y) date da

$$x = x_A(t_0)$$
$$y = y_A(t_0)$$

ovvero $\quad x = 100 \cdot \cos(30^\circ) \cdot 2{,}5 \quad m$

$$x = 217 \ m \approx \underline{220 \ m} \quad \left(\text{2 cifre significative}\right)$$

$$y = 100 \cdot \sin(30^\circ) \cdot 2{,}5 - \frac{9{,}8}{2}(2{,}5)^2 \quad m$$

$$y = \underline{94 \ m}$$

3) Velocità al momento dell'impatto:

$$\begin{cases} \vec{V}_A(t_0) = V_{Ax}(t_0)\,\hat{x} + V_{Ay}(t_0)\,\hat{y} \\ \vec{V}_B(t_0) = V_{Bx}(t_0)\cdot\hat{x} + V_{By}(t_0)\cdot\hat{y} \end{cases}$$

$$V_{Ax} = V_{A0} \cos\theta_A = 87 \ m/s$$
$$V_{Bx} = V_{B0} \cos\theta_B = 62 \ m/s$$

(il moto lungo x è a velocità costante)

$$v_{Ay}(t_0) = v_{A0}\cos\theta_A - gt_0 = 26\ m/s$$

$$v_{By}(t_0) = v_{B0}\cos\theta_B - gt_0 = 26\ m/s$$

4) Sia ora $\theta_B = 45°$

La gittata di un proiettile è $R = \dfrac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$

Quindi per i due proiettili:

$$R_A = \frac{v_{A0}^2 \sin(2\theta_A)}{g} = 884\ m$$

$$R_B = \frac{v_{B0}^2 \sin(2\theta_B)}{g} = 653\ m$$

Quindi A tocca terra più lontano rispetto al punto di sparo.

La quota più elevata raggiunta vale:

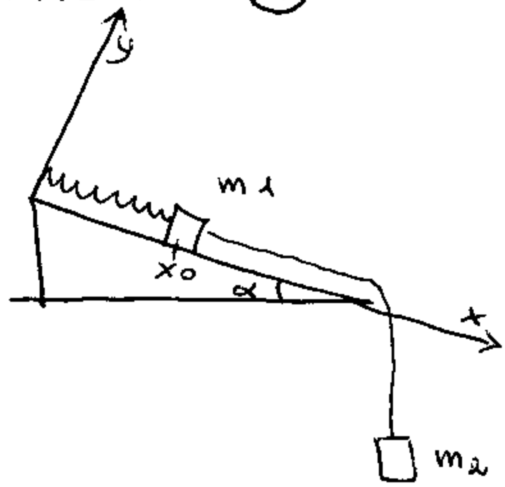
$$h_A = \frac{v_{A0}^2 \sin^2\theta_A}{2g} = 128\ m$$

$$h_B = \frac{v_{B0}^2 \sin^2\theta_B}{2g} = 163\ m$$

Quindi B raggiunge la quota più elevata.

ESERCIZIO 2

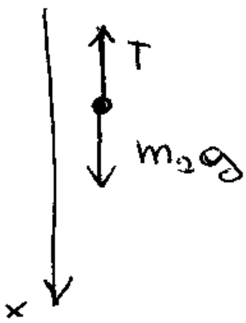
1)



Quando il sistema è all'equilibrio
$$\sum \vec{F}_i = 0$$
su ciascuna delle due masse.

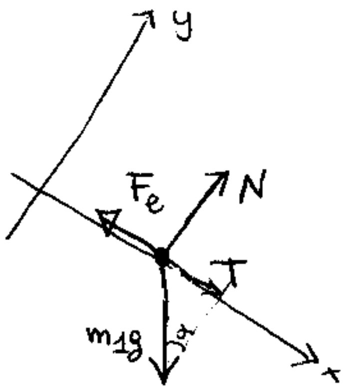
Diagramma di corpo libero:

massa m_2:



$$\Rightarrow \quad -T + m_2 g = 0$$
$$T = m_2 g$$

massa m_1



(y): $N - m_1 g \cos\alpha = 0$

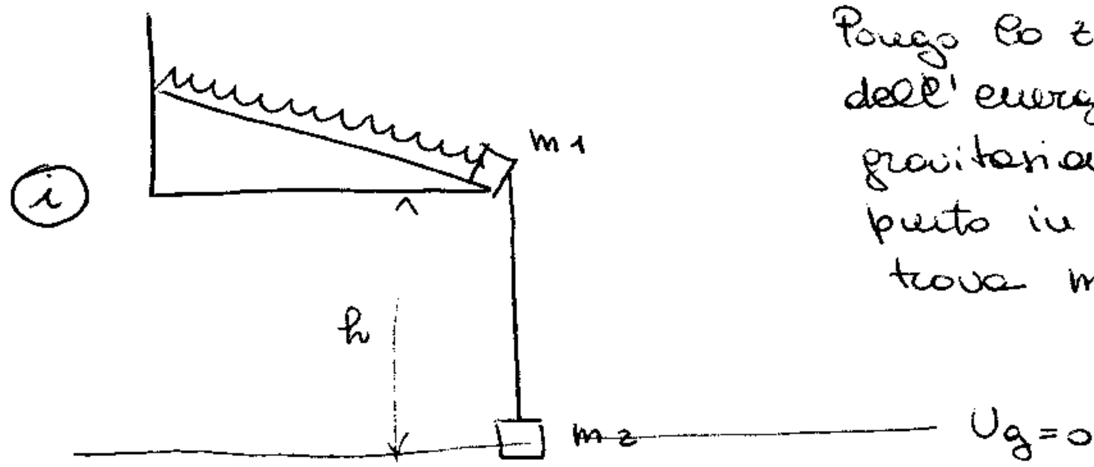
(x): $m_1 g \sin\alpha + T - F_e = 0$

F_e = forza elastica $= K x_0$

$$\Rightarrow \quad m_1 g \sin\alpha + m_2 g - K x_0 = 0$$
$$x_0 = \frac{(m_1 \sin\alpha + m_2)}{K} g$$
$$x_0 = \frac{1,5 \cdot \sin(30°) + 1}{5} \cdot 9,8 \ \text{m} = 3,4 \ \text{m}$$

2) Non ci sono attriti, l'energia meccanica si conserva.
$$E_i = E_f$$

E_i = energia meccanica dell'istante iniziale, in cui il blocchetto m_1 è fermo dalla base del piano inclinato.



Pongo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale nel punto in cui si trova m_2.

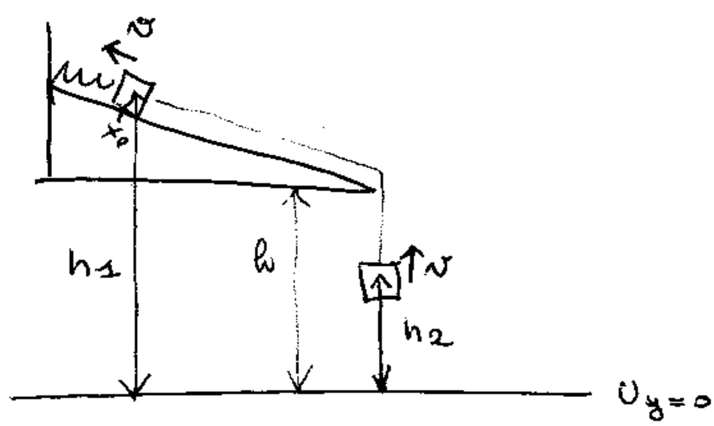
h = non noto

$K_i = 0$ (tutto è fermo)

$U_{gi} = 0 + m_1 g h$

$U_{molla\,i} = \frac{1}{2} K L^2$

E_f = energia meccanica dell'istante finale, in cui m_1 passa per x_0 con velocità v.
Anche m_2 possiede una velocità con lo stesso modulo v



$K_f = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2$

$h_1 = h + (L - x_0) \sin\alpha$

$h_2 = L - x_0$

$$U_{g_f} = m_1 g\left[h + (L - x_0)\sin\alpha\right] + m_2 g (L - x_0)$$

$$U_{molla\,f} = \frac{1}{2} K x_0^2$$

Quindi $\quad E_i = E_f$

$$\cancel{m_1 g h} + \frac{1}{2} K L^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 + \cancel{m_1 g h} + m_1 g (L - x_0)\sin\alpha +$$
$$+ m_2 g (L - x_0) + \frac{1}{2} K x_0^2$$

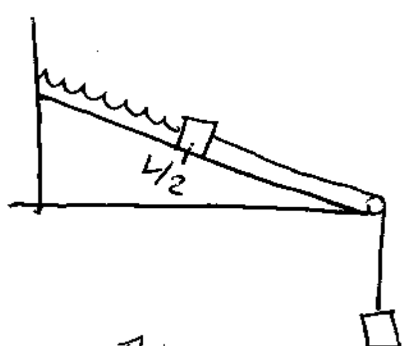
$$\frac{1}{2} K L^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 + (L - x_0)(m_2 + m_1 \sin\alpha)\cdot g + \frac{1}{2} K x_0^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{K(L^2 - x_0^2)}{m_1 + m_2} - \frac{2g(L - x_0)(m_2 + m_1 \sin\alpha)}{m_1 + m_2}}$$

$$v = \sqrt{\frac{5(100 - 11{,}8)}{2{,}5} - \frac{2 \cdot 9{,}8(10 - 3{,}4)(1 + 1{,}5 \cdot \sin(30°))}{2{,}5}}\ m/s$$

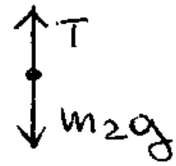
$$v = \sqrt{176{,}4 - 90{,}6}\ m/s = 9{,}3\ m/s$$

3) PIANO SCABRO



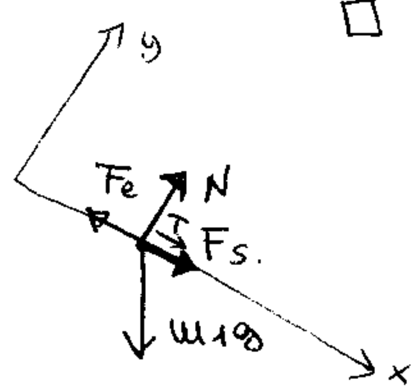
All'equilibrio: Diagramma delle forze

m_2



$$\Rightarrow T = m_2 g$$

m_1



La forza di attrito statico è diretta nel verso positivo dell'asse x.

Infatti in assenza di attrito m_1, lasciato libero di muoversi a partire dalla posizione $L/2$, si muoverebbe verso x_0 che è più in alto sul piano inclinato, ossia avrebbe una velocità diretta nel verso <u>negativo</u> dell'asse x.

(y) $$N - m_1 g \cos\alpha = 0$$

(x) $$m_1 g \sin\alpha - \underbrace{K L/2}_{F_e} + T + F_s = 0$$

$$\Rightarrow \quad m_1 g \sin\alpha - K\frac{L}{2} + m_2 g + F_s = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_s = K\frac{L}{2} - (m_2 + m_1 \sin\alpha) g$$

$$F_s = 5 \cdot \frac{10}{2} - (1 + 1{,}5 \cdot \sin(30)^\circ)\ 9{,}8 \quad \cdot N$$

$$F_s = 7{,}9\,N$$

Osservo che $\quad N = m_1 g \cos\alpha = 12{,}7\ N$

e che quindi $\quad F_s \leq \mu_s N \leq N \quad$ ok.

poiché $\mu_s \leq 1$

4) Osservo che alla base del piano inclinato la forza di attrito statico necessaria per tenere fermo il blocchetto m_1 sarebbe

$$F_s = KL - (m_2 + m_1 \sin\alpha) \cdot g$$

$F_s = 37{,}7\ N$ che è $\qquad F_s > N$

quindi effettivamente si tratta di una posizione in cui l'attrito statico non può mantenere fermo il blocchetto.

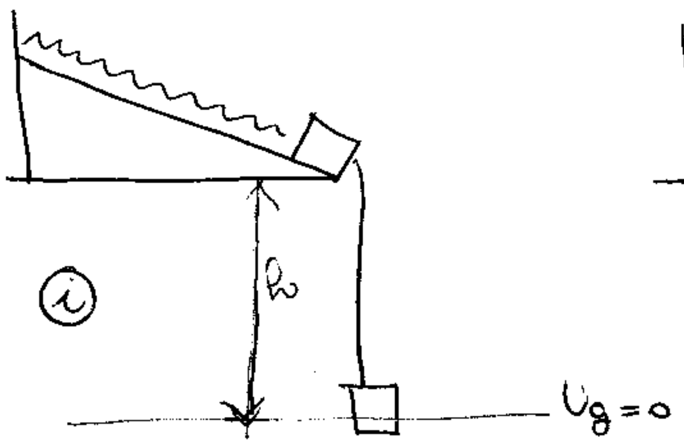
Applico il teorema dell'energia cinetica (delle forze vive)

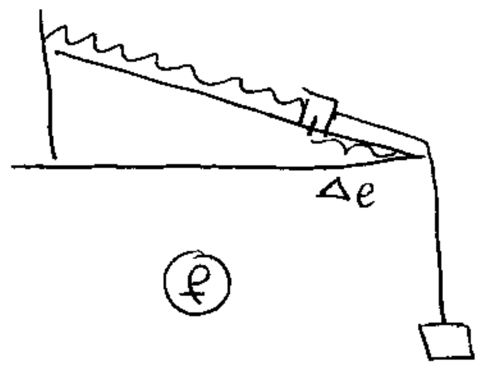
$$\Delta K = \sum L_i$$

$$\Delta K = K_f - K_i$$

$K_f = 0$ perché il blocchetto m_1 è fermo

$K_i = 0$ " " " "





$$\sum_i L_i = \underbrace{L_g + L_m}_{\text{lavori della forza peso e della forza elastica}} + L_K$$

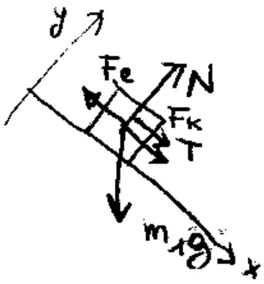
L_K → lavoro della forza di attrito dinamico

$L_g = -\Delta U_g$
$L_m = -\Delta U_m$

$$\Rightarrow \quad \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_m = L_K$$

Calcolo di L_K:

$$L_K = -F_K \cdot \Delta l$$



$N - m_1 g \cos\alpha = 0$ (il moto si svolge lungo x)

$$\Rightarrow N = m_1 g \cos\alpha$$

$$\Rightarrow F_K = \mu_K m_1 g \cos\alpha$$

$$L_K = -\mu_K m_1 g \cos\alpha \, \Delta l$$

$$\Delta U_g = U_{gf} - U_{gi}$$

$$U_{gi} = m_1 g h + 0 = m_1 g h$$

$$U_{gf} = m_1 g (h + \Delta l \sin\alpha) + m_2 g \Delta l$$

$$\Rightarrow \Delta U_g = m_1 g(\cancel{h} + \Delta l \sin\alpha) + m_2 g \Delta l - \cancel{m_1 g h}$$

$$\Delta U_g = m_1 g \Delta l \sin\alpha + m_2 g \Delta l$$

$$\Delta U_m = U_{mf} - U_{mi}$$

$$U_{mi} = \frac{1}{2} K L^2$$

$$U_{mf} = \frac{1}{2} K (L - \Delta l)^2$$

$$\Rightarrow \Delta U_m = \frac{1}{2} K (L - \Delta l)^2 - \frac{1}{2} K L^2$$

$$\Delta U_m = \cancel{\frac{1}{2} K L^2} - K L \Delta l + \frac{1}{2} K (\Delta l)^2 - \cancel{\frac{1}{2} K L^2}$$

$$\Delta U_m = \frac{1}{2} K (\Delta l)^2 - K L \Delta l$$

Quindi $\Delta K + \Delta U_g + \Delta U_m = L_k$

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - 0 = 0$$

$$\boxed{0 + m_1 g \Delta l \sin\alpha + m_2 g \Delta l + \frac{1}{2} K (\Delta l)^2 - K L \Delta l = -\mu_k m_1 g \cos\alpha \, \Delta l}$$

divido per Δl

$$m_1 g \sin\alpha + m_2 g + \frac{1}{2} K \Delta l - K L = -\mu_k m_1 g \cos\alpha$$

$$\mu_k = \frac{K L - \frac{1}{2} K \Delta l}{m_1 g \cos\alpha} - \frac{m_1 \sin\alpha + m_2}{m_1 \cos\alpha}$$

$$\mu_k = 2{,}04 - 1{,}34 = 0{,}70$$

Nota che dalla domanda 3) si era ottenuto che $F_s = 7{,}9N$

$$F_s \leq \mu_s \cdot N \qquad \text{con} \quad N = 12{,}7N$$

ovvero $\mu_s \geq \frac{F_s}{N} \Rightarrow \mu_s \geq 0{,}62$

avendo trovato $\mu_k = 0{,}70$, poichè deve valere $\mu_s \geq \mu_k$ generalmente

$$\Rightarrow \quad \boxed{0{,}70 \leq \mu_s \leq 1}$$

per i valori permessi di μ_s