

ESERCIZIO 1 III^a verifica in itinere 29/5/08

1

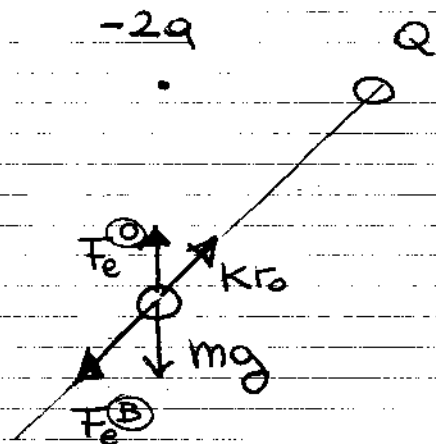
- 1) In condizioni di equilibrio la sfera q è ferma, quindi la risultante delle forze ad essa applicate $\vec{e} = 0$

Diagramma di corpo libero:

Kr_0 = forza elastica

$$F_e^{\odot} = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

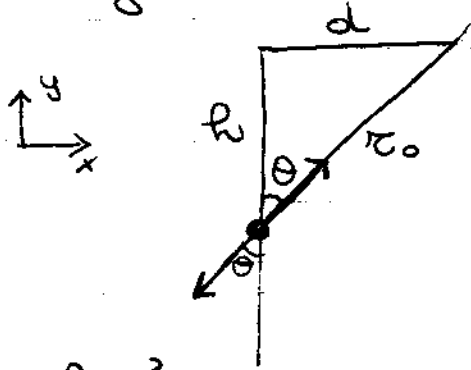
$$F_e^{\oplus} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_0^2}$$



$F_e^{\odot}$ = modulus della
forza di Coulomb
esercitata dalla
carica $-2q$ posta
nel punto O

$F_e^{\oplus}$ = " " "
carica Q posta in B

La forza elastica e F_e sono dirette entrambe ⁽²⁾
lungo la diagonale della molecola



$$\sum \vec{F}_{ext} = 0$$

$$x: k r_0 \sin \theta - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \sin \theta = 0$$

$$y: \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} - mg + k r_0 \cos \theta - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k r_0 - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} = 0 \\ \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} - mg + \left(k r_0 - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \right) \cos \theta = 0 \end{cases}$$

$\bar{e} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_0^3 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 k} & \Rightarrow r_0 = \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 k} \right)^{1/3} \\ \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} - mg = 0 & \Rightarrow R = \left(\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 mg} \right)^{1/2} \end{cases}$$

$$d = \sqrt{r_0^2 - R^2}$$

numericamente:

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= 0,103 \text{ m} \approx 10 \text{ cm} \\ R &= 0,0857 \text{ m} \approx 8,6 \text{ cm} \\ d &= 0,0571 \text{ m} \approx 5,7 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ cifre} \\ \text{significat.} \end{array}$$

$$2) V_B = \underbrace{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}}_{\text{contributo dovuto alla carica } Q \text{ sulla superficie sferica}} + \underbrace{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0}}_{\text{contributo della carica } q \text{ nel punto A}} + \underbrace{\frac{-2q}{4\pi\epsilon_0 d}}_{\text{contributo della carica } -2q \text{ nel punto O}}$$

(3)

Il secondo e il terzo termine corrispondono al potenziale generato dalle cariche $-q$ e $+q$ nel centro della sfera Q , ovvero nel punto B .

Analogamente:

$$V_A = \underbrace{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}}_{\text{contributo dovuto alla carica } q \text{ sulla sfera di raggio } a \text{ posta nel punto } A} + \underbrace{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0}}_{\text{contributo della carica } Q \text{ posta in } B} + \underbrace{\frac{-2q}{4\pi\epsilon_0 R}}_{\text{contributo della carica puntiforme } -2q \text{ posta in } O}$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{a} + \frac{q}{r_0} - \frac{2q}{d} \right)$$

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{a} + \frac{Q}{r_0} - \frac{2q}{R} \right)$$

numericamente:

$$V_B = \frac{1}{4\pi \cdot 8,85 \times 10^{-12}} \cdot \left(\frac{3 \times 10^{-6}}{0,002} + \frac{10^{-6}}{0,103} - \frac{2 \cdot 10^{-6}}{0,0857} \right) V$$

$$V_A = \frac{1}{4\pi \cdot 8,85 \times 10^{-12}} \cdot \left(\frac{10^{-6}}{0,002} + \frac{3 \times 10^{-6}}{0,103} - \frac{2 \cdot 10^{-6}}{0,0571} \right) V$$

$$V_B = 13,4 \times 10^6 V \approx 1,3 \times 10^7 V$$

$$V_A = 4,44 \times 10^6 V \approx 4,4 \times 10^6 V$$

4) Conservazione energia (meccanica + elettromagnetica)

$$E_i = E_f$$

① = istante iniziale in cui la carica q (avente massa m) è ferma nel punto C

② = istante finale in cui passa per il punto A con una velocità v

Pongo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale al livello del punto C. ④

$$U_g^{(1)} = 0 \quad U_g^{(2)} = mgh$$

lavoro: $K^{(1)} = 0$

$$K^{(2)} = \frac{1}{2} m v^2$$

En elettrostatica:

$U_e^{(2)}$
quando
q si trova
in A

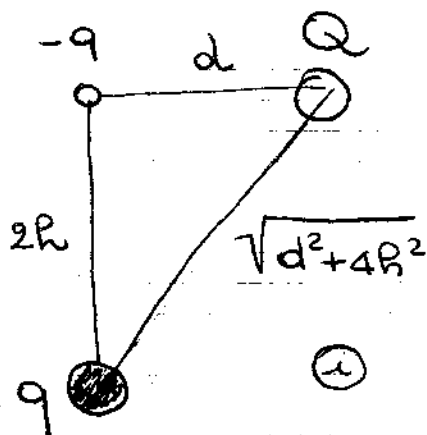
$$q \cdot \underbrace{V_A}_{\text{calcolato nel punto precedente}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{a} + \frac{Q}{r_0} - \frac{2q}{R} \right)$$

Calcolo del potenziale V_C della sfera avente carica q quando si trova nel punto C:

$$V_C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{d^2 + 4R^2}} + \frac{-2q}{4\pi\epsilon_0 (2R)}$$

$$\Rightarrow U_e^{(2)} = q V_C$$

$$U_e^{(2)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{a} + \frac{Q}{\sqrt{d^2 + 4R^2}} - \frac{q}{R} \right)$$



(5)

$$\underbrace{U_k^{\text{e}}}_{\text{energia}} = \frac{1}{2} k r_0^2 = \frac{1}{2} k (d^2 + R^2)$$

potenziale elastica finale (nel punto A)

$$U_k^{\text{i}} = \frac{1}{2} k (d^2 + 4R^2)$$

en. elastica iniziale (nel punto C)

Quindi

$$E_{\text{C}} = E_{\text{A}}$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{a} + \frac{Q}{\sqrt{d^2 + 4R^2}} - \frac{q}{R} \right) + \frac{1}{2} k (d^2 + 4R^2) =$$

$$= mgh + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{a} + \frac{Q}{r_0} - \frac{2q}{R} \right) + \frac{1}{2} k (d^2 + R^2)$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = -mgh + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[Q \left(\frac{1}{\sqrt{d^2 + 4R^2}} - \frac{1}{r_0} \right) - q \left(\frac{1}{R} - \frac{2}{R} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} k (-R^2 + 4R^2)$$

$$v^2 = -2gh + \frac{q}{2\pi\epsilon_0 m} \left[Q \left(\frac{1}{\sqrt{r_0^2 - R^2 + 4R^2}} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{q}{R} \right] + 3 \frac{kR^2}{m}$$

$$v = \sqrt{\frac{q}{2\pi\epsilon_0 m} \left[\frac{Q}{r_0} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3R^2}{r_0^2}}} - 1 \right) + \frac{q}{R} \right] - 2gh + \frac{3kR^2}{m}}$$

$$\Rightarrow v = 1,03 \text{ m/s} \approx 1,0 \text{ m/s}$$

⑥

5) La corrente termina di scorrere quando le due sfere hanno lo stesso potenziale. Le cariche sulle loro superfici si distribuiscono in modo che all'istante finale

$$V_B^f = V_A^f$$

potenziale della
sfera che
si trova in B

potenziale della sfera
che si trova in A

↓
possiede la carica
 Q_f all'istante finale

↓
possiede la
carica q_f
all'istante finale

$$V_B^f = \frac{Q_f}{a} - \frac{2q}{d} + \frac{q_f}{r_0}$$

$$V_A^f = \frac{q_f}{a} - \frac{2q}{R} + \frac{Q_f}{r_0}$$

Quindi:

$$\frac{Q_f}{a} - \frac{2q}{d} + \frac{q_f}{r_0} = \frac{q_f}{a} - \frac{2q}{R} + \frac{Q_f}{r_0}$$

$$Q_f \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_0} \right) = q_f \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_0} \right) + 2q \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{R} \right)$$

$$\Rightarrow Q_f = q_f + 2q \frac{ar_0(R-d)}{dR(r_0-a)}$$

Insomma la carica totale
si conserva, quindi:

$$Q_f + q_f = Q + q$$

Da cui:

$$Q_f = \frac{Q+q}{2} + q \frac{ar_0(R-d)}{dR(r_0-a)} = 2,01 \mu\text{C} \approx 2,0 \mu\text{C}$$

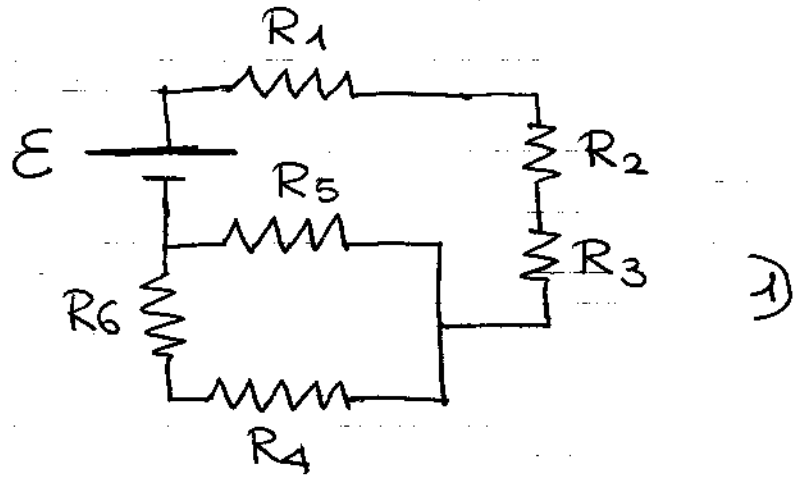
$$q_f = Q + q - Q_f \approx 4 \mu\text{C} - 2,01 \mu\text{C} \approx 1,99 \mu\text{C} \approx 2,0 \mu\text{C}$$

ESERCIZIO 2

7

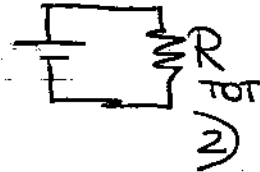
- 1) In regime stazionario la corrente che scorre nel circuito è costante $\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow$ le capacità si comportano come interruttori aperti che non permettono il passaggio di corrente

Circuito equivalente:
(in regime stazionario)



$$P = \frac{E^2}{R_{TOT}} \quad \text{fornita dal generatore}$$

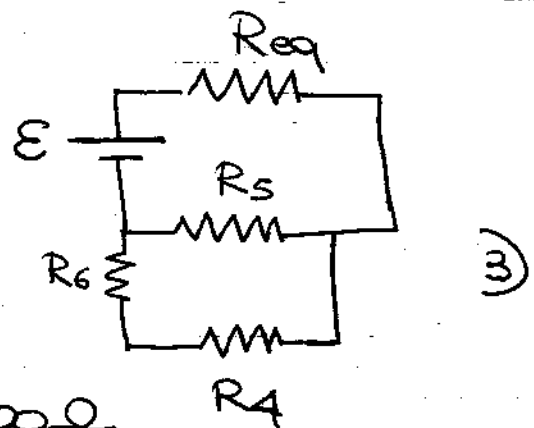
con R_{TOT} resistenza ai capi del generatore



Il circuito 1) è equivalente a:

$$\text{con } R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

poiché R_1 , R_2 e R_3 sono in serie



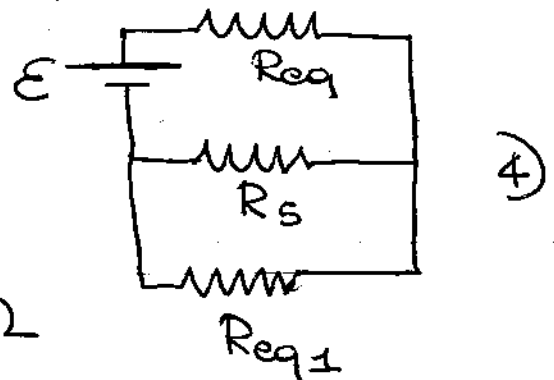
$$R_{eq} = 100\Omega + 200\Omega + 200\Omega = 500\Omega$$

Il circuito 3) è equivalente a:

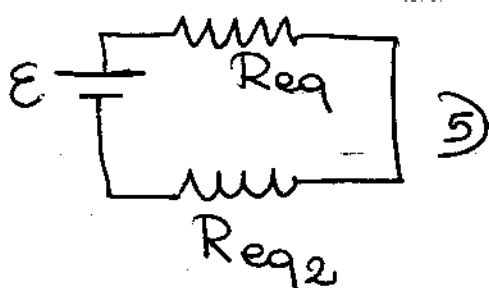
$$\text{con } R_{eq1} = R_4 + R_6$$

(sono in serie)

$$R_{eq1} = 200\Omega + 1000\Omega = 1,2\text{ k}\Omega$$



Il circuito 4) è equivalente a:



$$\text{con } \frac{1}{R_{eq2}} = \frac{1}{R_{eq1}} + \frac{1}{R_5}$$

poiché R_{eq1} e R_5 sono in parallelo

$$\frac{1}{R_{eq2}} = \frac{1}{1,2k\Omega} + \frac{1}{200\Omega} \Rightarrow R_{eq2} = 171\Omega \quad (8)$$

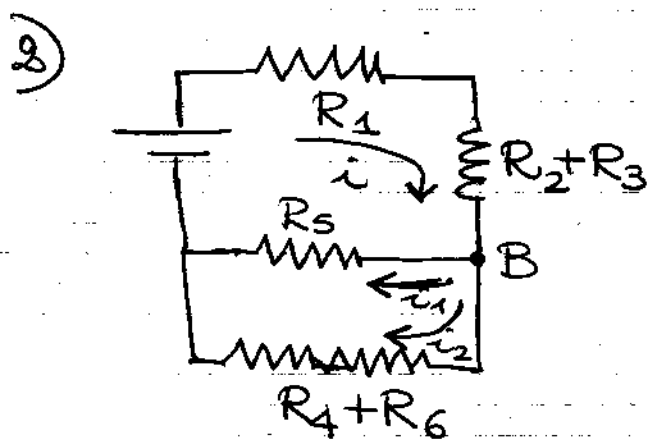
Il circuito 5) è equivalente al circuito 2) con

$$R_{TOT} = R_{eq} + R_{eq2} \quad (\text{sono in serie})$$

$$R_{TOT} = 500\Omega + 171\Omega = 671\Omega$$

Quindi la potenza fornita dal generatore

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R_{TOT}} = \frac{(250)^2}{671} \text{ W} = 93.1 \text{ W} \approx \boxed{93 \text{ W}}$$



in R_1 scorre la corrente i

Legge dei nodi (nodo B)

$$i = i_1 + i_2$$

in R_5 scorre la corrente i_1

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_{TOT}} = \frac{250}{671} \text{ A} = 373 \text{ mA}$$

Poiché R_5 e $(R_4 + R_6)$ sono in parallelo ha loro

$$R_5 i_1 = (R_4 + R_6) \cdot i_2 \quad \text{stessa caduta di tensione}$$

$$\Rightarrow i_2 = \frac{R_5}{R_4 + R_6} i_1 = \frac{200}{200 + 1000} i_1 = \frac{1}{6} i_1$$

Quindi

$$i = i_1 + \frac{1}{6} i_1 \Rightarrow i_1 = \frac{6}{7} i$$

$$i_1 = \frac{6}{7} \cdot 373 \text{ mA} = 320 \text{ mA}$$

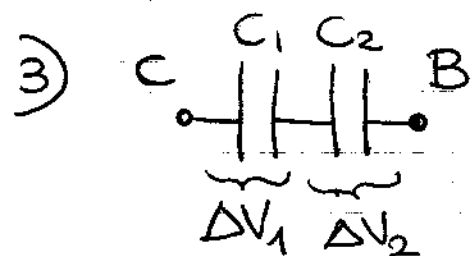
$$i_2 = i - i_1 = 53 \text{ mA}$$

La potenza dissipata da R_1 è: ⑨

$$P_1 = R_1 \cdot i^2 = 100 \cdot (373)^2 \times 10^{-6} \text{ W} = 13,9 \text{ W} \approx 14 \text{ W}$$

La potenza dissipata da R_5 è:

$$P_5 = R_5 \cdot (i_1)^2 = 200 \cdot (320)^2 \times 10^{-6} \text{ W} = 20,5 \text{ W} \approx 21 \text{ W}$$



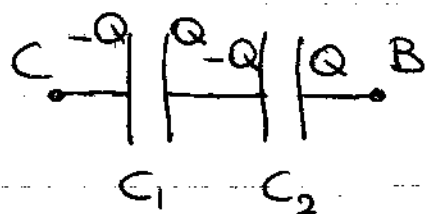
ΔV = d.d.p. tra i punti B e C

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

ΔV è la caduta di tensione sulla resistenza R_4 , in cui scorre la corrente i_2

$$\Rightarrow \Delta V = R_4 \cdot i_2 = 200 \cdot 0,053 \text{ V} = 10,6 \text{ V}$$

Ma, poiché le due capacità sono in serie:



$$\rightarrow C_1 = \frac{Q}{\Delta V_1} \quad C_2 = \frac{Q}{\Delta V_2}$$

$$\rightarrow C_1 \Delta V_1 = C_2 \Delta V_2$$

$$\Delta V_2 = \frac{C_1}{C_2} \Delta V_1$$

Quindi

$$\Delta V = \Delta V_1 + \frac{C_1}{C_2} \Delta V_1$$

$$\Rightarrow \Delta V_1 = \frac{\Delta V}{\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)} = \frac{10,6}{\left(1 + \frac{1 \times 10^{-6}}{1,5 \times 10^{-6}}\right)} \text{ V} = 6,36 \text{ V} \approx 6,4 \text{ V}$$

e quindi $\Delta V_2 = \Delta V - \Delta V_1 = (10,6 - 6,36) \text{ V} \approx 4,2 \text{ V}$

4) Energia elettrostatica immagazzinata in C_1

$$U_1 = \frac{1}{2} C_1 (\Delta V_1)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \times 10^{-6} \cdot (6,36)^2 \text{ J}$$

$$U_1 = 20,2 \times 10^{-6} \text{ J} \approx 20 \mu\text{J}$$

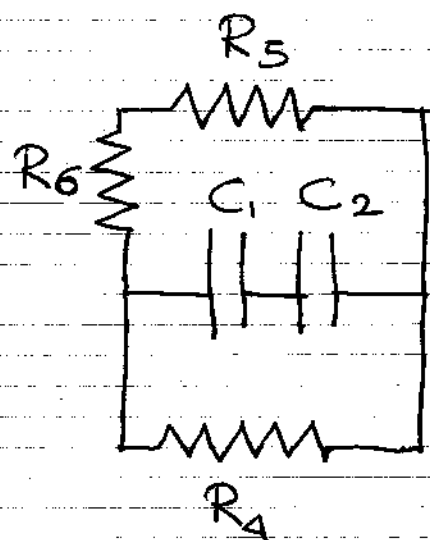
in C_2

10

$$U_2 = \frac{1}{2} C_2 \cdot (\Delta V_2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \times 10^{-6} \cdot (4,24)^2 \text{ J}$$

$$U_2 = 13,5 \times 10^{-6} \text{ J} \approx 14 \mu\text{J}$$

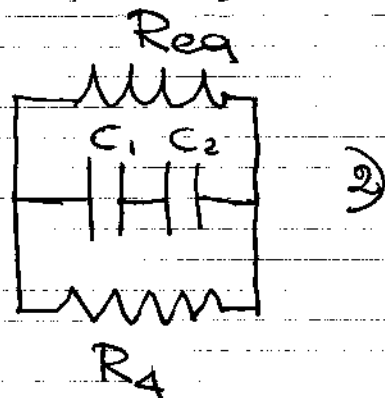
5) Quando il circuito viene interrotto nel punto A diventa equivalente a:



(Poiché nel ramo di circuiti aperto non scorre corrente è come se non esistesse)

1)

Il circuito 1) è equivalente a:



$$\text{con } R_{eq} = R_6 + R_5$$

$$R_{eq} = 1,0 \text{ k}\Omega + 200 \Omega = 1,2 \text{ k}\Omega$$

2)

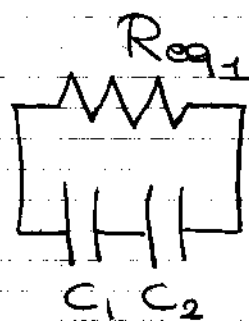
Il circuito 2) è equivalente a:

con R_{eq1} dato dal parallelismo di R_{eq} e R_4 , ovvero

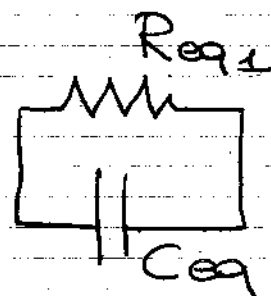
$$\frac{1}{R_{eq1}} = \frac{1}{R_{eq}} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{1200 \Omega} + \frac{1}{200 \Omega}$$

$$\rightarrow R_{eq1} = 171 \Omega$$

Il circuito 3) è equivalente a:



3)



4)

con $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ (le due capacità sono in serie) (11)

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{10^{-6} F} + \frac{1}{1,5 \times 10^{-6} F} \rightarrow C_{eq} = 0,6 \mu F$$

La costante tempo con cui si scarica il circuito è)

$$\tau = R_{eq1} \cdot C_{eq}$$

$$\tau = (171 \cdot 0,6 \times 10^{-6}) s = 103 \times 10^{-6} s \approx 100 \mu s$$