

ESERCIZIO 1

①

- 1) Nell'urto tra A e B si conserva la quantità di moto.

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

$$\vec{P}_i = m \vec{v}_0 = m v_0 \hat{x}$$

$$\vec{P}_f = (m+M) \vec{v}_1 = (m+M) v_1 \hat{x}$$

Componente x $\rightarrow$ $m v_0 = (m+M) v_1$

$$v_1 = \frac{m}{m+M} v_0$$

$$\vec{v}_1 = \frac{m}{m+M} \vec{v}_0$$

$$v_1 = \frac{1}{1+7} \cdot 15 \text{ m/s} = 1,875 \text{ m/s} \approx \boxed{1,9 \text{ m/s}}$$

con 2 cifre significative

- 2) Un istante dopo l'urto le posizioni dei 3 corpi coincidono con le posizioni che avevano in istante prima dell'urto: A e B coincidono in $x=0$ e C in $x=L_0$.

$$x_{CH} = \frac{m \cdot \phi + M \cdot \phi + M \cdot L_0}{m+2M} = \boxed{\frac{M}{m+2M} L_0}$$

$$x_{CH} = \frac{7}{1+14} \cdot 1,2 \text{ m} = \boxed{0,56 \text{ m}}$$

La velocità del CM è data da: $v_{CH} = \frac{\sum m_i v_i}{\sum m_i}$

Dopo l'urto A e B hanno velocità $\vec{v}_1$ mentre C ha velocità zero

$$v_{CH} = \frac{m v_1 + M v_1 + M \cdot 0}{m+2M} = \frac{m+M}{m+2M} v_1$$

$$\vec{V}_{CH} = \frac{m+M}{m+2M} \vec{V}_1 = \frac{\cancel{(m+M)}}{m+2M} \cdot \frac{m}{\cancel{(m+M)}} \vec{V}_0 \quad (2)$$

$$\vec{V}_{CH} = \frac{m}{m+2M} \vec{V}_0$$

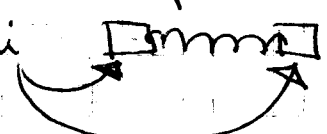
$$V_{CH} = \frac{1}{1+14} \cdot 15 \text{ m/s}$$

$$V_{CH} = 1,0 \text{ m/s}$$

Da notare che poiché se si considera il sistema (A+B+molla) le uniche forze esterne sono la forza peso e la forza normale del piano (entrambe lungo $\hat{y}$), la componente x della quantità di moto si conserva.

Poiché $\vec{P}_i = m V_0 \hat{x}$ è solo nella direzione $\hat{x}$ si conserva il vettore quantità di moto del sistema.

$\Rightarrow$ si conserva la velocità del CM.

3) Nell'istante di massima compressione della molla i suoi due estremi  devono avere la stessa velocità.

Sia $\vec{v}$ tale velocità.

Conservazione della quantità di moto:

$$(m+2M) V_{CH} = \underbrace{(m+M)v}_{\text{q. di moto dell'estremo di sin. della molla}} + \underbrace{Mv}_{\text{... dell'estremo di destra della molla}}$$

q. di moto dell'estremo di sin. della molla ... dell'estremo di destra della molla

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{V}_{CH}$$

cioè nell'istante di max compressione della molla tutti e 3 i corpi hanno la stessa velocità pari a V_{CH} calcolata nel punto 2).

Conservazione dell'energia meccanica

$$E_i = E_f$$

E_i = calcolata un istante DOPO l'urto

E_f = " nell'istante di max compressione

$$E_i = \frac{1}{2} (m+M) v_1^2$$

(3)

$$E_f = \frac{1}{2} (m+2M) v_{cm}^2 + \frac{1}{2} k (\Delta x)^2$$

$$\frac{1}{2} (m+M) v_1^2 = \frac{1}{2} (m+2M) v_{cm}^2 + \frac{1}{2} k (\Delta x)^2$$

$$k (\Delta x)^2 = (\cancel{m+M}) \frac{m^2}{(\cancel{m+M})^2} v_0^2 - (\cancel{m+2M}) \frac{m^2}{(\cancel{m+2M})^2} v_0^2$$

$$k (\Delta x)^2 = m^2 v_0^2 \left(\frac{1}{m+M} - \frac{1}{m+2M} \right)$$

$$(\Delta x)^2 = \frac{m^2 v_0^2}{k} \frac{\cancel{m+2M} - \cancel{m+M}}{(m+M)(m+2M)}$$

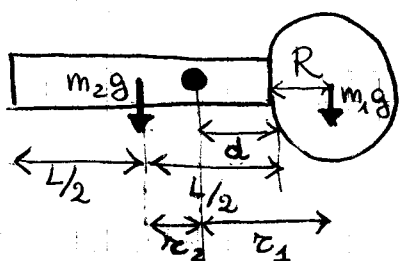
$$\Delta x = \sqrt{\frac{M}{(m+M)(m+2M)k}} m v_0$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{7}{8 \cdot 15 \cdot 50}} \cdot 1 \cdot 15 \text{ m} = 0,648 \text{ m} \approx 0,65 \text{ m}$$

con 2 cifre significative

ESERCIZIO 2

1)



Il sistema è in equilibrio $\Rightarrow \sum \tau = 0$
 Somma dei momenti delle forze esterne = 0

Considero i τ rispetto al perno

$$+ m_2 g (\tau_2) - m_1 g (\tau_1) = 0$$

$$m_2 g (L/2 - d) - m_1 g (d + R) = 0$$

$$m_2 L/2 - m_1 R = m_1 d + m_2 d$$

$$d = \frac{m_2 L/2 - m_1 R}{m_1 + m_2}$$

$$d = \frac{3 \cdot \frac{10}{2} - 4 \cdot 1}{3+4} \text{ m} = \frac{11}{7} \text{ m} = 1,571 \text{ m}$$

$$\boxed{d \approx 1,6 \text{ m}} \text{ con due cifre significative}$$

$$2) \sum \tau = I \alpha$$

$$m_2 g r_2 = I \alpha$$

$$\text{con } r_2 = L/2 - d$$

$$I = I_{CM} + m_2 r_2^2 = \frac{1}{12} m_2 L^2 + m_2 (L/2 - d)^2$$

$$\alpha = \frac{m_2 g (L/2 - d)}{\frac{1}{12} m_2 L^2 + m_2 (L/2 - d)^2} = \frac{(L/2 - d)}{\frac{L^2}{12} + (L/2 - d)^2} g$$

$$\text{noto che } L/2 - d = \frac{L}{2} - \frac{m_2 L/2 - m_1 R}{m_1 + m_2} = \frac{(L + 2R) m_1}{2(m_1 + m_2)}$$

numericamente

$$\alpha = \frac{5 - 1,571}{\frac{100}{12} + (5 - 1,571)^2} \cdot 9,81 \text{ rad/s}^2 = 1,67 \text{ rad/s}^2$$

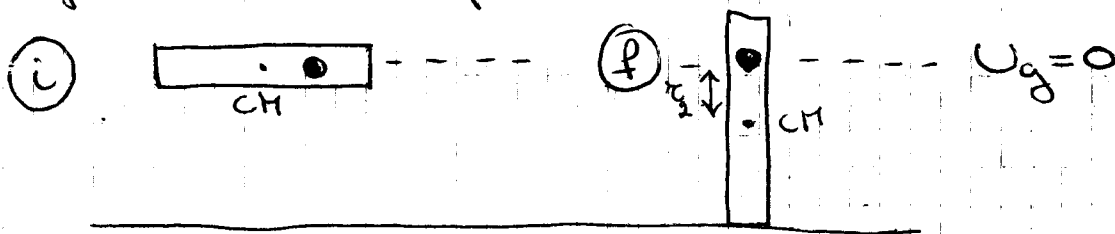
$$\boxed{\alpha \approx 1,7 \text{ rad/s}^2} \text{ con due cifre significative}$$

3) Conservazione dell'energia meccanica

$$E_i = E_f$$

E_i = eu. mec. all'istante $t=0$

E_f = " " quando la sbarretta è verticale



Punto lo zero dell'energia potenziale gravitazionale al livello del perno.

(5)

$$E_i = K_i + U_i = 0 = \phi$$

perché parte da fermo

$$E_f = \frac{1}{2} I \omega^2 - m_2 g r_2$$

con $r_2 = L/2 - d$

$$I = \frac{1}{12} m_2 L^2 + m_2 r_2^2$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{1}{2} I \omega^2 - m_2 g r_2$$

$$\omega^2 = \frac{2 m_2 g r_2}{I}$$

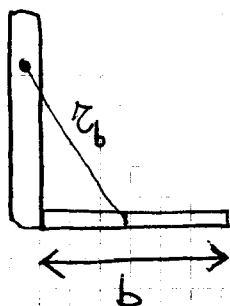
$$\omega^2 = \frac{2 m_2 g (L/2 - d)}{\frac{1}{12} m_2 L^2 + m_2 (L/2 - d)^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g(L/2 - d)}{\frac{L^2}{12} + (L/2 - d)^2}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 (5 - 1,571)}{\frac{100}{12} + (5 - 1,571)^2}} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega = 1,83 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 1,8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

4)



Si conserva L_z nell'urto

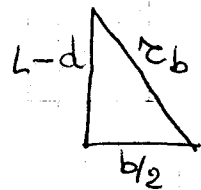
$$L_z \text{ iniziale} = I \omega$$

$$L_z \text{ finale} = I' \omega'$$

$$\text{con } I' = I + I_b$$

$$\text{con } I_b = \frac{1}{12} m_b b^2 + m_b (r_b)^2$$

equ $r_b = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + (L-d)^2}$



⑥

Quindi: $I\omega = I'\omega'$

$$\omega' = \frac{I}{I'} \omega$$

$$\omega' = \left[\frac{1}{12} m_2 L^2 + m_2 \left(\frac{L}{2} - d \right)^2 \right] \cdot \omega$$

$$\frac{1}{12} m_2 L^2 + m_2 \left(\frac{L}{2} - d \right)^2 + \frac{1}{12} m_b b^2 + m_b \left[\left(\frac{b}{2} \right)^2 + (L-d)^2 \right]$$

$$\omega' = \frac{m_2 \left[\frac{L^2}{12} + \left(\frac{L}{2} - d \right)^2 \right] \omega}{m_2 \left[\frac{L^2}{12} + \left(\frac{L}{2} - d \right)^2 \right] + m_b \left[\frac{b^2}{3} + (L-d)^2 \right]}$$

$$\omega' = \frac{3 \left(\frac{100}{12} + (5 - 1,571)^2 \right) \cdot 1,83}{3 \left(\frac{100}{12} + (5 - 1,571)^2 \right) + 3,5 \left(\frac{16}{3} + (10 - 1,571)^2 \right)} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega' = \frac{110,30}{327,61} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 0,3367 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx \boxed{0,34 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}$$

5)

$$E_{\text{diss}} = |\Delta E| = |E_{\text{fin}} - E_{\text{in}}| = |K_{\text{fin}} - K_{\text{in}}|$$

con $K_{\text{fin}} = \frac{1}{2} I' (\omega')^2$

$$K_{\text{in}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$E_{\text{diss}} = K_{\text{in}} - K_{\text{fin}} = \frac{1}{2} (I \omega^2 - I' \omega'^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(I \omega^2 - \cancel{I'} \cdot \frac{I^2}{(I')^2} \omega^2 \right) = \boxed{\frac{1}{2} I \omega^2 \left[1 - \frac{I}{I'} \right]}$$

$$\text{car } I = \frac{1}{12} m_2 L^2 + m_2 \left(L/2 - d \right)^2 = 60,274 \text{ Kg m}^2 \quad (7)$$

$$I' = I + \frac{1}{12} m_b b^2 + m_b \left[\left(b/2 \right)^2 + (L-d)^2 \right]$$
$$= (60,274 + 267,335) \text{ Kg m}^2 = 327,609 \text{ Kg m}^2$$

$$\Rightarrow E_{\text{diss}} = \frac{1}{2} \cdot 60,274 \cdot (1,83)^2 \left[1 - \frac{60,274}{327,609} \right] \text{ J}$$

$$E_{\text{diss}} = 82,36 \text{ J} \approx \boxed{82 \text{ J}} \quad \text{car 2 cifres signif.}$$