

ESERCIZIO I

①

1) Sia $t=0$ l'istante di sparso del proiettile.
La posizione del proiettile è data da:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha t \\ y(t) = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

La velocità del proiettile è:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos \alpha \\ v_y(t) = v_0 \sin \alpha - gt \end{cases}$$

Nell'istante t_0 di massima
altezza $v_y(t_0) = 0$

$$\Rightarrow \vec{v}(t_0) = v_x \hat{x} = v_0 \cos \alpha \hat{x}$$

Quindi la velocità del proiettile in istante
prima dell'urto è

$$\vec{v}_1 = v_1 \hat{x}$$

e

$$v_1 = v_0 \cos \alpha$$

$$v_1 = 700 \cdot \cos 80^\circ \text{ m/s} = 12,16 \text{ m/s}$$

$$v_1 = 12 \text{ m/s} \quad (2 \text{ cifre significative})$$

2) Durante l'urto si conserva la quantità di
moto $\vec{P}$ del sistema (proiettile + bersaglio)
poiché non sono presenti forze esterne impulsive.

$\vec{P}_i$ = quantità di moto un istante prima dell'urto

$\vec{P}_f$ = " " " " " " " " dopo l'urto

$$\vec{P}_i = m \vec{v}_1 + M \vec{v}_2$$

$$\vec{P}_f = (m + M) \vec{v}$$

poiché dopo l'urto i due
corpi rimangono attaccati
(urto perfettamente anelastico)

$$m \vec{v}_1 + M \vec{v}_2 = (m+M) \vec{V} \quad (2)$$

Nelle componenti:

$$x) \quad m v_1 + M v_2 \cos \theta_2 = (m+M) V_x$$

$$y) \quad M v_2 \sin \theta_2 = (m+M) V_y$$

$$\Rightarrow \boxed{V_y = \frac{M v_2 \sin \theta_2}{m+M}} \quad V_y = 7,09 \text{ m/s} \approx 7,1 \text{ m/s}$$

$$\boxed{V_x = \frac{m v_1 + M v_2 \cos \theta_2}{m+M}} \quad V_x = 12,95 \text{ m/s} \approx 13 \text{ m/s}$$

$$\boxed{\vec{V} = V_x \hat{x} + V_y \hat{y}}$$

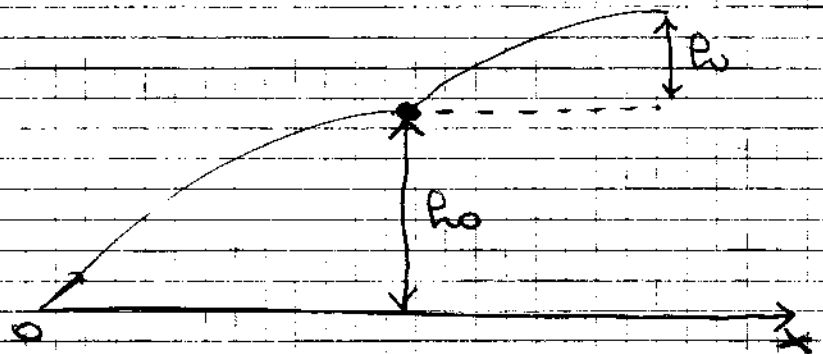
Il vettore $\vec{V}$ ha modulo $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 14,8 \text{ m/s}$
e forma un angolo θ
con l'asse x dato da:

$$\tan \theta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{7,09}{12,95} \Rightarrow \theta = 28,7^\circ \approx 29^\circ$$

3) La max quota raggiunta dopo l'urto è data da:

$$h_{\max} = h_0 + h$$

h_0 = quota a cui avviene lo scontro



h = max quota raggiunta dopo lo scontro misurata a partire dalla quota dello scontro

$$h_0 = y(t_0)$$

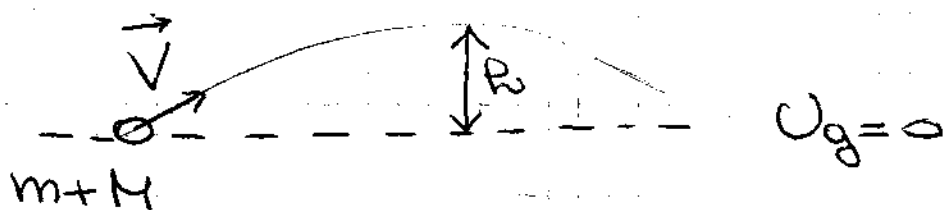
③_a

$$\text{con } t_0 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$\Rightarrow y(t_0) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$\Rightarrow h_0 = 242,21$$

Considero ora il moto del sistema (proiettile + bersaglio) da un istante dopo e' nato all'istante in cui raggiunge la quota max.



$$E_{(i)} = \frac{1}{2} (m+M) V^2$$

$$E_{(f)} = \frac{1}{2} (m+M) V_f^2 + (m+M) g h_0$$

$$E_{(i)} = E_{(f)} \quad \text{conservazione dell'energia meccanica.}$$

Inoltre $V_f^2 = V_x^2$ poiché è nel punto di max quota

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (m+M) (\cancel{V_x^2} + V_y^2) = \frac{1}{2} (\cancel{m+M}) \cancel{V_x^2} + (m+M) g h_0$$

$$h_0 = \frac{V_y^2}{2g} \quad \text{ovvero} \quad h_0 = \frac{(7,09)^2}{2 \cdot 9,81} \text{ m}$$

$$h_0 = 2,56 \text{ m}$$

$$\text{Quindi } h_{\text{max}} = (242,21 + 2,56) \text{ m} = 244,77 \text{ m}$$

$$h_{\text{max}} = 240 \text{ m} \quad (2 \text{ cifre significative})$$

③

4) L'energia dissipata nell'urto è:

$$E_{\text{diss}} = |\Delta E| \quad \text{con} \quad \Delta E = E_F - E_i$$

$$E_{\text{F}} = \frac{1}{2} (m + M) V^2$$

$$E_{\text{i}} = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} M v_2^2$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} (m + M) V^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} M v_2^2$$

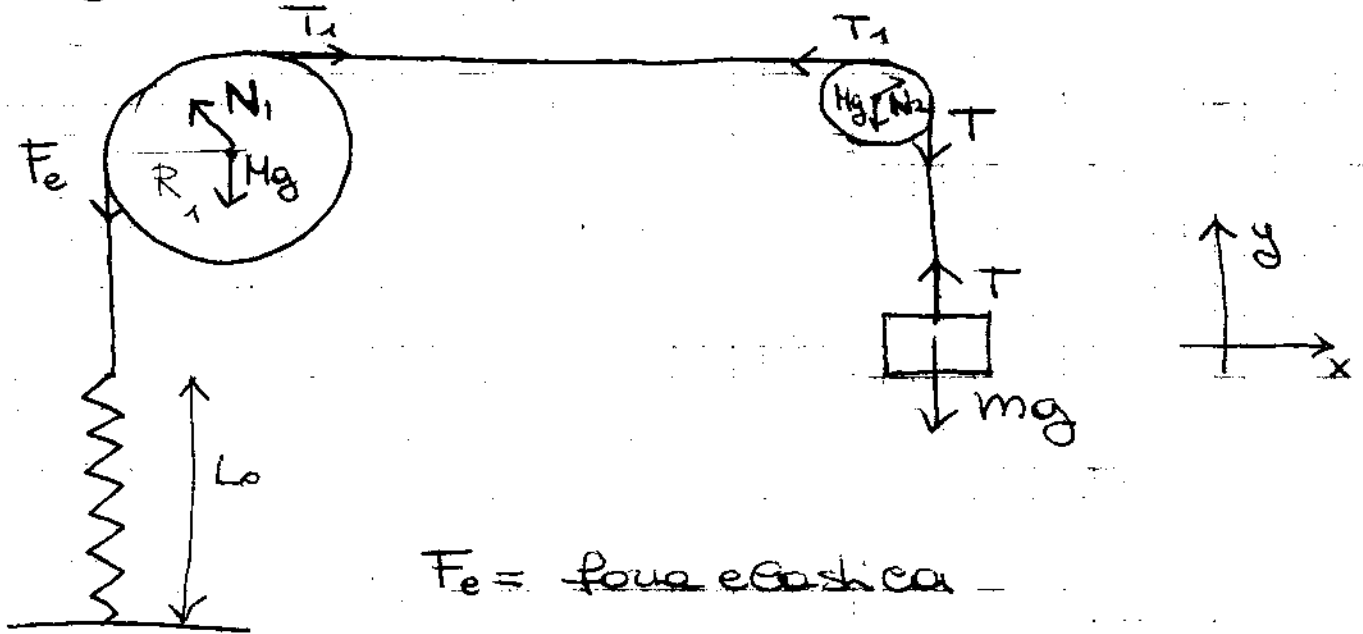
$$\Delta E = \left(\frac{1}{2} \cdot 0,37 \cdot (14,8)^2 - \frac{1}{2} \cdot 0,02 \cdot (12,16)^2 + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cdot 0,35 \cdot (15)^2 \right) \text{ J} = -0,331 \text{ J}$$

$$\Rightarrow E_{\text{diss}} = |\Delta E| = \boxed{0,33 \text{ J}} \quad (2 \text{ cifre signif.})$$

ESERCIZIO 2

④

1) Diagramma di corpo libero:



$F_e = \text{force elastica}$

$$F_e = K L_0$$

$\vec{N}_1$ e $\vec{N}_2$ sono le forze esercitate dal perno sui dischi

③ è in equilibrio:

$$T - mg = 0$$

corruola R_2 non gira: $\sum \tau_z = 0$

$$\Rightarrow T_1 R_2 - T R_2 = 0$$

corruola R_1 non gira.

$$F_e R_1 - T_1 R_1 = 0$$

nota che i momenti prodotti dalle forze Mg e dalle forze N_1 e N_2 sono uguali a zero (hanno braccio nullo)

Combinando le 3 equazioni evidenti:

$$T = mg$$

$$T_1 = T$$

$$F_e = T_1 \Rightarrow F_e = mg$$

$$K L_0 = mg$$

$$L_0 = \frac{mg}{K}$$

$$L_0 = 0,392 \text{ m} \approx \boxed{39 \text{ cm}} \text{ (2 cifre significative)} \quad (5)$$

$$(2) \quad \begin{cases} T - mg = ma \\ T_1 R_2 - T R_2 = I_2 \alpha_2 \\ F_e R_1 - T_1 R_1 = I_1 \alpha_1 \end{cases} \quad \boxed{\vec{a} = a \hat{y}}$$

$$\text{con } F_e = K(L_0 + R)$$

$$\boxed{\vec{\alpha}_1 = \alpha_1 \hat{z}}$$

$$I_1 = \frac{1}{2} M R_1^2$$

$$\alpha_1 = \frac{a}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} M R_2^2$$

$$\alpha_2 = \frac{a}{R_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T - mg = ma \\ T_1 - T = \frac{1}{2} M R_2^2 \frac{a}{R_2^2} \\ F_e - T_1 = \frac{1}{2} M R_1^2 \frac{a}{R_1^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T - mg = ma \\ T_1 - T = \frac{1}{2} M a \\ K(L_0 + R) - T_1 = \frac{1}{2} M a \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_1 - mg = (m + \frac{1}{2} M) a$$

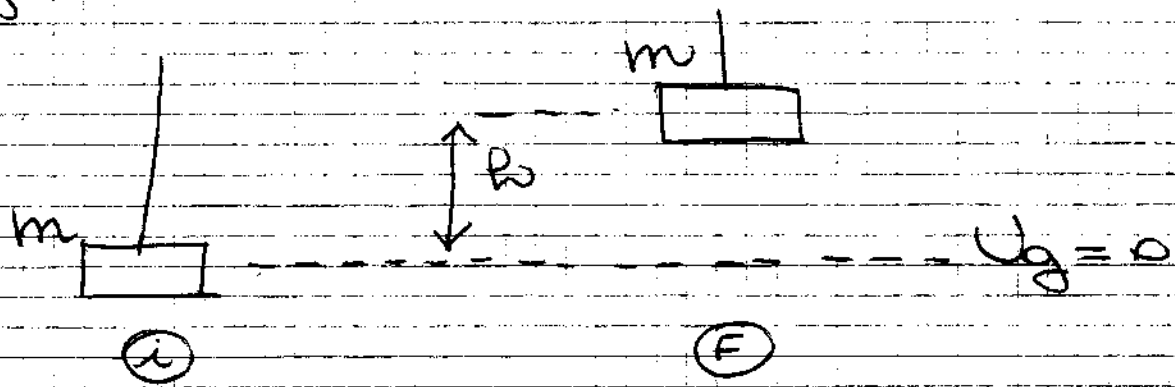
$$K(L_0 + R) - mg = (m + \frac{1}{2} M + \frac{1}{2} M) a$$

$$\Rightarrow a = \frac{K(L_0 + R) - mg}{m + M} = \frac{K \left(\frac{mg}{K} + R \right) - mg}{m + M}$$

$$\boxed{a = \frac{KR}{m + M}}$$

$$a = 1,79 \text{ m/s}^2 \approx \boxed{1,8 \text{ m/s}^2}$$

3) Non ci sono forze dissipative: conservazione dell'energia meccanica



$$E_{(i)} = K_{(i)} + U_{g(i)} + U_{ee(i)}$$

$K_{(i)} = 0$ il sistema parte con velocità nulla

$U_{g(i)} = 0$ per la scelta della quota di riferimento

$$U_{ee(i)} = \frac{1}{2} K (L_0 + L)^2 \quad \text{poiché } L_0 + L \text{ è la lunghezza (quindi l'allungamento) della molla all'istante (i)}$$

$$\Rightarrow E_{(i)} = \frac{1}{2} K (L_0 + L)^2$$

$$E_{(F)} = K_{(F)} + U_{g(F)} + U_{ee(F)}$$

$$K_{(F)} = \frac{1}{2} m \dot{\sigma}^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2$$

con $\dot{\sigma}^2 = \omega_1^2 R_1^2$ e anche

$$\dot{\sigma}^2 = \omega_2^2 R_2^2$$

$$\Rightarrow K_{(F)} = \frac{1}{2} m \dot{\sigma}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M \cancel{R_1^2} \cdot \frac{\dot{\sigma}^2}{\cancel{R_1^2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M \cancel{R_2^2} \cdot \frac{\dot{\sigma}^2}{\cancel{R_2^2}}$$

$$K_{(F)} = \frac{1}{2} m \dot{\sigma}^2 + \frac{1}{4} M \dot{\sigma}^2 + \frac{1}{4} M \dot{\sigma}^2 =$$

$$K_{(F)} = \frac{1}{2} (m + M) \dot{\sigma}^2$$

$$U_{g\odot} = mgR_0$$

$$U_{el\oplus} = \frac{1}{2} K (L_0)^2$$

$$\Rightarrow E_{\odot} = E_{\oplus}$$

$$\frac{1}{2} K (L_0 + R)^2 = \frac{1}{2} (m + M) v^2 + mgR_0 + \frac{1}{2} K L_0^2$$

$$\frac{1}{2} K R^2 + K L_0 R = \frac{1}{2} (m + M) v^2 + mgR_0$$

$$v^2 = \frac{2}{m + M} \left(\frac{1}{2} K R^2 + \cancel{K L_0 R} - \cancel{mgR_0} \right)$$

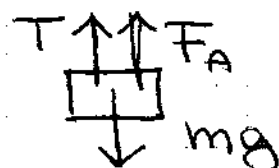
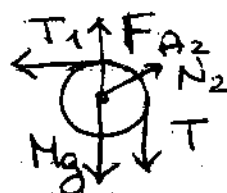
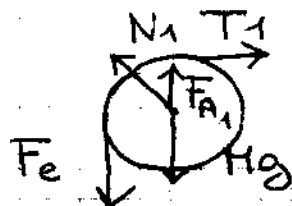
poiché $L_0 = \frac{mg}{K}$

$$v = \sqrt{\frac{K}{m + M}} R$$

$$\vec{v} = v \hat{y}$$

$$v = 0,94 \text{ m/s}$$

- 4) Se tutto è immerso in acqua, devo aggiungere la forza di Archimede sul c.m. di ciascuna delle tre masse.



F_{A1} e F_{A2} sono le forze di Archimede applicate al c.m. dei due dischi e hanno momento = zero rispetto all'asse di rotazione passante per il c.m.

$$T + F_A - mg = 0$$

con $F_A = \rho_0 V g = \rho_0 \frac{m}{\rho_m} g$ (con $\rho_m = \frac{m}{V}$)

con $\rho_m = 2\rho_0$ densità della massa m (8)

$$F_A = \frac{\rho_0}{2\rho_0} mg = \frac{1}{2} mg$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T + \frac{1}{2} mg - mg = 0 \\ T_1 R_2 - T R_2 = 0 \\ F_e R_1 - T_1 R_1 = 0 \end{cases} \quad \text{con } F_e = k L_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = \frac{1}{2} mg \\ T_1 = T \\ T_1 = k L_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k L_1 = \frac{1}{2} mg$$

$$\boxed{L_1 = \frac{mg}{2k}}$$

$$L_1 = 0,196 \text{ m}$$

$$\boxed{L_1 \approx 20 \text{ cm}}$$