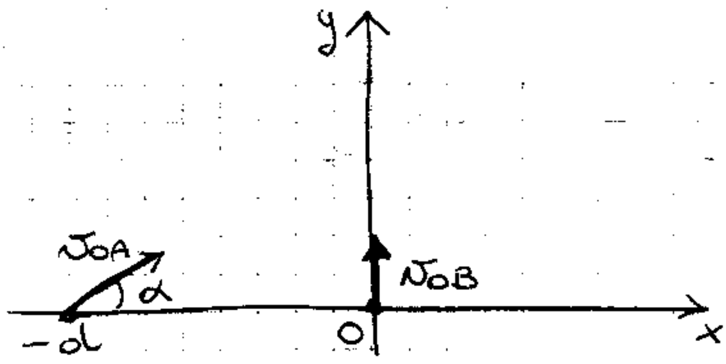
Soluzione esercizio 1

1° verifica 14/3/2008



$d = 20\,m$

Sia $t=0$ l'istante di sparo dei due proiettili.
Si consideri il sistema di assi cartesiani ortogonali come in figura.

A e B compiono un moto uniformemente accelerato nella direzione $\hat{y}$ e uniforme nella direzione $\hat{x}$

$a_y = -g \qquad a_x = 0$

Quindi
$$\begin{cases} x_A(t) = -d + v_{0A}\cos\alpha \cdot t \\ y_A(t) = v_{0A}\sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B(t) = 0 \\ y_B(t) = v_{0B}\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

B raggiunge la massima quota nell'istante t_0 in cui la sua velocità nella direzione verticale è nulla

$$v_{B_y}(t) = v_{0B} - gt$$

$$\Rightarrow \quad v_{0B} - g t_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{v_{0B}}{g}$$

Quindi all'istante t_0 le posizioni di A e B devono coincidere:

$$\begin{cases} x_A(t_0) = x_B(t_0) \\ y_A(t_0) = y_B(t_0) \end{cases}$$

Ovvero:

$$\begin{cases} -d + v_{0A}\cos\alpha \cdot \dfrac{v_{0B}}{g} = 0 \\ v_{0A}\sin\alpha \cdot \dfrac{v_{0B}}{g} - \cancel{\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{v_{0B}}{g}\right)^2} = v_{0B}\cdot\dfrac{v_{0B}}{g} - \cancel{\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{v_{0B}}{g}\right)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{0B}\cos\alpha = \dfrac{dg}{v_{0A}} \\ v_{0A}\sin\alpha \cdot v_{0B} - v_{0B}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad v_{0B}\left(v_{0A}\sin\alpha - v_{0B}\right) = 0$$

1ª soluzione: $v_{0B} = 0$ che corrisponde al proiettile B che rimane fermo. Questo caso verrà trattato in seguito.

2ª soluzione: $v_{0A}\sin\alpha - v_{0B} = 0$

$$\Rightarrow \quad v_{0B} = v_{0A}\sin\alpha$$

Quindi

$$v_{0A}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{dg}{v_{0A}}$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\frac{dg}{v_{0A}^2}$$

$$\sin(2\alpha) = \frac{2dg}{v_{0A}^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2dg}{(v_{0A}^2)}$$

numericamente:

$$\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2\cdot 20\cdot 9{,}81}{(27)^2}\right) = \frac{1}{2}\arcsin(0{,}5383)$$

$\alpha = 16{,}28°$ $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha \simeq 16°}$ (2 cifre sign.) ③

Quindi

$$v_{OB} = \frac{dg}{v_{OA}\cos\alpha}$$

$$v_{OB} = \frac{20 \cdot 9{,}81}{27 \cdot \cos(16{,}28°)} \ m/s = 7{,}570 \ m/s$$

$$\boxed{v_{OB} \simeq 7{,}6 \ m/s}$$

2) Velocità del punto A: $\begin{cases} v_{Ax} = v_{OA}\cos\alpha \\ v_{Ay} = v_{OA}\sin\alpha - gt \end{cases}$

Istante dell'impatto

$$t_0 = \frac{v_{OB}}{g} = \frac{7{,}570}{9{,}81} \ s = 0{,}7717 \ s$$

$$v_{Ax}(t_0) = v_{OA}\cos\alpha = 27 \cdot \cos(16{,}28°) \ m/s = 25{,}92 \ m/s$$

$$v_{Ay}(t_0) = v_{OA}\sin\alpha - gt_0 = v_{OA}\sin\alpha - \cancel{g}\frac{v_{OB}}{\cancel{g}} =$$

$$= v_{OA}\sin\alpha - v_{OB} = v_{OA}\sin\alpha - v_{OA}\sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{Ax}(t_0) = \boxed{26 \ \frac{m}{s}} \\ v_{Ay}(t_0) = \boxed{0} \end{cases}$$

(2 cifre significative)

Quindi all'istante t_0 anche il corpo A è nel punto più alto della sua traiettoria.

$$v_A(t_0) = \sqrt{v_{Ax}^2(t_0) + v_{Ay}^2(t_0)} =$$

$$= 25{,}92 \ \frac{m}{s} \simeq 26 \ \frac{m}{s}$$

3) Se $v_{0B}=0$ il punto B rimane fermo nella sua posizione iniziale.

Quindi A colpisce B se la sua gittata vale d

$$\Rightarrow \quad \frac{v_{0A}^2 \sin(2\alpha)}{g} = d$$

$$\sin 2\alpha = \frac{dg}{v_{0A}^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{dg}{v_{0A}^2}\right)$$

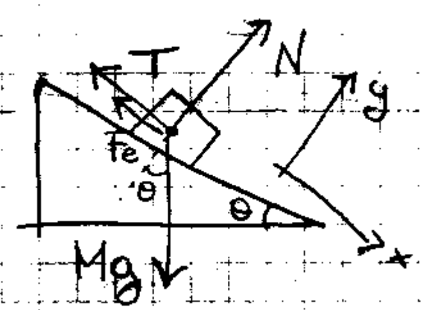
numericamente: $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{20 \cdot 9,81}{(27)^2}\right)$

$\alpha = \frac{1}{2}\arcsin(0,2691) = 7,806°$

$\boxed{\alpha = 7,8°}$ (2 cifre significative)

Soluzione esercizio 2

1)



La molla esercita una forza F_e diretta come in figura (la molla è compressa di $\frac{1}{10}l_0$) avente modulo $F_e = K \cdot \frac{1}{10}l_0 = \frac{Kl_0}{10}$

Si considerino gli assi cartesiani xy disegnati in figura

Il blocco è in equilibrio: la somma vettoriale delle forze ad esso applicate è zero. $\sum \vec{F}_{ext} = 0$

Componente x: $-T + Mg\sin\theta - K\frac{l_0}{10} = 0$

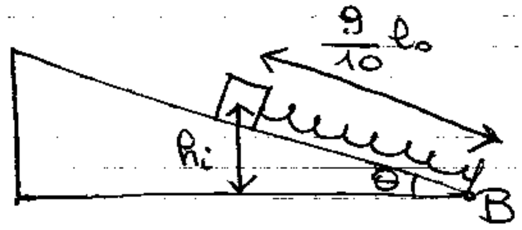
" y: $N - Mg\cos\theta = 0$

$\Rightarrow T = Mg\sin\theta - Kl_0/10$

$T = 2 \cdot 9,81 \sin(30°) - 50 \cdot \frac{1,5}{10}\,N = 2,3\,N$ (2 cifre signif.)

2) Poiché non sono presenti forze dissipative, l'energia meccanica del sistema si conserva.

Situazione iniziale: (i)
(subito dopo la rottura del filo)

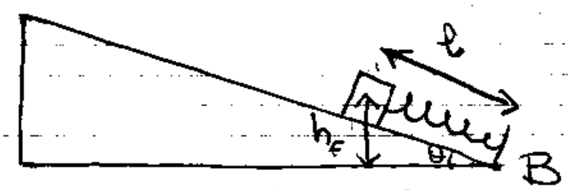


$h_i = \frac{9}{10}\ell_0 \sin\theta$

$v_i = 0$ la velocità iniziale del blocco è $= 0$

La molla è compressa di $\Delta\ell_i = \ell_0 - \frac{9}{10}\ell_0 = \frac{\ell_0}{10}$

Situazione finale: (f)
(nell'istante di minima distanza da B)



$h_f = \ell \sin\theta$

$v_f = 0$ (è un estremo del moto del blocco)

La molla è compressa di $\Delta\ell_f = \ell_0 - \ell$

$$E_i = E_f$$

Prendo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale alla quota del punto B.

$$E_i = \underset{\overset{\parallel}{0}}{K_i} + \underbrace{U_{gi}}_{\text{energia pot. gravitaz.}} + \underbrace{U_{ei}}_{\text{energia pot. elastica}}$$

$$U_{gi} = Mgh_i = \frac{9}{10}Mg\ell_0\sin\theta$$

$$U_{ei} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_i)^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{\ell_0}{10}\right)^2 = \frac{1}{200}k\ell_0^2$$

$$\Rightarrow E_i = \frac{9}{10}Mg\ell_0\sin\theta + \frac{1}{200}k\ell_0^2$$

$$E_f = \underset{\overset{\parallel}{0}}{K_f} + U_{gf} + U_{ef}$$

$$E_f = Mgh_f + \frac{1}{2}k(\Delta\ell_f)^2 = Mg\ell\sin\theta + \frac{1}{2}k(\ell_0-\ell)^2$$

$$\frac{9}{10} M g \ell_0 \sin\theta + \frac{1}{200} k \ell_0^2 = M g \ell \sin\theta + \frac{1}{2} k (\ell_0 - \ell)^2$$

$$\frac{1}{2} k\ell^2 - k\ell_0\ell + \frac{1}{2} k\ell_0^2 + Mg\ell\sin\theta - \frac{9}{10} Mg\ell_0\sin\theta - \frac{1}{200} k\ell_0^2 = 0$$

$$\frac{1}{2} k\ell^2 + (Mg\sin\theta - k\ell_0)\ell + \frac{1}{2} k\ell_0^2 - \frac{9}{10} Mg\ell_0\sin\theta - \frac{1}{200} k\ell_0^2 = 0$$

$$\ell = \frac{-Mg\sin\theta + k\ell_0 \pm \sqrt{(Mg\sin\theta - k\ell_0)^2 - 2k\left(\frac{1}{2}k\ell_0^2 - \frac{9}{10}Mg\ell_0\sin\theta + - \frac{1}{200}k\ell_0^2\right)}}{k}$$

$$\ell = \frac{-Mg\sin\theta + k\ell_0 \pm \sqrt{\Delta}}{k}$$

con $$\Delta = M^2g^2\sin^2\theta + \cancel{k^2\ell_0^2} - 2k\ell_0 Mg\sin\theta - \cancel{k^2\ell_0^2} + \frac{18}{10} k\ell_0 Mg\sin\theta + \frac{1}{100} k^2\ell_0^2 =$$

$$= M^2g^2\sin^2\theta - \frac{1}{5} k\ell_0 Mg\sin\theta + \frac{1}{100} k^2\ell_0^2$$

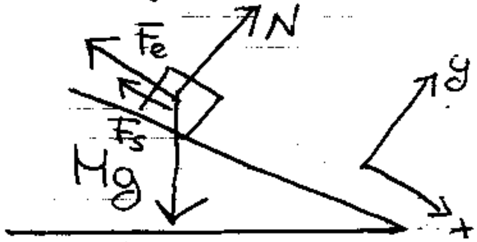
$$\ell = \frac{-\cancel{2}\cdot 9{,}81\, \cancel{\sin(30°)} + 50\cdot 1{,}5 \pm \sqrt{\cancel{4}\cdot 9{,}81^2\cdot \cancel{\sin^2(30°)} - \frac{1}{5}50\cdot 1{,}5\cdot\cancel{2}\cdot 9{,}81\,\frac{1}{\cancel{2}} + \frac{(50)^2}{100}(1{,}5)^2}}{50}\ \text{m}$$

$$\ell = \begin{cases} \dfrac{65{,}19 + 2{,}31}{50}\ \text{m} = 1{,}35\ \text{m} \\[2ex] \dfrac{65{,}19 - 2{,}31}{50}\ \text{m} = 1{,}258\ \text{m} \end{cases}$$

osservo che $\frac{9}{10}\ell_0 = \frac{9}{10}\cdot 1{,}5 = 1{,}35$ m, ovvero la soluzione trovata $\ell = 1{,}35$ corrisponde alla situazione iniziale.

$$\Rightarrow \quad \ell = 1{,}258\ \text{m} \simeq \boxed{1{,}3\ \text{m}}$$ (2 cifre significative)

3) Se dopo aver tagliato il filo il blocco resta fermo vuol dire che $\sum \vec{F}_{ext} = 0$



F_e = forza elastica

$$F_e = K\left(\ell_0 - \frac{9}{10}\ell_0\right)$$

$$F_e = \frac{K}{10}\ell_0$$

$\vec{F}_s = -F_s\,\hat{x}$ perché in assenza di attrito il blocco inizia a muoversi verso $+\hat{x}$.

x) $-F_e - F_s + Mg\sin\theta = 0$

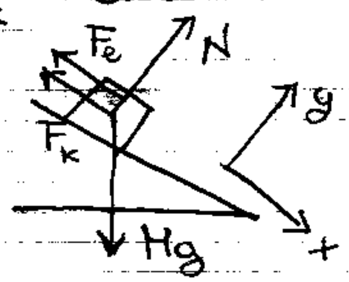
y) $N - Mg\cos\theta = 0$

$$\Rightarrow F_s = Mg\sin\theta - F_e = Mg\sin\theta - \frac{K\ell_0}{10}$$

$$F_s = \cancel{2}\cdot 9{,}81\cdot\frac{1}{\cancel{2}} - \frac{50\cdot 1{,}5}{10}\ \text{N} = 2{,}31\ \text{N} = \boxed{2{,}3\ \text{N}}$$

NOTA che la forza di attrito statico deve essere uguale alla tensione T del filo in assenza di attrito statico.

4) In caso di attrito dinamico, il blocco durante la sua discesa è soggetto alla forza F_k diretta nella direzione $-\hat{x}$



F_e = forza elastica

F_k = " di attrito dinamico

Lungo y il blocco è fermo:

$$N - Mg\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow N = Mg\cos\theta$$

$$F_k = \mu_k N \rightarrow F_k = \mu_k Mg\cos\theta$$

Considerando come istante iniziale (i) l'istante in cui il filo viene rotto e il blocco inizia a scendere e come istante (f) quello in cui raggiunge la minima distanza l dal punto B, applico il teorema delle forze vive

$$\Delta K = \sum \mathcal{L}_i$$

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - 0 = 0$$

$$\sum \mathcal{L}_i = \underbrace{\mathcal{L}_g}_{\text{lavoro della forza peso}} + \underbrace{\mathcal{L}_e}_{\text{lavoro della forza elastica}} + \underbrace{\mathcal{L}_k}_{\text{della forza di attrito dinamico}} + \underbrace{\mathcal{L}_N}_{\text{della forza normale } \vec{N}}$$

$\mathcal{L}_N = 0$ perché $\vec{N}$ è perpendicolare allo spostamento

$\mathcal{L}_g = -\Delta U_g$ perché la forza peso è conservativa

$$\mathcal{L}_g = -(U_{g_f} - U_{g_i}) = U_{g_i} - U_{g_f} = Mgh_i - Mgh_f =$$

$$= \frac{9}{10} Mg l_0 \sin\theta - Mg L \sin\theta =$$

$$= \left(\frac{9}{10} l_0 - L\right) Mg\sin\theta$$

$\mathcal{L}_e = -\Delta U_e$ perché la forza elastica è conservativa

$$= U_{e_i} - U_{e_f} = \frac{1}{2} k (\Delta l_i)^2 - \frac{1}{2} k (\Delta l'_f)^2$$

con $\Delta l'_f = l_0 - L$

$$\mathcal{L}_e = \frac{1}{2}K\left(\frac{\ell_0}{10}\right)^2 - \frac{1}{2}K\left(\ell_0 - L\right)^2$$

$$\mathcal{L}_K = -F_K \underbrace{\left(\frac{9}{10}\ell_0 - L\right)}_{\text{spostamento compiuto dalla massa } M}$$

$$= -\mu_K Mg\cos\theta\left(\frac{9}{10}\ell_0 - L\right)$$

Quindi:

$$\Delta K = \sum \mathcal{L}_i$$

$$0 = \left(\frac{9}{10}\ell_0 - L\right)Mg\sin\theta + \frac{1}{200}K\ell_0^2 - \frac{1}{2}K\left(\ell_0 - L\right)^2 + \left(-\mu_K Mg\cos\theta\left(\frac{9}{10}\ell_0 - L\right)\right)$$

$$\mu_K = \frac{\left(\frac{9}{10}\ell_0 - L\right)Mg\sin\theta + \frac{K}{200}\ell_0^2 - \frac{K}{2}(\ell_0 - L)^2}{Mg\cos\theta\left(\frac{9}{10}\ell_0 - L\right)}$$

$$\Rightarrow \mu_K = \tan\theta + \frac{K\left(\frac{\ell_0^2}{100} - (\ell_0 - L)^2\right)}{2Mg\cos\theta\left(\frac{9}{10}\ell_0 - L\right)}$$

$$\mu_K = \tan 30° + \frac{50\cdot\left(\frac{1{,}5^2}{100} - (1{,}5 - 1{,}32)^2\right)}{2\cdot 2\cdot 9{,}81\cdot\cos(30°)\left(\frac{9}{10}\cdot 1{,}5 - 1{,}32\right)}$$

$$\mu_K = 0{,}577 + \frac{-50\cdot 0{,}0099}{33{,}98\cdot 0{,}03} = 0{,}577 - 0.486 = \boxed{0{,}091}$$