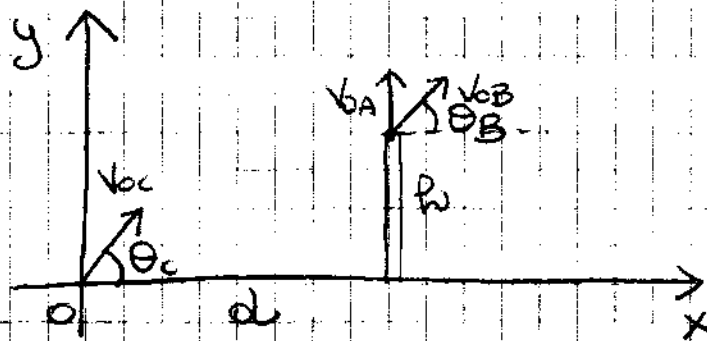


ESERCIZIO 1

Scelta del sistema di assi cartesiani ortogonali:



Equazioni del moto dei 3 proiettili:

$$\textcircled{C} \begin{cases} x_C(t) = v_{0C} \cos \theta_C t \\ y_C(t) = v_{0C} \sin \theta_C t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\textcircled{A} \begin{cases} x_A(t) = d \\ y_A(t) = h + v_{0A} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\textcircled{B} \begin{cases} x_B(t) = d + v_{0B} \cos \theta_B t \\ y_B(t) = h + v_{0B} \sin \theta_B t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Nel punto in cui A è alla sua massima quota $v_{Ay} = 0$

$$v_{Ay}(t) = v_{0A} - gt$$

$\Rightarrow$ indicando t_0 come l'istante in cui A è alla quota massima deve essere

$$V_{0A} - g t_0 = 0$$

②

$$\Rightarrow t_0 = \frac{V_{0A}}{g} \quad \text{numericamente}$$

$$t_0 = \frac{12}{9,81} \text{ s} \approx 1,223 \text{ s}$$

All'istante t_0 le posizioni di C e di A devono coincidere:

$$\begin{cases} x_c(t_0) = x_A(t_0) \\ y_c(t_0) = y_A(t_0) \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{cases} V_{0c} \cos \theta_c t_0 = d \\ V_{0c} \sin \theta_c t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2 = h + V_{0A} t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2 \end{cases}$$

Sostituendo il valore di t_0 trovato in precedente:

$$\begin{cases} V_{0c} \cos \theta_c \cdot \frac{V_{0A}}{g} = d \\ V_{0c} \sin \theta_c \cdot \frac{V_{0A}}{g} = h + V_{0A} \cdot \frac{V_{0A}}{g} \end{cases}$$

$$V_{0c} = \frac{dg}{V_{0A} \cos \theta_c} \quad \text{dalla 1ª equazione.}$$

Sostituendo questo valore nella 2ª equazione:

$$\frac{dg}{V_{0A} \cos \theta_c} \cdot \sin \theta_c \cdot \frac{V_{0A}}{g} = h + \frac{V_{0A}^2}{g}$$

$$d \tan \theta_c = h + \frac{V_{0A}^2}{g}$$

$$\tan \theta_c = \frac{h + \frac{v_{0A}^2}{g}}{d} \quad (3)$$

numericamente:

$$\tan \theta_c = 0,4467$$

$$\rightarrow \theta_c = 24,07^\circ \approx \boxed{24^\circ} \quad (2 \text{ cifre significative})$$

$$v_{oc} = \frac{100 \cdot 9,81}{12 \cdot \cos(24,07^\circ)} \text{ m/s} = 89,54 \text{ m/s}$$

$$\boxed{v_{oc} \approx 90 \text{ m/s}} \quad (2 \text{ cifre significative})$$

2) La velocità di C è data da:

$$\begin{cases} v_{cx}(t) = v_{oc} \cos \theta_c \\ v_{cy}(t) = v_{oc} \sin \theta_c - gt \end{cases} \quad \vec{v}_c = v_{cx} \hat{x} + v_{cy} \hat{y}$$

Quindi all'istante t_0 dello scontro:

$$\vec{v}_c(t_0) = (v_{oc} \cos \theta_c) \hat{x} + (v_{oc} \sin \theta_c - gt_0) \hat{y}$$

$$v_{oc} \cos \theta_c = 89,54 \cdot \cos(24,07^\circ) \text{ m/s} = 81,75 \text{ m/s}$$

$$v_{oc} \sin \theta_c - gt_0 = (89,54 \cdot \sin(24,07^\circ) - 9,81 \cdot 1,223) \text{ m/s} = 24,52 \text{ m/s}$$

$$\boxed{\vec{v}_c(t_0) = (82 \text{ m/s}) \hat{x} + (25 \text{ m/s}) \hat{y}}$$

3) Sia T l'istante in cui C e B si scontrano.
dove avere

$$\begin{cases} x_c(T) = x_B(T) \\ y_c(T) = y_B(T) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{oc} \cos \theta_c T = d + \sigma_{ob} \cos \theta_b T & (4) \\ \sigma_{oc} \sin \theta_c T - \frac{1}{2} g T^2 = h + \sigma_{ob} \sin \theta_b T - \frac{1}{2} g T^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sigma_{oc} \cos \theta_c - \sigma_{ob} \cos \theta_b) T = d \\ (\sigma_{oc} \sin \theta_c - \sigma_{ob} \sin \theta_b) T = h \end{cases}$$

Posso ricavare T dalla prima oppure dalla seconda equazione.

$$T = \frac{d}{\sigma_{oc} \cos \theta_c - \sigma_{ob} \cos \theta_b}$$

$$T = \frac{100}{74,53 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 25 \cdot \frac{1}{2}} \text{ s} = 1,92 \text{ s} \approx \boxed{1,9 \text{ s}} \quad \text{2 cifre signif.}$$

Oppure

$$T = \frac{30}{74,53 \cdot \frac{1}{2} - 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ s} = 1,92 \text{ s}$$

Il punto di scontro si può ottenere come

$$P \equiv (x_c(T), y_c(T)) = (x_b(T), y_b(T))$$

$$\begin{cases} x_c(T) = \sigma_c \cos \theta_c T \\ y_c(T) = \sigma_{oc} \sin \theta_c T - \frac{1}{2} g T^2 \end{cases}$$

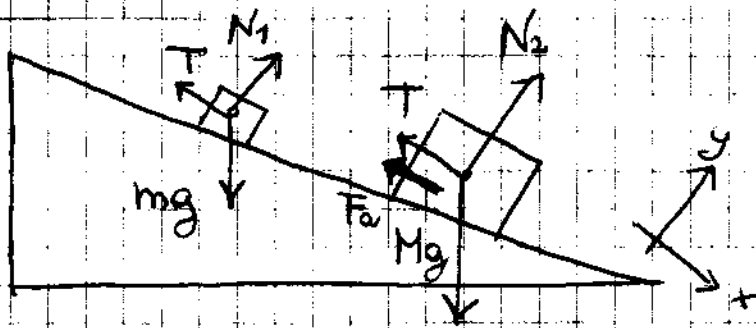
$$x_c(T) = 74,53 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1,92 \text{ m} = 123,9 \text{ m} \approx 120 \text{ m} \quad (2 \text{ cifre signif.})$$

$$y_c(T) = \left(74,53 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,92 - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot (1,92)^2 \right) m \quad (5)$$

$$y_c(T) = 53,5 m \approx 54 m \quad (2 \text{ cifre signif.})$$

ESERCIZIO 2

Diagramma di corpo libero:



In assenza di attrito il blocco M scivolerebbe verso le basso, quindi la forza di attrito

statico è diretta verso l'alto.

Poiché i due corpi sono in equilibrio $\sum \vec{F} = 0$ nota che la Tensione T è la stessa sui due corpi perché la fune è inestensibile, non nulla e la carrucola ha massa nulla.

$$\sum \vec{F} = 0$$

su $\textcircled{m}$ (componentes):

$$\begin{cases} mg \sin \theta - T = 0 \\ N_1 - mg \cos \theta = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\boxed{T = mg \sin \theta}$$

$$T = 2,5 \cdot 9,81 \cdot \frac{1}{2} N = 12,26 N$$

$$\boxed{T = 12 N} \quad 2 \text{ cifre signif.}$$

su $\textcircled{M}$

$$\begin{cases} Mg \sin \theta - T - F_w = 0 \\ N_2 - Mg \cos \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow N_2 = Mg \cos \theta$$

doe F_a indica il modulo della forza di attrito statico ⑥

$$\boxed{\vec{F}_a = -F_a \hat{x}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{punta nel verso} \\ \rightarrow \hat{x} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow Mg \sin \theta - mg \sin \theta - F_a = 0$$

$$\boxed{F_a = (M - m)g \sin \theta}$$

$$F_a = (12 - 2,5) \cdot 9,81 \cdot 0,5 \text{ N} = 46,6 \text{ N} \approx \boxed{47 \text{ N}}$$

2) Deve sempre essere $F_a \leq \mu_s N_2$

con $N_2 =$ forza normale che agisce su M.

In questa equazione (disuguaglianza) vale il segno uguale solo per il valore $\theta = \theta_{\max}$

$$(M - m)g \sin \theta \leq \mu_s Mg \cos \theta$$

$$(M - m)g \cancel{\sin \theta_{\max}} = \mu_s M g \cancel{\cos \theta_{\max}}$$

$$\tan \theta_{\max} = \mu_s \frac{M}{M - m}$$

$$\tan \theta_{\max} = 0,6 \cdot \frac{12}{12 - 2,5} = 0,7579$$

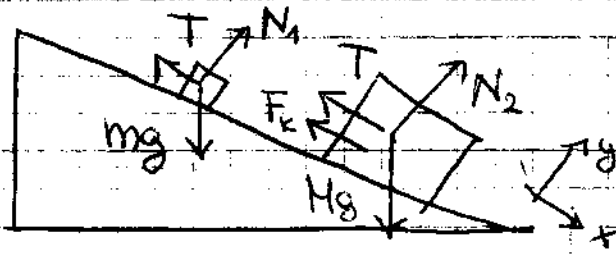
$$\Rightarrow \theta_{\max} = 37,16^\circ \approx \boxed{37^\circ} \quad \begin{array}{l} \text{2 cifre} \\ \text{signif.} \end{array}$$

3) In questa domanda $\theta = 60^\circ$ e il blocchetto M inizia a muoversi, scendendo verso il basso.

- Calcolo di v_B utilizzando la dinamica

del punto materiale:

Diagramma di corpo libero:



NOTA: T non è quella calcolata al punto 1) dell'esercizio, ora i blocchi m stanno muovendo

F_k = modulo della forza di attrito dinamico.

$$F_k = \mu_k N_2$$

NOTA che m e M si muovono con la stessa accelerazione a , M scende e m sale.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

perché sono collegati dal filo

per (m) x: $\begin{cases} mg \sin \theta - T = -ma \end{cases} \quad \text{eq. 1)}$

y: $\begin{cases} N_1 - mg \cos \theta = 0 \end{cases}$

(M) x: $\begin{cases} Mg \sin \theta - T - F_k = Ma \end{cases}$

y: $\begin{cases} N_2 - Mg \cos \theta = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow Mg \sin \theta - T - \mu_k N_2 = Ma$$

$$Mg \sin \theta - T - \mu_k Mg \cos \theta = Ma$$

dall'eq 1) si ha che $T = mg \sin \theta + ma$

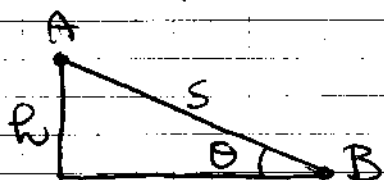
$$\Rightarrow Mg \sin \theta - mg \sin \theta - ma - \mu_k Mg \cos \theta = Ma$$

$$(M+m)a = (M-m)g \sin \theta - \mu_k Mg \cos \theta$$

$$a = \frac{(M-m)g \sin \theta}{(M+m)} - \mu_k \frac{M}{(M+m)} g \cos \theta \quad (8)$$

Numericamente: $a = 3,942 \text{ m/s}^2$

Il moto di M è ad accelerazione costante. Lo spazio che percorre è S



$$h = S \cdot \sin \theta$$

$$S = \frac{h}{\sin \theta}$$

$$S = \frac{0,15}{\sin 60^\circ} \text{ m} = 0,1732 \text{ m}$$

Utilizzando la relazione, valida per il moto uniformemente accelerato, che

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

$$\text{con } \begin{cases} v^2 = v_B^2 \\ v_0^2 = 0 \\ x - x_0 = S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_B^2 = 2aS \\ v_B = \sqrt{2aS} \end{cases}$$

$$v_B = \sqrt{2 \cdot 3,942 \cdot 0,1732} \text{ m/s} \approx 1,169 \text{ m/s}$$

$$\boxed{v_B = 1,2 \text{ m/s}} \quad 2 \text{ cifre signif.}$$

= Calcolo di v_B utilizzando il bilancio energetico.

Teo. delle forze vive

$$\Delta K = \sum_i L_i$$

$$\Delta K = K_{fin} - K_{in} = K_{fin} = \frac{1}{2} M v_B^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 \quad (9)$$

poiché M e m hanno sempre la stessa velocità (in modulo)

$$\sum_i L_i = L_g + L_k$$

L_g = lavoro della forza peso

L_k = lavoro della forza di attrito

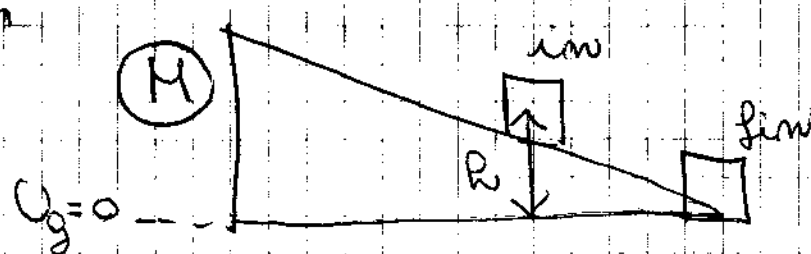
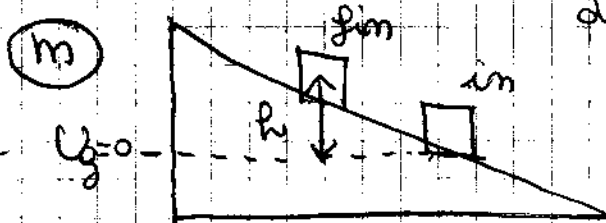
$$L_g = -\Delta U_g$$

poiché la forza peso è conservativa
 U_g = energia potenziale gravitazionale.

NOTA che M scende verso il basso percorrendo un tratto $s = \frac{h}{\sin \theta}$ lungo il piano inclinato, mentre m sale lungo il piano inclinato di una quantità h , percorrendo anch'essa un tratto $s = \frac{h}{\sin \theta}$ lungo il piano inclinato.

$$\begin{aligned} \Delta U_g &= U_{g,fin} - U_{g,in} = \\ &= [U_{g,fin} - U_{g,in}]_m + [U_{g,fin} - U_{g,in}]_M = \\ &= [mgh - 0]_m + [0 - Mgh]_M \end{aligned}$$

contributo di m



$$\Rightarrow \Delta U_g = mgh - Mgh = (m-M)gh \quad (10)$$

$$L_g = -\Delta U_g = (M-m)gh$$

$$L_k = -F_k \cdot s$$

$$L_k = -\mu_k N_2 \cdot s = -\mu_k Mg \cos \theta \cdot s =$$

$$= -\mu_k Mg \cos \theta \cdot \frac{h}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow \Delta K = L_g + L_k$$

$$\frac{1}{2}(M+m)v_B^2 = (M-m)gh - \mu_k \frac{Mgh}{\tan \theta}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2}{(M+m)} \cdot \left[(M-m)gh - \mu_k \frac{Mgh}{\tan \theta} \right]}$$

$$v_B = \sqrt{\left[\frac{2(M-m)}{M+m} - \mu_k \frac{2M}{(M+m)\tan \theta} \right] gh}$$

numericamente:

$$v_B = \sqrt{1,3656} \text{ m/s} = 1,169 \text{ m/s} \approx 1,2 \text{ m/s}$$

ovviamente ottenendo lo stesso risultato