Moto bidimensionale con $a_x = 0$ e $a_y = a$.

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{ox} t + x_o & (1) \\ y(t) &= \frac{1}{2} a t^2 + v_{oy} t + y_o & (2) \end{aligned}$$

Eliminando il tempo t dalla prima equazione si ricava:

$$y(x) = \frac{a}{2} \frac{(x - x_o)^2}{v_{ox}^2} + \frac{v_{oy}}{v_{ox}} (x - x_o) + y_o \qquad (3)$$

Se si svolgono i termini e si raggruppano le potenze di x si ottiene:

$$y(x) = \frac{a}{2 v_{ox}^2} x^2 + \left[\frac{v_{oy}}{v_{ox}} - \frac{a x_o}{v_{ox}^2} \right] x + \left[y_o - \frac{v_{oy}}{v_{ox}} x_o + \frac{a}{2 v_{ox}^2} x_o^2 \right] \qquad (4)$$

L'espressione si riduce notevolmente se le condizioni iniziali possono essere semplificate: ad esempio, se al tempo $t = 0$ la posizione iniziale lungo la direzione x è nulla, cioè $x_o = 0$, si ottiene:

$$y(x) = \frac{a}{2v_{ox}^2}x^2 + \frac{v_{oy}}{v_{ox}}x + y_o \tag{5}$$

Anche questa espressione rappresenta una parabola: le equazioni (2) e (3,4,5) hanno tutte la stessa forma (quindi lo stesso andamento).

Proiettile

Come esempio delle applicazioni di queste formule prendiamo il moto di un proiettile: se sostituiamo $a_y = -g$, e per semplicità manteniamo $x_o = 0$, l'equazione che si ottiene dalla (5) fornisce la traiettoria del corpo lanciato:

$$y(x) = -\frac{gx^2}{2v_{ox}^2} + \frac{v_{oy}}{v_{ox}}x + y_o \tag{6}$$

Quanto è la gittata D di un proiettile? Per gittata si intende la distanza x tra il punto di partenza e il punto di arrivo, entrambi posti a $y = 0$. Quindi ponendo anche $y_o = 0$, la soluzione cercata si ottiene imponendo

$$
\begin{aligned}
y(D) &= 0 = -\frac{gx^2}{2v_{ox}^2} + \frac{v_{oy}}{v_{ox}}x \\
x_1 &= 0 \\
x_2 &= D = \frac{2v_{oy}v_{ox}}{g}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Se invece il corpo parte da (o deve arrivare a) una altezza diversa da zero, la soluzione è più complicata, e si trova risolvendo l'equazione di secondo grado: delle due soluzioni, quella che corrisponde al valore maggiore è quella cercata; se $v_{ox} > 0$ si ha:

$$
y(D) = 0 = -\frac{gx^2}{2v_{ox}^2} + \frac{v_{oy}}{v_{ox}}x + y_o
$$

$$
x_2 = D = \frac{v_{ox}}{g}\left[v_{oy} + \sqrt{v_{oy}^2 + 2gy_o}\right] \tag{8}
$$

Qual è l'altezza massima a cui il corpo arriva? Questo si calcola più facilmente se si considera la velocità lungo y. Le relazioni per le velocità sono (sempre ponendo $x_o = 0$):

$$v_x(t) = v_{ox} \tag{9}$$

$$v_y(t) = -gt + v_{oy} \tag{10}$$

$$v_y(x) = -\frac{g}{v_{ox}}x + v_{oy} \tag{11}$$

Da cui si ottiene:

$$x_{hmax} = \frac{v_{ox}v_{oy}}{g} \tag{12}$$

$$y_{hmax} = y_o + \frac{v_{oy}^2}{2g} \tag{13}$$

Moto circolare uniforme.

Uniforme corrisponde al fatto che *angoli uguali sono percorsi in tempi uguali*.

$$\begin{aligned} x(t) &= b + R\cos(\theta(t)) && (14) \\ y(t) &= c + R\sin(\theta(t)) && (15) \end{aligned}$$

L'ipotesi *uniforme* si traduce nella relazione :

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0$$

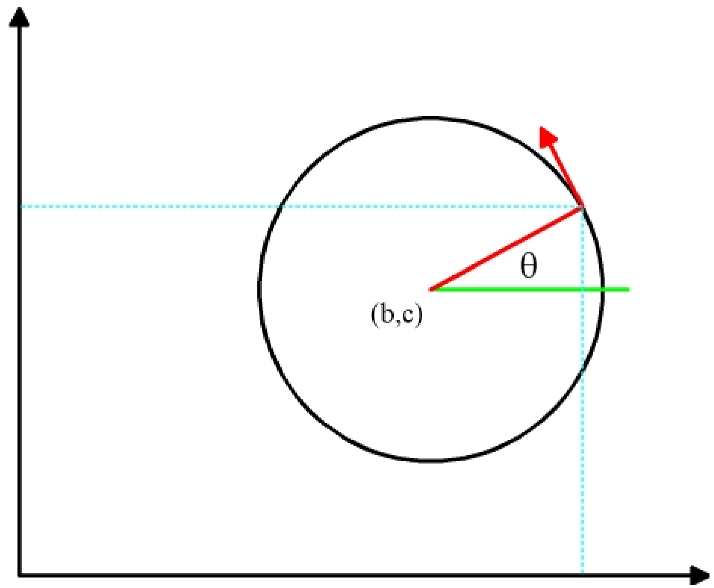
con ω costante; quindi le relazioni diventano:

$$\begin{aligned} x(t) &= b + R\cos(\omega t + \theta_0) && (16) \\ y(t) &= b + R\sin(\omega t + \theta_0) && (17) \\ v_x(t) &= -\omega R\sin(\omega t + \theta_0) && (18) \\ v_y(t) &= +\omega R\cos(\omega t + \theta_0) && (19) \\ a_x(t) &= -\omega^2 R\cos(\omega t + \theta_0) && (20) \\ a_y(t) &= -\omega^2 R\sin(\omega t + \theta_0) && (21) \end{aligned}$$

La velocità angolare ω è definita come:

$$\dot{\theta} = \omega = \frac{\partial \theta}{\partial t} \tag{22}$$

$$\dot{\theta} = \omega = \frac{1}{R}|\vec{v}| = \frac{v}{R} \tag{23}$$



Accelerazione tangenziale e centripeta (moti piani)

Come cambia il modulo di v e la sua direzione.

$$a_t = \frac{\partial|\vec{v}|}{\partial t} \tag{24}$$

$$a_r = -\frac{v^2}{R} \tag{25}$$

R = raggio di curvatura della traiettoria