Prova scritta di
FISICA PER SCIENZE BIOLOGICHE MOLECOLARI A e C
e
FISICA PER SCIENZE ECOLOGICHE E DELLA BIODIVERSITA'
10.06.2008

Esercizio 1 - Meccanica

Una molla ideale di costante elastica $k = 180$ N/m e massa trascurabile è posta sopra un piano orizzontale senza attrito, e ha un capo bloccato ad una parete. All'altro capo è agganciata una massa $m_1 = 0.25\ kg$. Inizialmente la molla è compressa di una quantità $x_1 = 0.25\ m$ e al corpo m_1 è appoggiato un secondo corpo $m_2 = 0.75\ kg$. All'istante $t = 0$ la molla viene lasciata libera.

Domanda n. 1: Calcolare il tempo t_a in corrispondenza del quale il secondo corpo si separa dal primo.

Domanda n. 2: Calcolare la velocità del corpo m_2 al tempo t_a.

Domanda n. 3: Dopo la separazione il corpo m_1 continua ad oscillare sotto l'azione della molla: calcolare il periodo T di queste oscillazioni.

Esercizio 2 - Elettromagnetismo

Un primo modello di polarizzabilità proposto per spiegare il comportamento dei dielettrici trattava la materia come una distribuzione di cariche così composta: una carica $+q$ distribuita uniformemente in una sfera di raggio R e una carica puntiforme $-q$ posta nel centro della carica sferica. Si vuole studiare cosa succede ad un sistema di questo tipo, nell'ipotesi che la sfera non possa muoversi e solamente la carica puntiforme negativa (di massa m) si muova.

Si ponga il sistema suddetto nella posizione centrale, tra le armature di un condensatore piano (superficie grande e distanza tra le armature d, con $d \gg R$), connesso ad una sorgente di potenziale V. In queste condizioni il sistema si modifica per raggiungere una posizione di equilibrio.

Domanda n. 4: Si calcoli il valore del campo elettrico E all'interno del condensatore in funzione di V.

Domanda n. 5: Supponendo che solo la carica puntiforme si possa muovere, calcolare la distanza tra la sua nuova posizione di equilibrio e il centro della sfera in funzione del campo elettrico E interno al condensatore.

Domanda n. 6: Calcolare quale sia il massimo valore di E che permetta di avere una situazione di equilibrio.

Domanda n. 7: Se si aumenta ulteriormente il valore di E, con quale velocità arriva la carica $-q$ sull'armatura del condensatore?

Soluzioni

Esercizio 1

Per descrivere il moto, si può utilizzare l'asse x diretto orizzontalmente, converso tale che la posizione iniziale dei due corpi (considerati come punti materiali) sia $-x_1$.
Quando la molla viene lasciata libera, il moto è descrivibile semplicemente come:

$$x(t) = -x_1 \cos \frac{2\pi t}{T_1}$$

con T periodo di oscillazione dato dalla relazione:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = 0.468\ s$$

Risposta alla domanda n. 1: All'inizio del moto, la molla esercita una forza diretta lungo il verso positivo delle x, e quindi il secondo corpo si muove insieme al primo. Nel momento in cui la forza cambia verso, il primo corpo non esercita più nessuna forza sul secondo: questo accade quando $x = 0$; quindi

$$t_a = \frac{T_1}{4} = 0.117\ s$$

Risposta alla domanda n. 2: La velocità che il secondo corpo possiede all'istante t_a è calcolabile applicando la legge di conservazione dell'energia: infatti a $x = 0$, tutta l'energia potenziale elastica iniziale è sotto forma di energia cinetica dei due corpi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} k x_1^2 &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_a^2 \\ v_a &= \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}\, x_1 = 3.35\ m/s \end{aligned}$$

Risposta alla domanda n. 3: Il nuovo periodo di oscillazione è dato dalla solita espressione, tenendo conto che alla molla è attaccata la sola massa m_1:

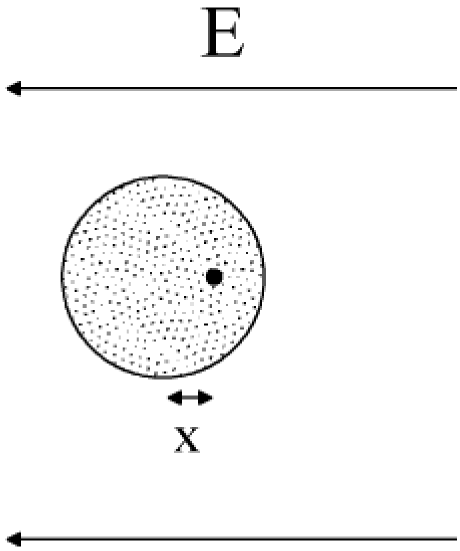
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}} = 0.234\ s$$

Esercizio 2

Risposta alla domanda n. 4: Nell'ipotesi che la coppia di cariche perturbi poco il campo elettrico all'interno del condensatore, vale la relazione:

$$E = \frac{V}{d}$$

Si supponga che la direzione del campo sia
Risposta alla domanda n. 5: La carica puntiforme $-q$ è in equilibrio sotto l'azione delle forze derivanti dal campo del condensatore (E) e dal campo prodotta dalla carica $+q$ (denominato E_1. Se la carica $-q$ si sposta di una quantità x inferiore al raggio R, quest'ultimo campo



è quello dovuto (per il teorema di Gauss) al campo generato da una frazione della carica $+q$; la posizione di equilibrio si ha quando i due campi sono opposti e di ugual modulo:

$$\begin{aligned} E_1(x) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\, x \\ E &= E_1(x) \\ x &= \frac{4\pi\epsilon_0 R^3}{q}\frac{V}{d} \end{aligned}$$

Risposta alla domanda n. 6: Se la differenza di potenziale V aumenta, anche E aumenta, ma si può avere una situazione di equilibrio fintanto che il campo elettrico $E_1(x)$ può aumentare: questo accade fino a che $x \leq R$; quindi il massimo valore di E corrisponde a:

$$E_{max} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Risposta alla domanda n. 7: Se si aumenta ulteriormente V (e di conseguenza E), la carica $-q$ esce dalla sfera e dal quel momento si muove sotto l'azione congiunta dei due campi, sino a raggiungere l'armatura del condensatore. Per calcolare la velocità con cui arriva su di esso, basta applicare la conservazione dell'energia elettrostatica, tenendo conto del potenziale dovuta ai due campi nel punto A (immediatamente all'esterno della sfera, a metà del condensatore) e nel punto B (sull'armatura). Prendendo per il campo del condensatore il valore E_{max}, il potenziale vale:

$$V_A = \frac{V}{2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R} \tag{1}$$

$$V_B = V + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R+d/2} \tag{2}$$

La differenza di potenziale, moltiplicata per la carica $-q$, è l'energia che la carica acquista, e corrisponde quindi all'energia cinetica che ha quando arriva sull'armatura:

$$v = \sqrt{\frac{2q}{m}(V_B - V_A)} = \sqrt{\frac{2q}{m}\left(\frac{V}{2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R+d/2} - \frac{1}{R}\right)\right)} \sim \sqrt{\frac{2q}{m}\left(\frac{V}{2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R}\right)}$$