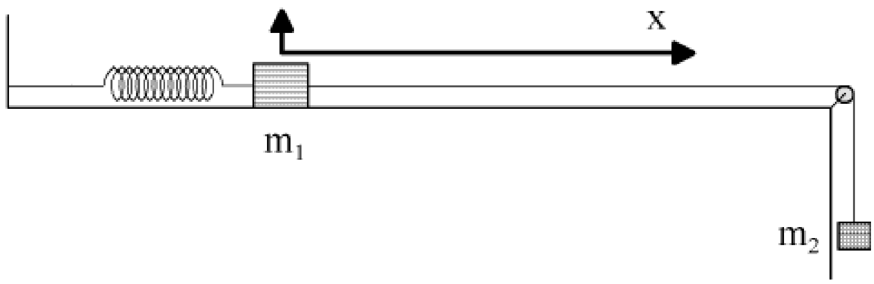
Prova scritta di
FISICA PER SCIENZE BIOLOGICHE MOLECOLARI A e C
e
FISICA PER SCIENZE ECOLOGICHE E DELLA BIODIVERSITA'
16.09.2008

Esercizio 1 - Meccanica

Un corpo di massa m_1 è posto su un piano orizzontale senza attrito, ed è attaccato da una parte ad una molla di costante elastica k, e dall'altra ad una fune. All'altro capo della fune è attaccato un secondo corpo di massa m_2, libero di muoversi in direzione verticale grazie ad una carrucola. Molla, fune e carrucola sono da considerarsi ideali e di massa trascurabile.
Inizialmente il sistema è fermo, con la molla in condizioni di riposo e con la carrucola bloccata. Nel momento in cui si sblocca la carrucola, i due corpi cominciano a muoversi.
Domanda n. 1: Scrivere l'equazione del moto per il corpo m_1 ad un istante generico, utilizzando la coordinata x del sistema di riferimento indicato in figura.
Domanda n. 2: Si denoti con G il punto in cui si ha una posizione di equilibrio (quando m_2 è libera di muoversi); si determini s, valore della coordinata x di G.
Domanda n. 3: Utilizzando il sistema di riferimento x' con l'origine O' posta in G, riscrivere l'equazione del moto per il corpo m_1.
Domanda n. 4: Descrivere il moto del corpo m_1 prima a parole, poi quantitativamente (risolvendo l'equazione del moto tenuto conto delle condizioni iniziali: $x'(0) = -s$, $v'(0) = 0$).
Domanda n. 5: Determinare M (massimo valore positivo di x').
Domanda n. 6: Determinare l'istante t_m in corrispondenza del quale viene raggiunto per la prima volta M.



Esercizio 2 - Elettromagnetismo

Una carica puntiforme $Q_1 = 50\,nC$ è posta a distanza $A = 70\,cm$ dal centro di una sfera Q_2 di raggio $b = 14\,cm$ su cui è presente una distribuzione di carica volumica con densità uniforme $\mu = 13.06\,\mu C/m^3$. Si indichi con xy un sistema di riferimento che ha origine nel centro della sfera Q_2 e in cui la carica Q_1 ha coordinate $[A, 0]$.
Domanda n. 7: Determinare in quanti punti del piano xy il valore del campo elettrico dovuto alle due cariche è nullo, giustificando il risultato con un grafico della componente x dell'intensità del campo elettrico in funzione della coordinata x nei punti con $y = 0$.
Domanda n. 8: Trovare le coordinate del punto P di campo nullo posto all'esterno della carica Q_2.
Domanda n. 9: Calcolare il valore del potenziale elettrostatico in P, assumendo che il potenziale sia nullo a distanza infinita dalle cariche.

Domanda n. 10: Trovare una espressione che descriva l'andamento del potenziale elettrostatico in funzione della coordinata y nell'intorno di P e disegnarne l'andamento.
Domanda n. 11: Dal grafico preparato per la risposta alla domanda precedente, dedurre il comportamento di equilibrio in P, spiegando se e perchè il punto sia di equilibrio stabile o instabile per una carica positiva posta in esso.
Domanda n. 12: *(Opzionale)* Trovare una espressione che descriva l'andamento del potenziale elettrostatico in funzione della coordinata x nell'intorno di P e disegnarne l'andamento.

Soluzioni

Esercizio 1

Risposta alla domanda n. 1: L'insieme dei due corpi è soggetto alla forza peso, alle reazione del piano e alla forza elastica. Tenuto conto di tutto, per la coordinata x vale la relazione:

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{x}(t) = -kx(t) + m_2 g \tag{1}$$

Risposta alla domanda n. 2: Dalla equazione 1, si ha una condizione di equilibrio quando $\ddot{x} = 0$, che corrisponde a:

$$s = \frac{m_2 g}{k}$$

Risposta alla domanda n. 3: Con il passaggio di sistema di riferimento si ottiene:

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) - s && (2)\\ \ddot{x}'(t) &= \ddot{x}(t) \\ (m_1 + m_2)\,\ddot{x}'(t) &= -k(x'(t) + s) + m_2 g \\ (m_1 + m_2)\,\ddot{x}'(t) &= -kx'(t) && (3) \end{aligned}$$

Risposta alla domanda n. 4: La equazione 3 indica che il corpo m_1 compie un moto di oscillazione armonica semplice intorno al punto di equilibrio G. Il periodo del moto è dato dalla relazione consueta

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}$$

Tenuto conto delle condizioni iniziali, la soluzione dell'equazione del moto è:

$$x'(t) = -s\,\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}\,t\right) \tag{4}$$

Risposta alla domanda n. 5: s
Risposta alla domanda n. 6: $T/2$

Esercizio 2

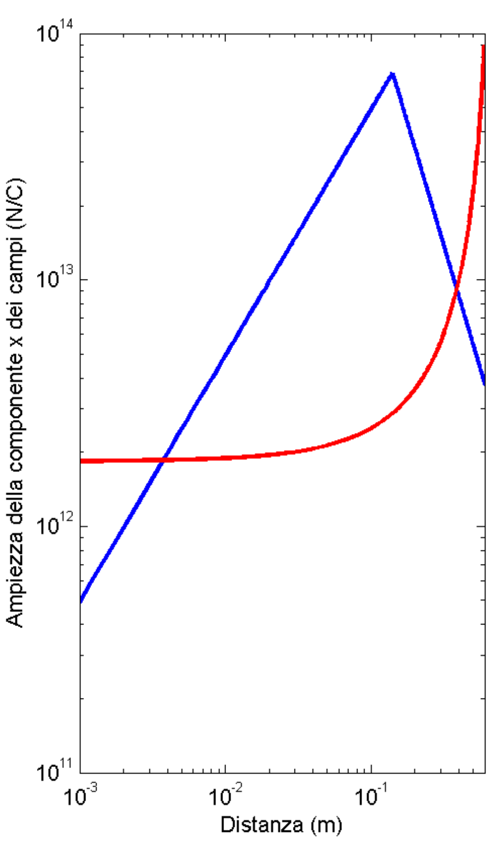
Risposta alla domanda n. 7: La componente x del campo elettrico generato dalla carica Q_2 è dato dalle seguenti espressioni:

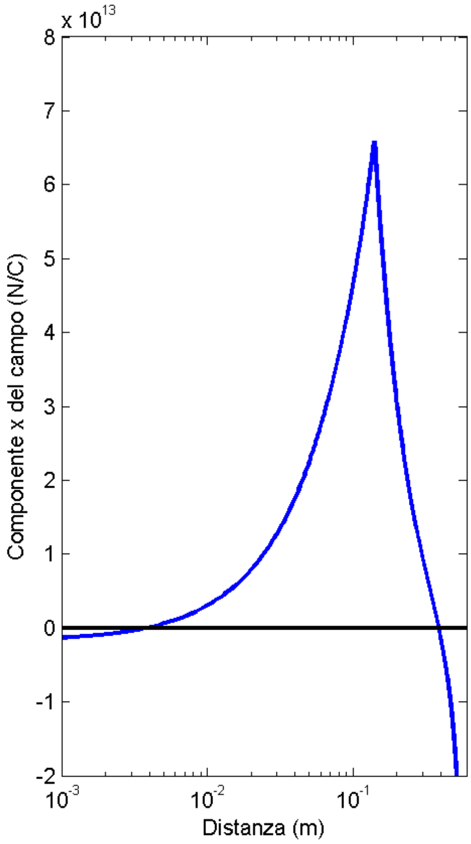
$$\begin{aligned} E_{x2} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q_2}{b^3}\,x \qquad x <= b && (5)\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q_2}{x^2} \qquad x > b && (6)\\ Q_2 &= \frac{4}{3}\pi b^3 \mu \quad = 150\,nC \end{aligned}$$

La componente x del campo dovuto a Q_1, tenuto conto dell'orientazione, vale:

$$E_{x1} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q_1}{(A - x)^2} \tag{7}$$

La figura mostra un grafico delle componenti separate e sommate, nello spazio compreso tra le due cariche. Risulta evidente che possono esistere solo due punti in cui il campo totale è nullo,





e questi sono posti sulla congiungente i due centri, uno internamente e uno esternamente alla sfera Q_2. La coordinata del punto interno ha una espressione analitica complessa, che con i dati del problema vale 0.38 mm.

Risposta alla domanda n. 8: La coordinata d del punto di campo nullo esterna alla sfera Q_2 si ottiene imponendo:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q_2}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q_1}{(A-x)^2}$$

Se si definisce k come:

$$k = \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}} = 1.225 \tag{8}$$

la soluzione con senso fisico risulta:

$$d = A\,\frac{k}{1+k} = 38.5\,cm \tag{9}$$

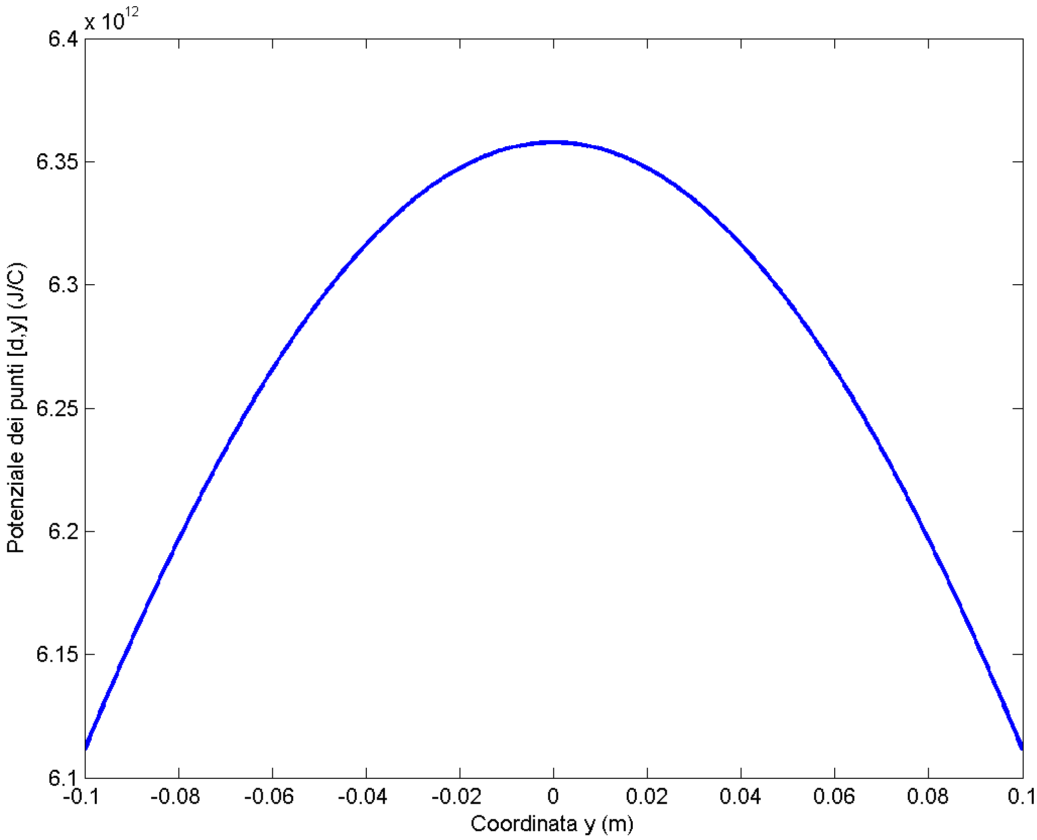
Risposta alla domanda n. 9: Il valore del potenziale in P vale:

$$V(d) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\left(\frac{Q_1}{A-d} + \frac{Q_2}{d}\right) = 6.36\;10^{12}\;J/C$$

Risposta alla domanda n. 10: Nei punti di coordinate $[d, y]$ il potenziale vale:

$$V(d,y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\left(\frac{Q_1}{\sqrt{(A-d)^2+y^2}} + \frac{Q_2}{\sqrt{d^2+y^2}}\right) \tag{10}$$

che al variare di y ha un andamento come in figura:



Risposta alla domanda n. 11: Il grafico mostra che il punto P è un punto di equilibrio instabile per il moto di una carica positiva.
Risposta alla domanda n. 12: Nei punti di coordinate $[x, 0]$ con x molto prossimo a d il potenziale può essere sviluppato in serie. Utilizzando l'espressioni di k e d (eqs. 8-9), si ottiene:

$$
\begin{aligned}
x &= d + \epsilon\, A \qquad \epsilon \ll 1 && (11)\\
V(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\left(\frac{Q_1}{A-d-\epsilon} + \frac{Q_2}{d+\epsilon}\right) && (12)\\
&\sim \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q_1}{A}\left(\frac{1}{1-\frac{k}{1+k}-\epsilon} + \frac{k^2}{\epsilon+\frac{k}{1+k}}\right) && (13)\\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q_1}{A}(1+k)\left(\frac{1}{1-\epsilon(1+k)} + \frac{k}{1+\epsilon\frac{1+k}{k}}\right) && (14)\\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q_1}{A}(1+k)^2\left(1+\epsilon^2\frac{(1+k)^2}{k} + \ldots\right) && (15)
\end{aligned}
$$

L'andamento della eq. 15 è quello di una parabola con la concavità rivolta verso l'alto (opposta cioè all'andamento della eq. 10).
Da queste considerazioni si deduce quindi che il punto P non può essere un punto di equilibrio stabile per nessuna carica, in accordo al principio generale della impossibilità di generare potenziali elettrostatici con punti di equilibrio stabile.