

Prova scritta di
FISICA PER SCIENZE BIOLOGICHE MOLECOLARI A e C
e
FISICA PER SCIENZE ECOLOGICHE E DELLA BIODIVERSITA'
13.01.2009

Esercizio 1 - Meccanica

Un corpo di massa $m = 750 \text{ g}$ si muove in un piano orizzontale di moto circolare uniforme a causa di un filo inestensibile, di massa trascurabile e lunghezza $L = 60 \text{ cm}$, compiendo 2 giri al secondo.

Domanda n. 1: Calcolare la tensione del filo, trascurando inizialmente la presenza della gravità.

Domanda n. 2: Se si considera la gravità, come cambia la descrizione del moto del corpo (in particolare quale angolo rispetto al piano orizzontale forma il filo)?

Ad un certo istante il filo si rompe, e il corpo si muove liberamente (si trascuri sia l'angolo che il filo formava con il piano orizzontale sia effetti viscosi dovuti all'aria).

Domanda n. 3: Calcolare la velocità del corpo subito dopo la rottura del filo (utilizzando un sistema di riferimento bidimensionale xz con z verticale, x opportunamente orientato, e origine nel punto stesso in cui si trova il corpo al momento della rottura del filo).

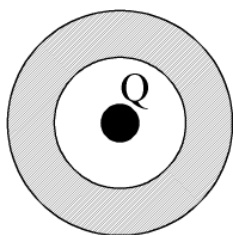
Domanda n. 4: Calcolare la posizione (x, z) del corpo dall'origine al tempo $t = 1.5 \text{ s}$ dopo la rottura del filo.

Domanda n. 5: Calcolare l'energia cinetica del corpo al momento della rottura del filo.

Domanda n. 6: Calcolare dopo quanto tempo dalla rottura del filo l'energia cinetica del corpo risulta aumentata del 25%.

Esercizio 2 - Elettromagnetismo

Una sfera di materiale isolante (raggio $a = 15 \text{ cm}$, densità di carica volumica uniforme $\rho = 3.54 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^3$) è posta come in figura, al centro di una sfera cava metallica (raggio interno $b = 35 \text{ cm}$, raggio esterno $c = 60 \text{ cm}$).



Domanda n. 7: Trovare il modulo del campo elettrico generato da questo sistema, distinguendo chiaramente le diverse regioni, e indicando la direzione del vettore campo elettrico.

Domanda n. 8: Calcolare l'espressione del potenziale elettrico in un punto generico dello spazio.

Una pallina (schematizzabile come un punto materiale) di massa $m = 25 \text{ g}$ e carica $z = 7.5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$ può essere posta nella regione circostante, senza perturbare la distribuzione delle cariche sulle sfere.

Domanda n. 9: Disegnare in un grafico l'andamento della energia potenziale elettrostatica al variare della distanza della pallina dal centro delle sfere.

Domanda n. 10: Qual è la minima distanza dal centro delle sfere a cui può arrivare la pallina se viene sparata contro il centro del sistema delle due sfere da molto lontano con velocità iniziale $v = 10 \text{ m/s}$?

Soluzioni

Esercizio 1

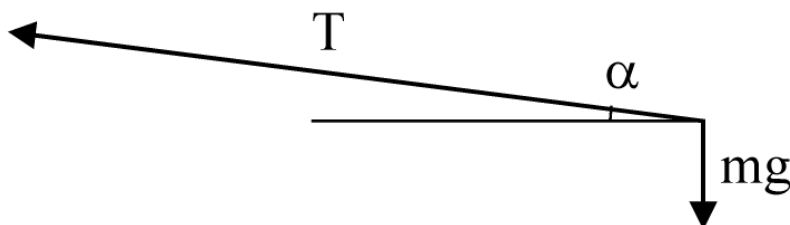
Risposta alla domanda n. 1: Se si trascura l'accelerazione di gravità il piano orizzontale in cui il corpo si muove contiene anche l'altra estremità del filo; l'accelerazione e la forza centripeta che il filo esercita sul corpo sono date dalle espressioni usuali:

$$\omega = 2\pi \text{ girialsecondo} = 12.6 \text{ rad/s} \quad (1)$$

$$a_c = \omega^2 l = 94.7 \text{ m/s}^2 \quad (2)$$

$$F_c = T = m\omega^2 l = 71.1 \text{ N} \quad (3)$$

Risposta alla domanda n. 2: In questo caso il filo deve disporsi in modo che la forza totale (tensione del filo più forza di gravità) sia diretta orizzontalmente. Per questo il filo forma un angolo α rispetto al piano orizzontale come in figura¹. Tenendo conto del fatto che il raggio di



rotazione del corpo non è più la lunghezza completa del filo, le equazioni che determinano il valore di α e di T sono quindi:

$$T \sin \alpha = mg \quad (4)$$

$$T \cos \alpha = m\omega^2 l \cos \alpha \quad (5)$$

Per il valore di T calcolato sopra, si può stimare α piccolo, per cui — risolvendo il sistema e utilizzando l'approssimazione per piccoli angoli:

$$\sin \alpha = \frac{g}{\omega^2 l} \quad (6)$$

$$\alpha \simeq \frac{g}{\omega^2 l} = 5.9^\circ \quad (7)$$

$$T = 71.1 \text{ N} \quad (8)$$

Si verifica così che il modulo della tensione del filo non cambia, ma cambia solamente l'orientazione del filo stesso.

Risposta alla domanda n. 3: Utilizzando il sistema di riferimento suggerito, con x tangente alla traiettoria nel punto in cui si trova il corpo quando il filo si rompe e z diretto verso il basso, le condizioni iniziali di velocità sono:

$$v_x(0) = \omega l = 7.5 \text{ m/s} \quad (9)$$

$$v_z(0) = 0 \quad (10)$$

¹La figura non è in scala, dato che l'angolo α disegnato è più grande di quanto risulta con i dati numerici utilizzati in questo problema.

Risposta alla domanda n. 4: La legge oraria del corpo, espressa mediante le coordinate x e z vale:

$$x(t) = v_x(0) t \quad (11)$$

$$z(t) = \frac{1}{2} g t^2 \quad (12)$$

$$v_x(t) = v_x(0) \quad (13)$$

$$v_z(t) = g t \quad (14)$$

Per $t = 1.5 \text{ s}$ si ha:

$$(x, z) = (1.5 v_x(0), 1.5^2 g/2) = (11.3, 11.0) \text{ m} \quad (15)$$

Risposta alla domanda n. 5: L'energia cinetica al momento della rottura del filo vale:

$$K_1 = \frac{1}{2} m v_x^2(0) = 21.3 \text{ J} \quad (16)$$

Risposta alla domanda n. 6: Tenuto conto delle eq. 13-14, si ha per l'energia cinetica del corpo ad un generico istante t :

$$K(t) = \frac{1}{2} m [v_x^2(0) + g^2 t^2] \quad (17)$$

Se H è il tempo per cui l'energia cinetica del corpo risulta aumentata del 25%, deve valere:

$$K(H) = 1.25 K(0) \quad (18)$$

$$\frac{1}{2} m [v_x^2(0) + g^2 H^2] = 1.25 \frac{1}{2} m v_x^2(0) \quad (19)$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{v_x(0)}{g} = 0.38 \text{ s} \quad (20)$$

Esercizio 2

Risposta alla domanda n. 7: Il sistema di cariche ha una evidente simmetria sferica che permette di utilizzare il teorema di Gauss per calcolare il modulo del campo elettrico nei diversi punti dello spazio. Il campo è sempre diretto radialmente dal centro delle sfere, e per esprimere il modulo è necessario distinguere le quattro regioni:

regione 1: all'interno della sfera carica: $x \leq a$

regione 2: regione compresa tra le due sfere: $a < x < b$

regione 3: all'interno della sfera metallica: $b < x < c$

regione 4: all'esterno della sfera metallica: $c < x$

Nella regione 3 il campo è nullo (per definizione di metallo): la sfera carica interna attira sulla superficie interna della sfera cava metallica le cariche di segno opposte, e respinge sulla superficie esterna le cariche dello stesso segno, sino ad una situazione di equilibrio, in cui il campo all'interno del metallo è nullo. Per le altre regioni si trova:

$$E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \quad \text{regione 1} \quad (21)$$

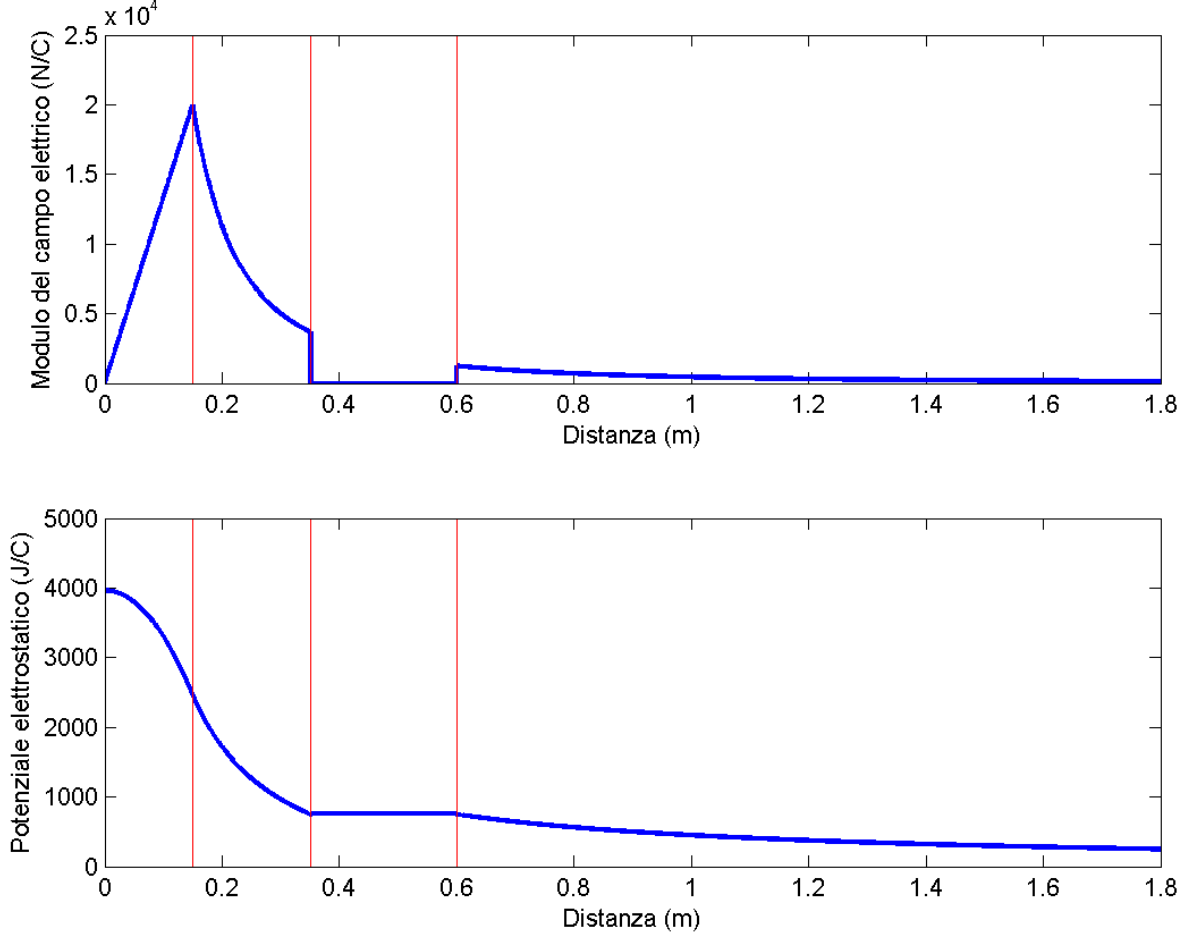
$$Q = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho = 50 \text{ nC} \quad (22)$$

$$E(a) = 19991 \text{ N/C}$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \text{regione 2} \quad (23)$$

$$E(r) = 0 \quad \text{regione 3} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
E(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{r^2} & \text{regione 4} \\
E(c) &= 1249 \text{ N/C}
\end{aligned} \tag{25}$$



Risposta alla domanda n. 8: Per il calcolo del potenziale occorre stabilire il punto di riferimento (in cui vale $V = 0$): in questo caso si può scegliere un qualunque punto a distanza molto grande (infinita) dal centro delle sfere. Partendo quindi dalla regione 4, integrando l'espressione del modulo del campo elettrico, si ottiene per il potenziale $V(r)$:

$$V(\infty) = 0 \tag{26}$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{r} \quad \text{regione 4} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
V(c) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{c} = 750 \text{ J/C} \\
V(r) &= V(c) & \text{regione 3}
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
V(b) &= V(c) \\
V(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left[\frac{Q}{r} - \frac{Q}{b} \right] + V(b) & \text{regione 2}
\end{aligned} \tag{29}$$

$$V(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left[\frac{Q}{a} - \frac{Q}{b} + \frac{Q}{c} \right] = 2463 \text{ J/C}$$

$$\begin{aligned}
V(r) &= \frac{\rho}{6\epsilon_o}(r^2 - a^2) + V(a) && \text{regione 1} \\
V(0) &= \frac{\rho}{6\epsilon_o}(-a^2) + V(a) = 3962 \text{ J/C}
\end{aligned} \tag{30}$$

Risposta alla domanda n. 9: La figura mostra l'andamento del modulo del campo e del potenziale in funzione della distanza; le righe rosse verticali delimitano le quattro regioni.

Risposta alla domanda n. 10: Dato che si conosce il potenziale elettrostatico della regione in cui si muove la pallina, è possibile calcolare l'energia potenziale (elettrostatica) che la pallina ha al variare della sua distanza dalle sfere:

$$U = zV \tag{31}$$

Dato che la pallina parte da molto lontano, la sua energia totale è:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 + U(\infty) = \frac{1}{2}mv^2 = 1.25 \text{ J} \tag{32}$$

Applicando il principio di conservazione dell'energia, la minima distanza D che la pallina può raggiungere corrisponde a quella per cui l'energia potenziale elettrostatica è uguale all'energia totale (e l'energia cinetica è nulla); si verifica facilmente che $D > c$, dato che l'energia potenziale in c è $zV(c) = 5.62 \text{ J}$, molto più grande cioè dell'energia totale posseduta dalla pallina. Quindi:

$$E_{tot} = zV(D) \tag{33}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = z \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{D} \tag{34}$$

$$D = \frac{2}{4\pi\epsilon_o} \frac{Qz}{mv^2} = 2.7 \text{ m} \tag{35}$$