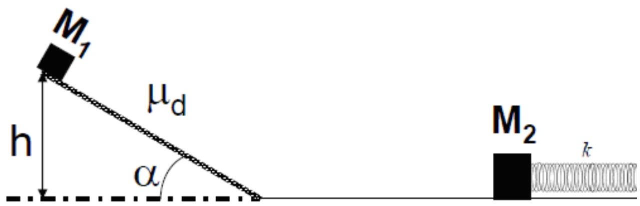
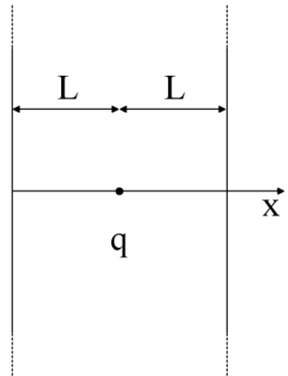
Prova scritta di
FISICA PER SCIENZE BIOLOGICHE MOLECOLARI A e C
e
FISICA PER SCIENZE ECOLOGICHE E DELLA BIODIVERSITA'
8.7.2009

Esercizio 1 - Meccanica

Su una rampa, rappresentabile come un piano inclinato scabro inclinato di un angolo $\alpha = 30°$ rispetto all'orizzontale, è appoggiato un corpo di massa M_1. Fra il corpo e la rampa vi sono un coefficiente di attrito dinamico μ_d e un coefficiente di attrito statico μ_s. All'istante iniziale il corpo si trova in quiete ad una quota h lungo la verticale rispetto all'estremità inferiore della rampa.
Domanda n. 1: Trovare μ_s^*, il valore minimo del coefficiente di attrito statico, per il quale il corpo permane nello stato di quiete.
Se il coefficiente di attrito statico è inferiore al valore limite μ_s^* trovato, il corpo inizierà a scivolare verso il basso.
Domanda n. 2: Si calcoli (in funzione di α , M_1, μ_d e h) con quale velocità v^* il corpo giunge alla fine della rampa.
L'estremità inferiore della rampa è raccordata ad un piano orizzontale senza attrito. Il corpo continua a muoversi lungo il piano orizzontale finché non va ad urtare in modo completamente anelastico contro un corpo di massa $M_2 = 3M_1$, che si trova in quiete sul piano orizzontale senza attrito. Il corpo di massa M_2 è legato ad una molla orizzontale di costante elastica k inizialmente in posizione di equilibrio, che ha l'altra estremità fissata ad una parete. Si calcoli (in funzione di v^*, M_1, e k):
Domanda n. 3: il periodo T di oscillazione della molla dopo l'urto;
Domanda n. 4: l'ampiezza massima A di oscillazione della molla dopo l'urto.
Domanda n. 5: Sostituire i valori numerici $M_1 = 8\ kg$, $\mu_d = 0.29$, $h = 10\ m$, $k = 512\ N/m$, nelle espressioni trovate sopra e fornire i risultati numerici per μ_s, v^*, T e A.





Esercizio 2 - Elettromagnetismo

Nel piano x, y sono disposti due fili infiniti, ciascuno con densità di carica lineare λ. I due fili sono disposti parallelamente all'asse y in posizione $x = -L$ e $x = L$.
Domanda n. 6: Trovare il campo elettrico generato da questa distribuzione di carica nei punti di coordinata $(x, 0)$, con $-L < x < L$, specificando chiaramente modulo, direzione e verso.
Una carica q è posizionata nell'origine del sistema di riferimento e può muoversi solo lungo la direzione x.
Domanda n. 7: Scrivere l'energia potenziale che la carica ha in funzione della sua posizione x,

sempre nella regione compresa tra i due fili ($-L < x < L$), utilizzando come posizione in cui l'energia potenziale si annulla l'origine del sistema di riferimento.
Domanda n. 8: Qual è la condizione sul segno delle cariche (λ e q) tale che l'energia potenziale assuma un valore minimo nell'origine?
Domanda n. 9: Assumendo $L = 120\ cm$, $\lambda = 50\ nC/cm$, $q = 14\ \mu C$, calcolare il valore dell'energia potenziale nei punti di coordinata: $x = -5, 0, +5\ cm$
Domanda n. 10: Nelle condizioni in cui l'energia potenziale è minima nel'origine, descrivere il moto della carica q nell'intorno, trovando la costante elastica che ne governa il moto per $x \ll L$.

Soluzioni

Esercizio 1

La forza normale esercitata dal vincolo è $N = M_1 g \cos\alpha$, la componente della forza peso lungo il piano inclinato è $F_p = M_1 g \sin\alpha$, la forza di attrito statica è al massimo $-\mu_s N = -\mu_s M_1 g \cos\alpha$.
Risposta alla domanda n. 1: La condizione di quiete è raggiunta in condizioni limite quando

$$M_1 g \sin\alpha - \mu_s^* M_1 g \cos\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \mu_s^* = \tan\alpha$$

Risposta alla domanda n. 2: Applicando la conservazione dell'energia meccanica, e tenendo conto del lavoro svolto sul corpo dalla forza di attrito dinamico, si ottiene la velocità con cui il corpo M_1 giunge in fondo al piano:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_1 v^{*2} &= M_1 g h - \mu_d M_1 g \cos\alpha \frac{h}{\sin\alpha} \\ v^* &= \sqrt{2gh\left(1 - \frac{\mu_d}{\tan\alpha}\right)} \end{aligned}$$

Il corpo, una volta giunto sul piano orizzontale liscio, continua a muoversi con velocità v^*.
Risposta alla domanda n. 3: Nell'urto totalmente anelastico i due corpi si uniscono, e il sistema (molla-massa) può oscillare con periodo dato dalla legge usuale:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M_{tot}}{k}} = 4\pi\sqrt{\frac{M_1}{k}}$$

Risposta alla domanda n. 4: Nell'urto si conserva la quantità di moto. La velocità con cui i due corpi (uniti) procedono dopo l'urto definisce l'energia totale del sistema, che corrisponde alla massima ampiezza A secondo le relazioni:

$$\begin{aligned} M_1 v^* &= M_{tot}\, v \quad \rightarrow \quad v = \frac{v^*}{4} \\ E &= \frac{1}{2} M_{tot} v^2 = \frac{1}{2} k A^2 \\ A &= \frac{v^*}{2}\sqrt{\frac{M_1}{k}} \end{aligned}$$

Risposta alla domanda n. 5:

$$\begin{aligned} \mu_s^* &= 0.577 \\ v^* &= 9.88\ m/s \\ T &= 1.57\ s \\ A &= 0.618\ m \end{aligned}$$

Esercizio 2

Risposta alla domanda n. 6: Utilizzando il teorema di Gauss si trova che il campo generato da una distribuzione lineare di carica dipende dal rapporto λ/r (dove r è la distanza dal filo. Utilizzando il principio di sovrapposizione, per il campo elettrico nella regione intermedia ai fili si trova:

$$\begin{aligned}
E(\vec{x}) &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\,\lambda\left[\frac{\hat{x}}{L+x}-\frac{\hat{x}}{L-x}\right] \\
&= -\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\frac{x}{L^2-x^2}\,\hat{x}
\end{aligned}$$

Risposta alla domanda n. 7: Dalla definizione di potenziale:

$$\begin{aligned}
V(x) &= -\int_0^x E(\vec{x})\,d\vec{x} \\
&= \int_0^x \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{L^2-x^2}\,d(x^2) \\
&= \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\,\lambda\,\ln\left(\frac{L^2}{L^2-x^2}\right)
\end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned}
V(x) &= -\int_0^x E(\vec{x})\,d\vec{x} \\
&= \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\,\lambda\int_x^0\left[\frac{1}{L+x}-\frac{1}{L-x}\right]dx \\
&= \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\,\lambda\left[\ln\left(\frac{L}{L+x}\right)+\ln\left(\frac{L}{L-x}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\,\lambda\,\ln\left(\frac{L^2}{L^2-x^2}\right)
\end{aligned}$$

Risposta alla domanda n. 8: L'energia potenziale $U = qV(x)$ assume un minimo quando il prodotto $q\lambda$ è positivo, cioè quando la carica q ha lo stesso segno della distribuzione lineare λ.
Risposta alla domanda n. 9:

$$\begin{aligned}
U(x) &= 0 && \text{per } x = 0 \\
U(x) &= 2.2\;10^{-3}\;J && \text{per } x = \pm 5\;cm
\end{aligned}$$

Risposta alla domanda n. 10: Per $x \ll L$, la carica si muove compiendo piccole oscillazioni; la costante elastica equivalente si ricava approssimando la forza elettrica:

$$\begin{aligned}
F(\vec{x}) &= qE(\vec{x}) = -\frac{q\lambda}{\pi\epsilon_0}\frac{\vec{x}}{L^2-x^2} \\
&\sim -\frac{q\lambda}{\pi\epsilon_0}\frac{\vec{x}}{L^2} \\
k_{eq} &= \frac{q\lambda}{\pi\epsilon_0 L^2}
\end{aligned}$$