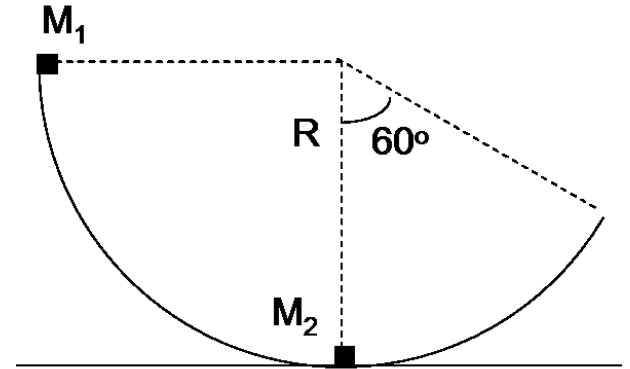


Prova scritta di
FISICA PER SCIENZE BIOLOGICHE MOLECOLARI A, B e C
e
FISICA PER SCIENZE ECOLOGICHE E DELLA BIODIVERSITA'
22.01.2010

Esercizio 1 - Meccanica

Una guida senza attrito a forma di settore cilindrico di raggio $R = 20\text{ m}$ si estende intorno al suo asse lungo un arco di 150° , di cui 90° a sinistra della verticale (si veda la figura) e i restanti 60° a destra. La guida è fissata rigidamente al piano.

La guida è appoggiata su un piano orizzontale infinito. Al tempo iniziale un corpo di massa $M_1 = 4.5\text{ kg}$ viene lasciato libero in stato di quiete all'interno di una guida alla sommità del bordo sinistro, e sul fondo della guida si trova in quiete un corpo di massa $M_2 = 5.5\text{ kg}$.



Il corpo M_1 inizia a scivolare verso il basso e urta frontalmente in modo perfettamente elastico il corpo M_2 . Il corpo di massa M_1 dopo l'urto rimane all'interno della guida e scivola avanti e indietro intorno alla posizione di minimo.

Dopo l'urto il corpo di massa M_2 inizia a scivolare lungo la parte destra della guida, per poi lasciarla e proseguire nel vuoto. L'attrito dell'aria è considerato trascurabile in tutto il problema. L'intensità del campo gravitazionale è $g = 9.81\text{ m/s}^2$.

Si calcoli (prima con una formula algebrica e poi numericamente):

Domanda n. 1: il periodo delle piccole oscillazioni del corpo di massa M_1 dopo l'urto;

Domanda n. 2: l'ampiezza massima delle oscillazioni del corpo di massa M_1 dopo l'urto;

Domanda n. 3: la massima altezza rispetto al piano orizzontale raggiunta dal corpo di massa M_2 dopo l'urto;

Domanda n. 4: la distanza del punto di impatto del corpo di massa M_2 con il piano orizzontale dal punto di minimo della guida.

Esercizio 2 - Elettromagnetismo

Un piano infinito carico di materiale isolante con densità superficiale di carica uniforme $\sigma = 100\text{ }\mu\text{C/m}^2$ separa lo spazio in due semispazi.

Di fronte al piano, in uno dei due semispazi, viene fissata una carica puntiforme di carica $q_1 = 30\text{ }\mu\text{C}$ nel punto P alla distanza $d = 30\text{ cm}$ dal piano.

Domanda n. 5: Si trovi il modulo del campo elettrico nei due punti collocati nei due semispazi a distanza $d/2$ dal piano lungo la retta passante per il punto P perpendicolare al piano.

Domanda n. 6: Data una particella di carica $q_2 = 10\text{ }\mu\text{C}$ e di massa $m = 10\text{ mg}$, trovare un punto dello spazio (se esiste) in cui, se lasciata libera in quiete, la particella permanga nel suo stato di quiete.

Domanda n. 7: Se la particella viene lasciata libera in quiete nel punto di mezzo fra il punto P e il piano, calcolare con che velocità arriva sul piano.

Nota: si trascuri in tutto il problema l'effetto della gravità e l'attrito dell'aria.

Soluzioni

Esercizio 1

Risposta alla domanda n. 1: Il corpo M_1 oscilla come un pendolo, quindi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 9.0 \text{ s}$$

Risposta alla domanda n. 2: Il corpo M_1 arriva in prossimità del fondo della guida con una velocità calcolabile applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$v_1 = \sqrt{2gR} = 19.8 \text{ m/s}$$

Le velocità dopo l'urto elastico risultano quindi:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} v_1 = -1.98 \text{ m/s} \\ u_2 &= \frac{2M_1}{M_1 + M_2} v_1 = 17.8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

L'ampiezza massima delle oscillazioni θ_{max} è ricavabile dal valore della velocità angolare $\dot{\theta}$, a sua volta ricavabile da u_1 :

$$\begin{aligned} \theta_{max} &= \frac{\dot{\theta}}{\omega} = \frac{\frac{u_1}{R}}{\sqrt{\frac{g}{R}}} \\ \theta_{max} &= \frac{u_1}{\sqrt{gR}} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \frac{\sqrt{2gR}}{\sqrt{gR}} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \sqrt{2} \\ \theta_{max} &= 0.14 \text{ rad} = 8.1^\circ \\ x &\sim \theta_{max} R \sim 2.8 \text{ m} \end{aligned}$$

Risposta alla domanda n. 3: Dopo l'urto M_2 risale sino alla fine della guida, dove arriva con velocità v_2 calcolabile applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_2 u_2^2 &= \frac{1}{2} M_2 v_2^2 + M_2 g \frac{R}{2} \\ v_2 &= \sqrt{u_2^2 - gR} = 11 \text{ m/s} \end{aligned}$$

La direzione iniziale è data dalla tangente alla guida, quindi M_2 ha queste componenti orizzontale e verticale:

$$\begin{aligned} v_{2x} &= v_2 \cos(60) = \frac{v_2}{2} = 5.5 \text{ m/s} \\ v_{2y} &= v_2 \sin(60) = v_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 9.6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

L'altezza massima rispetto alla rampa che può raggiungere vale quindi:

$$h_{max} = \frac{R}{2} + \frac{v_{2y}^2}{2g} = 14.7 \text{ m}$$

Risposta alla domanda n. 4: La gittata di un corpo lanciato da una altezza iniziale Y_i (in questo caso uguale a $R/2$), con componenti della velocità v_{2x} e v_{2y} , risulta:

$$x_f = \frac{v_{2x} (v_{2y} + \sqrt{v_{2y}^2 + 2gY_i})}{g} = 14.9 \text{ m}$$

Esercizio 2

Risposta alla domanda n. 5: Il campo elettrico nei punti distanti $\pm d/2$ dal piano, e posti lungo la retta passante per P è dato dalla somma del campo generato dal piano e del campo generato dalla carica puntiforme; chiamando A il punto posto nello stesso semispazio di P si ha:

$$\begin{aligned} E(A) &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q_1}{d^2} = -6.34 \cdot 10^6 \text{ N/C} \\ E(A') &= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q_1}{9d^2} = -6.98 \cdot 10^6 \text{ N/C} \end{aligned}$$

indicando con i valori negativi il verso del campo diretto dal punto P verso il piano.

Risposta alla domanda n. 6: Il modulo del campo elettrico nella regione compresa tra il piano e il punto P vale:

$$E(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{(x-d)^2}$$

e si annulla per:

$$x_o = d - \sqrt{\frac{1}{2\pi} \frac{q_1}{\sigma}} = 0.081 \text{ m}$$

Risposta alla domanda n. 7: La variazione di energia potenziale elettrostatica tra il punto di partenza della carica e il piano permette di calcolare l'energia cinetica che essa ha quando arriva al piano, dato che risulta positiva:

$$\begin{aligned} \Delta U &= q_2[U(0) - U(d/2)] = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d} + q_2 \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{d}{2} \\ K &= -\Delta U > 0 \\ v &= \sqrt{\frac{2K}{m}} = 321 \text{ m/s} \end{aligned}$$