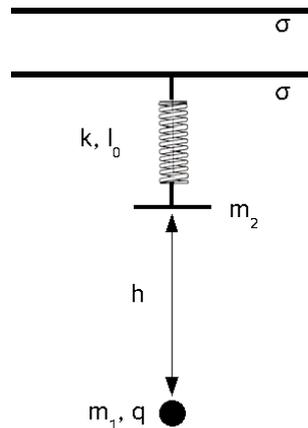


Prova scritta di
FISICA PER SCIENZE BIOLOGICHE MOLECOLARI A, B e C
e
FISICA PER SCIENZE ECOLOGICHE E DELLA BIODIVERSITA'
(riservato a studenti lavoratori e fuori corso)
09.04.2010

Esercizio A: Meccanica-Elettrostatica



Si consideri il sistema mostrato in figura, in cui un punto materiale di massa $m_1 = 100\text{ g}$ e carica $q = +2\text{ }\mu\text{C}$ è inizialmente in quiete nel campo elettrico generato da due piani infiniti, paralleli e uniformemente carichi con densità superficiale di carica $\sigma = -4.425 \cdot 10^{-8}\text{ C/m}^2$. Un molla ideale di costante elastica $k = 2.5\text{ N/m}$ e lunghezza a riposo $l_0 = 1\text{ m}$ è appesa al piano inferiore, come mostrato in figura, con l'estremo libero saldato ad un piattello di massa $m_2 = 178\text{ g}$. All'inizio la molla è a riposo con il piattello a distanza $h = 20\text{ m}$ dal punto materiale. Si trascurino sia la forza di gravità che gli attriti.

Determinare:

Domanda n. 1: il campo elettrico in tutto lo spazio;

Domanda n. 2: la velocità v del punto materiale nell'istante in cui urta il piattello saldato all'estremo libero della molla;

Domanda n. 3: l'energia dissipata nell'urto tra il punto materiale e il piattello, assumendo che l'urto sia completamente anelastico;

Domanda n. 4: la posizione di equilibrio e il periodo di oscillazione del sistema punto materiale-piattello;

Domanda n. 5: la sua legge oraria.

Soluzioni

Esercizio A:

Risposta alla domanda n. 1: Il campo elettrico è la sovrapposizione dei campi elettrici generati dai due piani infiniti carichi, quindi tra i due piani è nullo, mentre altrove è ortogonale ai piani, con verso entrante, e modulo costante. Prendendo l'asse Z ortogonale ai due piani e orientato verso l'alto

$$\mathbf{E} = \pm \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{\mathbf{z}} = \left(\mp 5 \frac{kN}{C} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

dove il segno $+$ vale nella parte di spazio sotto il piano inferiore, mentre il segno $-$ in quella sopra il piano superiore (nel risultato numerico, vice versa in quello simbolico).

Risposta alla domanda n. 2: Prima di entrare in contatto con la molla, il punto materiale è soggetto ad una forza conservativa uniforme

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -q \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{\mathbf{z}} = (0.01N) \hat{\mathbf{z}}$$

Il lavoro compiuto da questa forza nel tratto h è qEh , quindi dal teorema delle forze vive segue che

$$qEh = \frac{1}{2} m_1 v^2$$

da cui si ottiene la velocità del punto materiale all'istante in cui urta la molla

$$v = \sqrt{\frac{2hqE}{m_1}} = \sqrt{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{2hq}{m_1}} = 2m/s$$

Risposta alla domanda n. 3: Nell'urto si conserva la quantità di moto del sistema punto materiale + piattello, quindi, tenendo conto che l'urto è completamente anelastico,

$$m_1 \mathbf{v} = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_2$$

da cui si può ricavare la velocità subito dopo l'urto

$$\mathbf{v}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{2hq}{m_1}} \hat{\mathbf{z}} = (0.72m/s) \hat{\mathbf{z}}$$

L'energia dissipata nell'urto ΔE è uguale alla variazione di energia cinetica cambiata di segno

$$\Delta E = \frac{1}{2} (m_1 v^2 - (m_1 + m_2) v_2^2) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} hq = 0.128J$$

Risposta alla domanda n. 4: Dopo l'urto, oltre alla forza elettrica calcolata nella domanda 2, si deve considerare anche la forza elastica esercitata dalla molla. Dalla seconda legge di Newton, prendendo l'origine dell'asse z in corrispondenza della posizione iniziale dell'estremo libero della molla, segue che

$$(m_1 + m_2) \ddot{z} = -kz + qE$$

da cui

$$\ddot{z} + \omega^2 z = \frac{qE}{m_1 + m_2}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

Questa è l'equazione di un oscillatore armonico che oscilla intorno alla posizione di equilibrio $z_{eq} = qE/k = 0.004$ m con

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = 3rad/s, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2.1s$$

Risposta alla domanda n. 5: La soluzione dell'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea del punto precedente è

$$z(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) + z_{eq}, \quad \dot{z}(t) = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t)$$

dove A e B sono due costanti da determinare imponendo le condizioni iniziali, ossia posizione e velocità all'istante $t^* = 0$ in cui il punto materiale urta la molla

$$z(t^*) = 0, \quad \dot{z}(t^*) = v_2 = 0.72m/s$$

da cui

$$A = \frac{v_2}{\omega} = \sqrt{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{2hq}{k} \frac{m_1}{m_1 + m_2}} = 0.24m, \quad B = -\frac{qE}{k} = \frac{q}{k} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -0.004m$$

Quindi, la legge oraria è

$$z(t) = \sqrt{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{2hq}{k} \frac{m_1}{m_1 + m_2}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} t\right) - \frac{q}{k} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} t\right)\right)$$