

## Prova scritta di FISICA

PER SCIENZE BIOLOGICHE MOLECOLARI A, B e C (ord. 509)  
PER SCIENZE ECOLOGICHE E DELLA BIODIVERSITA' (ord. 509)  
PER BIOLOGIA B e C (ord. 270)  
10.06.2010

### Esercizio A: Meccanica

Un aeroplano giocattolo (di massa complessiva  $m_a$ ) ha un motore che gli permette di muoversi con una velocità costante di modulo  $v_a$ .

Viene legato al soffitto con una corda di lunghezza  $L$  e il suo motore viene avviato. In queste condizioni, sotto l'azione della forza di gravità, si muove su una traiettoria piana circolare orizzontale, con la corda che forma un angolo  $\theta$  con la verticale.

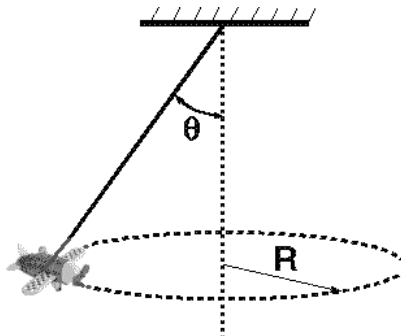
**Domanda n. 1:** Calcolare la relazione che esprime la tensione  $T$  della corda in funzione di  $m_a$  e  $\theta$ .

**Domanda n. 2:** Calcolare la relazione che esprime la dipendenza dell'angolo  $\theta$  da  $v_a$  e  $L$ .

**Domanda n. 3:** Utilizzando i valori numerici  $v_a = 2.4 \text{ m/s}$  e  $L = 1.46 \text{ m}$ , calcolare l'angolo  $\theta$ .

**Domanda n. 4:** Calcolare (nelle stesse condizioni) la tensione della corda, supponendo  $m_a = 0.75 \text{ kg}$ .

**Domanda n. 5:** Se la tensione massima che la corda può esercitare sull'aeroplano è 10 volte quella trovata al punto precedente, calcolare l'angolo massimo che l'aeroplano può arrivare ad avere, e qual è la velocità necessaria.



### Esercizio B: Elettrostatica

Si consideri il sistema costituito da una sfera conduttrice piena, di raggio  $R_1$ , e da una sfera cava conduttrice, di spessore trascurabile e raggio  $R_2$ , concentriche e con  $R_2 > R_1$ . Sulla sfera piena è distribuita una carica  $Q_1$  e su quella cava una carica  $Q_2$ . Calcolare:

**Domanda n. 6:** il campo elettrico (modulo, direzione e verso) in tutto lo spazio;

**Domanda n. 7:** il potenziale dei due conduttori.

Una carica  $q$  di massa  $m$  parte da ferma dalla superficie della sfera piena e viene accelerata sotto l'azione del campo elettrostatico.

**Domanda n. 8:** Calcolare la velocità con cui arriva sulla sfera cava, assumendo i seguenti valori numerici:  $q = 0.1 \mu\text{C}$ ,  $m = 1 \text{ mg}$ ,  $R_1 = 10 \text{ cm}$ ,  $R_2 = kR_1 = 6R_1$ ,  $Q_1 = 100 \mu\text{C}$ ,  $Q_2 = 300 \mu\text{C}$ .

# Soluzioni

## Esercizio A: Meccanica

Le forze agenti sull'aeroplano sono la forza peso  $mg$  (diretta verso il basso) e la tensione  $T$ , che forma un angolo  $\theta$  con la verticale.

**Risposta alla domanda n. 1:** La componente verticale di  $T$  equilibra la forza peso, per cui:

$$T \cos \theta = m_a g$$

**Risposta alla domanda n. 2:** La traiettoria seguita dall'aeroplano richiede una accelerazione centripeta di modulo

$$a_c = \frac{v^2}{L \sin \theta}$$

che deriva dalla componente orizzontale di  $T$ . Si ha pertanto:

$$\begin{aligned} g \tan \theta &= \frac{v^2}{L \sin \theta} \\ \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} &= \frac{v^2}{gL} \end{aligned}$$

Ponendo

$$x = \frac{v^2}{gL}$$

si ottiene

$$\cos^2 \theta + x \cos \theta - 1 = 0$$

che può essere risolta facilmente; la soluzione fisica valida è:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\sqrt{x^2 + 4} - x}{2} \\ \theta &= \arccos \left[ \frac{\sqrt{x^2 + 4} - x}{2} \right] \end{aligned}$$

**Risposta alla domanda n. 3:** Sostituendo i valori dati si ha:

$$\theta = 0.611 \text{ rad} = 35^\circ$$

**Risposta alla domanda n. 4:**

$$T = 8.98 \text{ N}$$

**Risposta alla domanda n. 5:**

$$\begin{aligned} \theta_n &= 1.49 \text{ rad} = 85.3^\circ \\ v_n &= 13.2 \text{ m/s} \end{aligned}$$

## Esercizio B: Elettrostatica

**Risposta alla domanda n. 6:** Il campo elettrico è nullo all'interno della sfera conduttrice ( $r < R_1$ ), mentre tra la sfera e la corona sferica ( $R_1 < r < R_2$ ) è

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

e all'esterno è:

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

**Risposta alla domanda n. 7:** Assumendo un potenziale nullo all'infinito, il potenziale della sfera cava è

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2}{R_2}$$

e quello della sfera piena

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} \right)$$

**Risposta alla domanda n. 8:** La conservazione dell'energia permette di eguagliare l'energia cinetica acquistata dalla carica con la differenza di energia potenziale:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= U_{in} - U_{fin} = q(V_1 - V_2) \\ &= q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} - \frac{Q_1 + Q_2}{R_2} \right) \\ v &= \sqrt{\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{m} \frac{Q_1}{R_1} \frac{k-1}{k}} \\ &= 1.22 \cdot 10^3 \text{ m/s} \end{aligned}$$