

## Prova scritta di FISICA

PER SCIENZE BIOLOGICHE MOLECOLARI A, B e C (ord. 509)  
PER SCIENZE ECOLOGICHE E DELLA BIODIVERSITA' (ord. 509)  
PER BIOLOGIA A, B e C (ord. 270)  
(riservato a studenti lavoratori e fuori corso)  
24.03.2011

### Esercizio A: Meccanica

Si consideri un sistema costituito da una carrucola cilindrica piena di massa  $M$  e raggio  $R$  appesa al soffitto a cui sono collegati due corpi di massa, rispettivamente,  $m_1$  e  $m_2$  (con  $m_1 > m_2$ ) tramite una fune ideale. All'inizio i due corpi si trovano in quiete alla stessa altezza  $h$  dal suolo.

Sapendo che la resistenza dell'aria è trascurabile e che la fune non scivola sulla carrucola, determinare:

**Domanda n. 1:** la velocità (modulo, direzione e verso) dei due corpi di massa  $m_1$  e  $m_2$  dopo uno spostamento verticale di un tratto  $L$ ;

**Domanda n. 2:** la velocità angolare della carrucola nello stesso istante;

**Domanda n. 3:** l'accelerazione (modulo, direzione e verso) dei due corpi di massa  $m_1$  e  $m_2$ ;

**Domanda n. 4:** la velocità dei due corpi nell'istante in cui arrivano al suolo se la fune si rompe dopo uno spostamento verticale di un tratto  $L$  rispetto alla posizione iniziale;

**Domanda n. 5:** la velocità angolare della carrucola negli istanti in cui i due corpi toccano il suolo.

### Esercizio B: Elettromagnetismo

Un elettrone, posto nell'origine di un sistema di coordinate  $xyz$ , parte da fermo sottoposto ad un campo elettrico  $\vec{E} = (-E, 0, 0)$ , con  $E > 0$ , che agisce nella parte di spazio definita da  $0 \leq x \leq D$ . Dopo aver percorso un tratto  $D$ , entra in una zona ( $x > D$ ) in cui al posto del campo elettrico  $\vec{E}$  agisce un campo magnetico  $\vec{B} = (0, 0, B)$ , con  $B > 0$ .

**Domanda n. 6:** Si calcoli l'energia cinetica dell'elettrone dopo che esso ha percorso una distanza  $D$  dal punto di partenza.

**Domanda n. 7:** Si dica perché nella zona in cui agisce il campo magnetico la traiettoria è circolare e se ne calcoli il raggio.

**Domanda n. 8:** Proseguendo nel suo moto, in una certa posizione e ad un certo istante l'elettrone si fermerà; calcolare le coordinate di tale posizione e l'istante relativo.

# Soluzioni

## Esercizio A: Meccanica

**Risposta alla domanda n. 1:** Poiché  $m_1 > m_2$  il corpo 1 scende di un tratto  $L$  mentre il corpo 2 sale, sempre di  $L$ . L'energia meccanica del sistema costituito dai due corpi e dalla carrucola si conserva, quindi, ricordandosi che il sistema era inizialmente in quiete, si ottiene:

$$(m_1 + m_2)gh = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + m_2g(h + L) + m_1g(h - L)$$

dove  $I$  rappresenta il momento d'inerzia della carrucola rispetto al suo asse di rotazione e nel nostro caso vale  $MR^2/2$ . La fune è ideale e quindi inestensibile, per cui  $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = v$ ; inoltre  $v = \omega R$  poiché la fune non scivola sulla carrucola. Sostituendo nell'equazione della conservazione dell'energia si ottiene

$$v = \sqrt{2gL \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + I/R^2}} = \sqrt{2gL \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}}$$

quindi, prendendo l'asse  $y$  orientato verso l'alto

$$\mathbf{v}_1 = -v\hat{y}, \quad \mathbf{v}_2 = v\hat{y}$$

**Risposta alla domanda n. 2:** Dalla soluzione del punto precedente segue che la velocità angolare della carrucola nello stesso istante è

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{2gL \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}}$$

**Risposta alla domanda n. 3:** Per determinare l'accelerazione dei due corpi 1 e 2 bisogna scrivere la seconda equazione di Newton per entrambi e l'equazione del momento torcente applicato alla carrucola. Prendendo l'asse  $y$  come nella risposta alla prima domanda e il corpo 1 a destra, si ottiene:

$$\begin{aligned} T_1 - m_1g &= m_1a_1 \\ T_2 - m_2g &= m_2a_2 \\ \tau &= (T_2 - T_1)R = I\alpha \end{aligned}$$

dove  $T_1$  e  $T_2$  sono le tensioni esercitate dalla fune, rispettivamente, sul corpo 1 e 2, mentre  $\alpha$  rappresenta l'accelerazione angolare della carrucola.

Essendo la fune inestensibile  $a_2 = -a_1 = a$ , inoltre  $a = -\alpha R$  poiché la fune non slitta sulla carrucola. Quindi si ottiene che

$$\begin{aligned} a &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + I/R^2}g = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}g \\ \mathbf{a}_1 &= -a\hat{y}, \quad \mathbf{a}_2 = a\hat{y} \end{aligned}$$

**Risposta alla domanda n. 4:** dopo la rottura della fune i due corpi sono soggetti unicamente alla forza di gravità. La velocità  $v_{1,fin}$  e  $v_{2,fin}$  con cui, rispettivamente, i corpi 1 e 2 raggiungono il suolo si ottiene dalla conservazione dell'energia meccanica

$$m_1 g (h - L) + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,fin}^2$$

$$m_2 g (h + L) + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{2,fin}^2$$

da cui segue

$$v_{1,fin} = \sqrt{2g(h - L) + v_1^2} = \sqrt{2g \frac{h(m_1 + m_2 + M/2) - L(2m_2 + M/2)}{m_1 + m_2 + M/2}}$$

$$v_{2,fin} = \sqrt{2g(h + L) + v_2^2} = \sqrt{2g \frac{h(m_1 + m_2 + M/2) + L(2m_1 + M/2)}{m_1 + m_2 + M/2}}$$

**Risposta alla domanda n. 5:** Dal momento in cui la fune si rompe il momento torcente risultante sulla carrucola è nullo, quindi  $\alpha = 0$  e  $\omega$  rimane costante e uguale al valore nell'istante in cui si spezza la fune, valore già determinato al punto 2.

## Esercizio B: Elettromagnetismo

**Risposta alla domanda n. 6:** L'elettrone, che parte da fermo nell'origine degli assi cartesiani  $xyz$ , ha un moto uniformemente accelerato lungo la direzione delle  $x$  positive, con accelerazione di modulo

$$a = \frac{eE}{m_e}$$

con  $-e$  e  $m_e$  carica e massa dell'elettrone.

Per calcolare l'energia cinetica nel punto  $(D,0,0)$  osservando che l'energia all'inizio è nulla (velocità nulla), per il Teorema dell'Energia cinetica, nella posizione  $D$  l'energia cinetica sarà uguale al lavoro compiuto dalla forza del campo e quindi l'elettrone avrà energia cinetica:

$$K = eED$$

**Risposta alla domanda n. 7:** Nella zona  $x > D$  l'elettrone è sottoposta alla forza di Lorentz

$$\vec{F}_L = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

diretta inizialmente — cioè appena l'elettrone entra nella zona di campo magnetico — verso le  $y$  positive. Essendo questa forza sempre perpendicolare alla velocità e di modulo costante, il moto non può che essere circolare uniforme, e si svolge nel piano  $xy$ ; il raggio è calcolabile applicando la seconda legge di Newton:

$$ev_D B = \frac{m_e v_D^2}{R}$$

$$R = \frac{m_e v_D}{eB}$$

$v_D$  può essere ricavato dalla risposta precedente come:

$$v_D = \sqrt{\frac{2K}{m_e}} = \sqrt{\frac{2eED}{m_e}}$$

da cui segue

$$R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_eED}{e}}$$

**Risposta alla domanda n. 8:** L'elettrone percorre un tratto  $D$  lungo l'asse  $x$ , si sposta verso le  $y$  positive con una traiettoria circolare di raggio  $R$  e alle coordinate  $(D, 2R, 0)$  rientra nella regione del campo elettrico con la velocità diretta lungo le  $x$  negative per ripercorrere un tratto rettilineo lungo  $D$  prima di fermarsi.

Quindi le coordinate in cui la velocità è nulla saranno  $(0, 2R, 0)$  e per avere l'istante in cui si ferma è necessario calcolare i tempi di percorrenza dei tre tratti.

Nel primo tratto, da 0 a  $D$  lungo  $x$ :

$$D = \frac{1}{2} \frac{eE}{m_e} t_1^2$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2m_e D}{eE}}$$

Il secondo tratto, quello semicircolare, è percorso con un tempo pari a metà periodo del moto circolare:

$$t_2 = \frac{T}{2}$$

$$T = \frac{2\pi m_e}{eB}$$

$$t_2 = \frac{\pi m_e}{eB}$$

Nel terzo tratto, lungo come il primo, anche il modulo dell'accelerazione sarà lo stesso (del primo), anche se tale accelerazione è frenante, perciò

$$t_3 = t_1$$

In definitiva l'istante a cui l'elettrone si ferma risulta essere

$$t = \frac{\pi m_e}{eB} + 2\sqrt{\frac{2m_e D}{eE}}$$