

## Prova scritta di FISICA

PER SCIENZE BIOLOGICHE MOLECOLARI A, B e C (ord. 509)  
PER SCIENZE ECOLOGICHE E DELLA BIODIVERSITA' (ord. 509)  
PER BIOLOGIA A, B e C (ord. 270)  
23.06.2011

### Esercizio A: Meccanica

Un cubo di massa  $m_1$  è in quiete su un piano orizzontale scabro. Il cubo è collegato tramite un filo ideale inestensibile (passante da una carrucola ideale di massa nulla) ad un corpo di massa  $m_2$  appeso verticalmente nel vuoto.

**Domanda n. 1:** Determinare il valore minimo del coefficiente di attrito statico  $\mu_{s,min}$  tra il piano e il corpo necessario per mantenere il sistema in equilibrio.

Se  $\mu_s < \mu_{s,min}$  e il coefficiente di attrito dinamico è  $\mu_d$ , determinare:

**Domanda n. 2:** l'accelerazione del corpo di massa  $m_2$ ;

**Domanda n. 3:** dopo quanto tempo il corpo di massa  $m_2$  è sceso di un tratto  $h$ ;

**Domanda n. 4:** la sua velocità in questo stesso istante;

**Domanda n. 5:** il lavoro totale sul corpo di massa  $m_1$  nello stesso spostamento  $h$ .

### Esercizio B: Elettromagnetismo

Una sfera cava di materiale conduttore ha raggio interno  $r_1$  e raggio esterno  $r_2 = 2r_1$ . Su di essa è depositata una carica  $Q$ .

**Domanda n. 6:** Esprimere il modulo del campo elettrico generato dalla sfera in funzione della distanza dal suo centro.

**Domanda n. 7:** Trovare la densità di carica superficiale  $\rho_1$  e  $\rho_2$  presenti sulla superficie interna e su quella esterna, ed esprimere la relazione tra il campo elettrico nelle vicinanze delle due superfici e  $\rho_1$  e  $\rho_2$ .

**Domanda n. 8:** Trovare l'espressione del potenziale elettrico generato dalla sfera in funzione della distanza dal suo centro.

Una carica  $q_1$  avente massa  $m_1$  viene posta alla distanza  $x = 10r_2$  dal centro della sfera con velocità iniziale diretta verso la sfera di modulo  $v_1$ .

**Domanda n. 9:** Si calcoli il valore minimo di  $v_1$  affinché la carica  $q_1$  possa arrivare nel centro della sfera (supponendo che la sfera possa essere attraversata senza attrito).

**Domanda n. 10:** Se si verifica la situazione della domanda precedente e la carica  $q_1$  prosegue, con quale velocità arriverà a distanza infinita dalla sfera?

**Domanda n. 11:** Risolvere le domande precedenti, assumendo i seguenti valori numerici:  $Q = 10^{-5} C$ ,  $q_1 = 0.1 \mu C$ ,  $m_1 = 10^{-6} kg$ ,  $r_1 = 0.5 m$ .

# Soluzioni

## Esercizio A: Meccanica

**Risposta alla domanda n. 1:** Siccome il sistema è in equilibrio, sia la risultante delle forze applicate al corpo di massa  $m_1$  che quella delle forze applicate al corpo di massa  $m_2$  devono essere nulle; per il corpo 1 si ottiene quindi:

$$f_s = T, \quad m_1 g = N$$

dove  $f_s$  e  $N$  sono, rispettivamente, la forza di attrito statico e la reazione normale del piano orizzontale mentre  $T$  rappresenta la tensione del filo; per il corpo 2 si ha:

$$m_2 g = T$$

Da queste equazioni, ricordando che  $f_s \leq \mu_s N$ , si ottiene il valore minimo del coefficiente di attrito statico  $\mu_{s,min}$  necessario per mantenere l'equilibrio:

$$\mu_{s,min} \geq \frac{m_2}{m_1}$$

**Risposta alla domanda n. 2:** Se  $\mu_s < \mu_{s,min}$  i due corpi non possono rimanere in equilibrio, e per determinare l'accelerazione con cui si muovono basta applicare la seconda legge di Newton.

Prendendo l'asse  $x$  parallelo al piano orizzontale e orientato nel senso del moto del corpo 1 e l'asse  $y$  verticale e orientato verso il basso, si ottiene per il corpo 1:

$$T - f_d = m_1 a_1, \quad m_1 g = N$$

dove  $f_d$  è la forza di attrito dinamico; mentre per il corpo 2:

$$m_2 g - T = m_2 a_2$$

Inoltre dall'ineestensibilità del filo segue che  $a_1 = a_2$ .

Da queste relazioni, ricordando che  $f_d = \mu_d N$  si ottiene l'accelerazione con cui si muovono i due corpi

$$a = g \frac{m_2 - \mu_d m_1}{m_1 + m_2}$$

**Risposta alla domanda n. 3:** Il corpo 2 si muove di moto uniformemente accelerato, quindi il tempo impiegato a scendere di un tratto  $h$  è semplicemente

$$t_h = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{2h \frac{m_1 + m_2}{g(m_2 - \mu_d m_1)}}$$

**Risposta alla domanda n. 4:** La velocità del corpo 2 dopo uno spostamento  $h$  dalla posizione iniziale si ottiene, analogamente al punto precedente, applicando le leggi del moto rettilineo uniformemente accelerato

$$v_2 = at_h = \sqrt{2ah} = \sqrt{2gh \frac{m_2 - \mu_d m_1}{m_1 + m_2}}$$

**Risposta alla domanda n. 5:** Il lavoro totale fatto sul corpo 1 si può calcolare banalmente applicando il teorema delle forze vive e tenendo conto che i due corpi si muovono ad ogni istante con la stessa velocità grazie all'ineestensibilità del filo che li unisce. Quindi:

$$W_{tot} = \Delta K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_2^2 = m_1 gh \frac{m_2 - \mu_d m_1}{m_1 + m_2}$$

## Esercizio B: Elettromagnetismo

**Risposta alla domanda n. 6:** La evidente simmetria sferica della sorgente permette di utilizzare il teorema di Gauss per calcolare il modulo del campo elettrico nei diversi punti dello spazio. Il campo è sempre diretto radialmente dal centro della sfera, e per esprimere il modulo è necessario distinguere le tre regioni dello spazio delimitate da  $r_1$  e  $r_2$ . Inoltre, per le proprietà dei mezzi conduttori, in condizioni stazionarie non vi può essere campo all'interno della sfera.

$$\begin{aligned} E(x) &= 0 & x < r_1 \\ E(x) &= 0 & r_1 < x < r_2 \\ E(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} & x > r_2 \end{aligned}$$

**Risposta alla domanda n. 7:**

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 0 \\ \rho_2 &= \frac{Q}{4\pi r_2^2} = 7.96 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}^2 \end{aligned}$$

Nelle vicinanze di  $r_2$  si ha:

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} = \frac{\rho_2}{\epsilon_0} \frac{r_2^2}{x^2} \sim \frac{\rho_2}{\epsilon_0}$$

**Risposta alla domanda n. 8:** Per il calcolo del potenziale occorre stabilire il punto di riferimento (in cui vale  $V = 0$ ): in questo caso si può scegliere un qualunque punto a distanza molto grande (infinita) dal centro della sfera. Partendo quindi da valori di  $x$  maggiori di  $r_2$ , integrando l'espressione del campo elettrico, si ottiene per il potenziale  $V(x)$ :

$$\begin{aligned} V(\infty) &= 0 \\ V(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x} & x > r_2 \\ V(r_2) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_2} \\ V(x) &= V(r_2) & x < r_2 \end{aligned}$$

**Risposta alla domanda n. 9:** Applicando la conservazione dell'energia si ha:

$$\begin{aligned} q_1 V(0) &= \frac{1}{2} m_1 v_{min}^2 + q_1 V(10r_2) \\ v_{min} &= \sqrt{\frac{2q_1}{m_1} [V(0) - V(10r_2)]} \\ v_{min} &= \sqrt{\frac{2q_1}{m_1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_2} \frac{9}{10}} = 127 \text{ m/s} \end{aligned}$$

**Risposta alla domanda n. 10:**

$$\begin{aligned} q_1 V(0) &= \frac{1}{2} m_1 v_{\infty}^2 \\ v_{\infty} &= \sqrt{\frac{2q_1}{m_1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_2}} = 134 \text{ m/s} \end{aligned}$$