

Prova scritta di FISICA
PER SCIENZE BIOLOGICHE MOLECOLARI A, B e C (ord. 509)
PER SCIENZE ECOLOGICHE E DELLA BIODIVERSITA' (ord. 509)
PER BIOLOGIA A, B e C (ord. 270)
(riservato a studenti lavoratori e fuori corso)
7.11.2011

Esercizio A: Meccanica

Due corpi puntiformi di massa uguale m si muovono su un piano orizzontale senza attrito. Il primo ha una velocità di modulo v_1 diretta lungo l'asse x di un sistema di coordinate cartesiane, mentre il secondo ha una velocità di modulo v_2 diretta in modo da formare un angolo α con l'asse delle x .

I due corpi arrivano ad urtare contemporaneamente un terzo corpo di massa $2m$ inizialmente fermo; nell'urto i tre corpi si uniscono a formare un unico corpo che parte con velocità di modulo v diretta in modo da formare un angolo β con l'asse x .

Domanda n. 1: Fare un disegno schematico dell'urto, e scrivere le componenti delle velocità dei corpi uno e due lungo gli assi cartesiani prima dell'urto.

Domanda n. 2: Trovare l'espressione generale che collega β (o una sua funzione trigonometrica) a v_1 , v_2 e α .

Domanda n. 3: Trovare l'espressione generale che collega il modulo v a v_1 , v_2 e α .
Si supponga ora che α sia $\pi/2$.

Domanda n. 4: Trovare l'espressione di β e v in funzione di v_1 e v_2 .

Domanda n. 5: Calcolare l'energia cinetica finale e la variazione di energia del sistema subita nell'urto.

Domanda n. 6: Utilizzando i valori $m = 2 \text{ kg}$, $v_1 = 4 \text{ m/s}$, e $v_2 = 8 \text{ m/s}$, esprimere numericamente i risultati alle domande 4-5.

Esercizio B: Elettromagnetismo

Si consideri un condensatore piano costituito da due armature quadrate di superficie A , distanti tra loro d (con $d \ll \sqrt{A}$). La differenza di potenziale elettrostatico tra l'armatura superiore e quella inferiore è $\Delta V = -V_0$ (con $V_0 > 0$). Determinare:

Domanda n. 7: il campo elettrico (modulo, direzione e verso) presente tra le armature, e fare un disegno schematico delle linee di forza del campo elettrico;

Domanda n. 8: la carica Q presente sull'armatura inferiore;

Domanda n. 9: l'energia immagazzinata nel condensatore.

Una carica puntiforme $q_2 (> 0)$ di massa m entra nel condensatore ad una distanza $d/2$ dall'armatura inferiore con velocità iniziale diretta parallelamente alle armature e perpendicolare ad un lato dell'armatura. Determinare:

Domanda n. 10: il valore minimo v_{min} del modulo della velocità iniziale della carica necessario a permetterle di uscire dal condensatore;

Domanda n. 11: l'energia cinetica della carica q_2 nell'istante in cui colpisce l'armatura se il modulo della velocità iniziale è $v_0 = v_{min}/2$.

Soluzioni

Esercizio A: Meccanica

Risposta alla domanda n. 1: Le componenti delle velocità dei due corpi sono:

$$\vec{v}_1 = (v_1, 0) \quad (1)$$

$$\vec{v}_2 = (v_2 \cos \alpha, v_2 \sin \alpha) \quad (2)$$

Risposta alla domanda n. 2: Poiché nell'urto si conserva la quantità di moto totale, si ha:

$$mv_1 + mv_2 \cos \alpha = 4mv \cos \beta \quad (3)$$

$$mv_2 \sin \alpha = 4mv \sin \beta \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_2 \sin \alpha}{v_1 + v_2 \cos \alpha} \quad (5)$$

Risposta alla domanda n. 3: Utilizzando le eq. 3-4 si ottiene:

$$16v^2 = (v_1 + v_2 \cos \alpha)^2 + (v_2 \sin \alpha)^2 \quad (6)$$

$$v = \frac{1}{4} \sqrt{(v_1 + v_2 \cos \alpha)^2 + (v_2 \sin \alpha)^2} \quad (7)$$

Risposta alla domanda n. 4: Ponendo $\alpha = \pi/2$ le espressioni 5 e 7 si semplificano in:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_2}{v_1}$$

$$v = \frac{1}{4} \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Risposta alla domanda n. 5:

$$K_i = \frac{1}{2} m (v_1^2 + v_2^2)$$

$$K_f = \frac{1}{2} 4m v^2 = \frac{1}{4} K_i$$

$$\Delta K = -\frac{3}{4} K_i$$

Risposta alla domanda n. 6:

$$\operatorname{tg} \beta = 2$$

$$\beta = 63.4^\circ$$

$$K_i = 80 \text{ J}$$

$$\Delta K = -60 \text{ J}$$

Esercizio B: Elettromagnetismo

Risposta alla domanda n. 7: Il campo elettrico tra le armature di un condensatore piano è uniforme e ortogonale alle piastre, con verso che va dalla piastra a potenziale maggiore a quella con potenziale minore.

$$\Delta V = -Ed = -V_0$$

da cui segue che il modulo del campo elettrico è $E = V_0/d$, ed è diretto dalla piastra inferiore verso quella superiore.

Risposta alla domanda n. 8: Il campo elettrico tra le armature di un condensatore piano è legato alla densità superficiale di carica σ presente sulle armature stesse dalla relazione

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

da cui si ottiene banalmente la quantità di carica Q sull'armatura

$$Q = \varepsilon_0 A E = \varepsilon_0 \frac{A V_0}{d}$$

Risposta alla domanda n. 9: L'energia immagazzinata in un condensatore è

$$U = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{A}{d} V_0^2$$

Risposta alla domanda n. 10: La carica puntiforme q_2 all'interno del condensatore si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione diretta perpendicolarmente alle armature e orientata verso l'armatura superiore con modulo

$$a = \frac{q_2 E}{m} = \frac{q_2 V_0}{m d}$$

La carica descrive quindi una traiettoria parabolica data dalla composizione di un moto uniformemente accelerato nella direzione ortogonale alle piastre e di un moto rettilineo uniforme nella direzione ad esse parallela.

La carica impiega un tempo $\Delta t = \sqrt{d/a}$ a spostarsi perpendicolarmente di un tratto $d/2$. Nello stesso intervallo di tempo la carica si è spostata parallelamente alle piastre di un tratto $\Delta x = v \Delta t$, quindi per riuscire ad uscire dal condensatore la velocità iniziale deve essere maggiore di

$$v_{min} = \sqrt{\frac{A a}{d}} = \sqrt{\frac{q_2 V_0 A}{m d^2}}$$

Risposta alla domanda n. 11: Se la velocità iniziale è $v_0 = v_{min}/2$, la carica urta contro l'armatura superiore del condensatore con un'energia cinetica che può essere facilmente calcolata con il principio di conservazione dell'energia $\Delta U + \Delta K = 0$, dove la variazione di energia potenziale della carica è

$$\Delta U = -q_2 E \frac{d}{2} = -\frac{q_2 V_0}{2}$$

mentre la variazione di energia cinetica è

$$\Delta K = K_{fin} - \frac{1}{2} m v_0^2$$

da cui segue che

$$K_{fin} = \frac{q_2 V_0 + m v_0^2}{2}$$