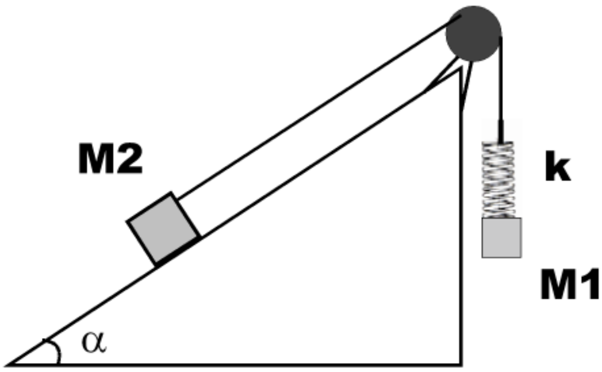
# Prova scritta di FISICA
# PER SCIENZE BIOLOGICHE MOLECOLARI A, B e C (ord. 509)
# PER SCIENZE ECOLOGICHE E DELLA BIODIVERSITA' (ord. 509)
# PER BIOLOGIA A, B e C (ord. 270)
# (riservato a studenti lavoratori e fuori corso)
# 12.03.2012

## Esercizio A: Meccanica




Un corpo di massa $M_1$ è attaccato ad una molla di costante elastica $k$, lunghezza a riposo $L_o$ e massa trascurabile. L'altro capo della molla è attaccato ad una fune che scivola liberamente su una carrucola, e l'altro capo della fune è a sua volta attaccato ad un secondo corpo di massa $M_2$, il tutto disposto come in figura. La fune e la carrucola hanno masse trascurabili, la fune è indeformabile, $M_1 > M_2$, l'angolo alla base del piano inclinato è $\alpha$, e tra il corpo $M_2$ e il piano inclinato c'è una forza di attrito tale da mantenere sempre fermo il corpo $M_2$.

Inizialmente viene applicato un blocco sotto $M_1$ in modo che la molla sia lunga $L_o$ (cioè a riposo).

**Domanda n. 1:** Calcolare la tensione della fune e il modulo della forza di attrito agente su $M_2$ in queste condizioni.

Ad un certo istante il blocco che sorregge $M_1$ viene abbassato lentamente, in modo che $M_1$ possa raggiungere una posizione di equilibrio.

**Domanda n. 2:** Calcolare la lunghezza della molla nella condizione di equilibrio.

**Domanda n. 3:** Sempre in questa condizione, calcolare la tensione della fune e il minimo valore del coefficiente di attrito statico tra piano inclinato e $M_2$ che rende possibile questa situazione.

Se invece il blocco sotto $M_1$ viene tolto repentinamente, questi inizia a cadere verso il basso.

**Domanda n. 4:** Calcolare la massima lunghezza raggiunta dalla molla.

**Domanda n. 5:** Calcolare il valore massimo del modulo della forza di attrito agente su $M_2$.

## Esercizio B: Elettromagnetismo

Il potenziale elettrostatico sulla superficie di una sfera conduttrice piena di raggio $R$ è $V_0 > 0$ (assumendo $V(\infty) = 0$). Determinare:

**Domanda n. 6:** la carica $Q$ presente sulla superficie del conduttore;

**Domanda n. 7:** la densità superficiale di carica $\sigma$ sulla superficie della sfera, e la carica totale all'interno della sfera;

**Domanda n. 8:** il campo elettrico (modulo, direzione e verso) in tutto lo spazio.

La sfera conduttrice viene sostituita da un guscio sferico sottile (di raggio $R$) di materiale non conduttore su cui è distribuita una carica con la stessa densità superficiale $\sigma$ presente sulla sfera conduttrice.

**Domanda n. 9:** Dire se il campo elettrico in tutto lo spazio è lo stesso di quello calcolato al punto 3, e in caso contrario calcolarlo.

Una carica puntiforme $q > 0$ di massa $m$ si trova a distanza $d > R$ dal centro del guscio sferico, con velocità iniziale $\mathbf{v_o}$ diretta radialmente verso il centro del guscio sferico.

**Domanda n. 10:** Determinare la relazione che lega la distanza $r_{min}$ dal centro del guscio raggiunta dalla carica puntiforme al valore di $v_o$; trovare anche il minimo valore di $v_o$ tale da permettere alla carica di raggiungere il guscio.

# Soluzioni

## Esercizio A: Meccanica

Nella situazione descritta in questo esercizio, la tensione della fune è uguale al modulo della forza elastica esercitata dalla molla su di essa.

**Risposta alla domanda n. 1:** Nelle condizioni iniziali il blocco posto sotto $M_1$ mantiene la molla alla lunghezza $L_o$, quindi questa non esercita nessuna forza. Per questo, le forze agenti sul corpo $M_2$ sono solamente la forza peso e la reazione del piano. Lungo la direzione parallela al piano inclinato si ha quindi la forza di attrito e la componente della forza peso (dirette in verso opposto):

$$T = 0 \tag{1}$$

$$F_{att} = M_2 g \sin\alpha \tag{2}$$

**Risposta alla domanda n. 2:** Se il corpo $M_1$ raggiunge la posizione di equilibrio, la somma delle forze agenti su di esso deve essere nulla; tenendo conto del verso delle forze, e chiamando $L_{eq}$ la lunghezza della molla in questa condizione si ha:

$$F_{tot,1} = M_1 g - k(L_{eq} - L_o) = 0 \tag{3}$$

$$L_{eq} = L_o + \frac{M_1 g}{k} \tag{4}$$

**Risposta alla domanda n. 3:**

$$T = k(L_{eq} - L_o) = M_1 g \tag{5}$$

Questo permette di calcolare anche il nuovo valore della forza di attrito su $M_2$:

$$F_{tot,2} = M_2 g \sin\alpha + F_{att,2} - T = 0 \tag{6}$$

$$F_{att,2} = M_1 g - M_2 g \sin\alpha \tag{7}$$

$$\mu_{min} = \frac{M_1 - M_2 \sin\alpha}{M_2 \cos\alpha} \tag{8}$$

**Risposta alla domanda n. 4:** Senza fermo, il corpo $M_1$ oscilla intorno al nuovo punto di equilibrio dato dalla eq. 4; l'ampiezza $A$ di questa oscillazione è determinata dalle condizioni di partenza (velocità nulla e molla inizialmente a riposo):

$$A = |L_{eq} - L_o| = \frac{M_1 g}{k} \tag{9}$$

Nel punto più basso la lunghezza della molla sarà pertanto:

$$L_b = L_{eq} + A = L_o + 2\frac{M_1 g}{k} \tag{10}$$

**Risposta alla domanda n. 5:** Utilizzando l'eq. 6 opportunamente modificata si ha:

$$T = k(L_b - L_o) = 2M_1 g \tag{11}$$

$$F_{tot,3} = M_2 g \sin\alpha + F_{att,3} - T = 0 \tag{12}$$

$$F_{att,3} = 2M_1 g - M_2 g \sin\alpha \tag{13}$$

## Esercizio B: Elettromagnetismo

**Risposta alla domanda n. 6:** Ricordando che il potenziale elettrostatico generato dalla configurazione data in un punto a distanza $r > R$ dal centro della sfera è

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{14}$$

segue che la carica $Q$ sulla superficie della sfera conduttrice è

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 R V(R) = 4\pi\varepsilon_0 R V_0 \tag{15}$$

**Risposta alla domanda n. 7:** La densità superficiale di carica $\sigma$ sulla superficie della sfera è

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{\varepsilon_0 V_0}{R} \tag{16}$$

e la carica totale all'interno del conduttore è nulla.
**Risposta alla domanda n. 8:** Il campo elettrico all'interno del conduttore ($r < R$) è nullo, mentre all'esterno vale

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\widehat{\mathbf{r}}}{r^2} = V_0 \frac{R}{r^2}\,\widehat{\mathbf{r}} \tag{17}$$

**Risposta alla domanda n. 9:** Il campo elettrico generato dal guscio sferico in tutto lo spazio è lo stesso di quello generato dalla sfera carica del punto precedente poichè la distribuzione di carica è la stessa.
**Risposta alla domanda n. 10:** Il campo elettrico è conservativo, quindi l'energia totale della carica puntiforme calcolata nella posizione iniziale deve essere uguale a quella in ogni altro punto della sua traiettoria.

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m v_o^2 + \frac{qRV_0}{d} \tag{18}$$

Se il valore dell'energia è minore della energia potenziale che la carica avrebbe se si trovasse sul guscio, la carica si ferma prima di raggiungerlo, ad una distanza $r_{min}$ data da:

$$r_{min} = \frac{2dqRV_0}{dmv_o^2 + 2qRV_0} \tag{19}$$

Se invece l'energia è maggiore della energia potenziale che la carica avrebbe se si trovasse sul guscio, essa può raggiungerlo e proseguire. Il minimo valore richiesto per $v_o$ vale:

$$\mathcal{E}_{min} = qV_0 \tag{20}$$

$$v_{o,min} = \sqrt{\frac{2qV_0}{m}\left(1 - \frac{R}{d}\right)} \tag{21}$$