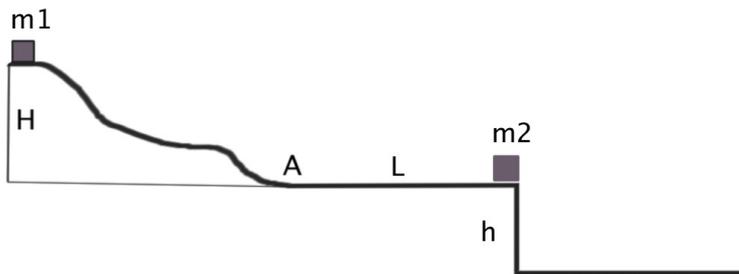


Prova scritta di FISICA
PER SCIENZE BIOLOGICHE MOLECOLARI A, B e C (ord. 509)
PER SCIENZE ECOLOGICHE E DELLA BIODIVERSITA' (ord. 509)
PER BIOLOGIA A, B e C (ord. 270)
12.04.2012

Esercizio A: Meccanica



Un corpo di massa m_1 , vincolato a muoversi lungo una guida liscia, viene lanciato con velocità v_0 da un'altezza H . Al termine della guida, il corpo incontra un tratto orizzontale scabro lungo L . Determinare:

Domanda n. 1: la velocità v_A del corpo nel punto A al termine della guida;

Domanda n. 2: il valore massimo del coefficiente d'attrito dinamico $\mu_{d,max}$ che permette al corpo di percorrere interamente il tratto orizzontale di lunghezza L ;

Domanda n. 3: l'energia dissipata nel tratto L a causa dell'attrito, se il coefficiente di attrito dinamico è $\mu_d = \mu_{d,max}/2$.

In questo ultimo caso, al termine del tratto orizzontale, il corpo di massa m_1 urta frontalmente in modo perfettamente elastico un corpo di massa m_2 posto sull'orlo di un precipizio di altezza h . Determinare:

Domanda n. 4: la velocità v_2 del corpo di massa m_2 subito dopo l'urto;

Domanda n. 5: la distanza dalla base del precipizio del punto in cui il corpo di massa m_2 raggiunge il suolo.

Esercizio B: Elettromagnetismo

Tre cariche puntiformi q_1 , q_2 e q_3 sono poste in un piano nei punti $P_1 = [-a, 0]$, $P_2 = [b, 0]$ e $P_3 = [0, -c]$ (con $a, b, c > 0$).

Ad un certo istante, la carica q_3 viene lasciata libera di muoversi, mentre le altre due restano vincolate nella loro posizione, e si osserva che q_3 è soggetta ad una accelerazione diretta lungo l'asse positivo delle ascisse ($\propto [k, 0]$, $k > 0$).

Domanda n. 6: Determinare il valore del rapporto q_2/q_1 in funzione di a , b e c ; inoltre, osservare cosa cambia se $a = b$, specificando il nuovo risultato (semplificato).

Domanda n. 7: Se la carica q_1 è positiva, come deve essere la carica q_3 ?

Si supponga ora di fissare le cariche q_1 e q_3 nelle loro posizioni indicate sopra, e di spostare q_2 alla ricerca di un punto del piano in cui il campo elettrico è nullo.

Domanda n. 8: Trovare le coordinate di tale punto, assumendo $q_3 = q_1$.

Domanda n. 9: Calcolare l'energia potenziale del sistema in questa condizione.

Domanda n. 10: Risolvere le domande precedenti, assumendo i seguenti valori numerici: $q_1 = 50 \mu C$, $a = c = 0.25 m$; si scelga per q_2 il valore ricavato nella domanda 6 con $a = b$.

Soluzioni

Esercizio A: Meccanica

Risposta alla domanda n. 1: Poiché la guida è liscia, l'energia meccanica si conserva:

$$\frac{1}{2}m_1v_0^2 + m_1gH = \frac{1}{2}m_1v_A^2$$

da cui segue che

$$v_A = \sqrt{v_0^2 + 2gH}$$

Risposta alla domanda n. 2: Il valore massimo del coefficiente d'attrito dinamico $\mu_{d,max}$ è quello per il quale il corpo di massa m_1 si ferma dopo aver percorso un tratto di lunghezza L . Utilizzando il teorema delle forze vive si ottiene:

$$\Delta K = -\frac{1}{2}m_1v_A^2 = -\mu_{d,max}m_1gL$$

da cui

$$\mu_{d,max} = \frac{v_A^2}{2gL} = \frac{v_0^2 + 2gH}{2gL}$$

Risposta alla domanda n. 3: Seguendo lo stesso procedimento del punto precedente, l'energia dissipata nel tratto L è:

$$E_{dis} = \frac{\mu_{d,max}}{2}m_1gL = \frac{m_1}{4}(v_0^2 + 2gH)$$

Risposta alla domanda n. 4: Siccome l'urto è perfettamente elastico, oltre alla quantità di moto si conserva anche l'energia cinetica, da cui segue che la velocità del corpo 2 subito dopo l'urto è

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1,in}$$

dove $v_{1,in}$ è la velocità del corpo 1 subito prima dell'urto, velocità che si ottiene dal teorema delle forze vive applicato al moto nel tratto L , ossia tenendo conto dell'energia dissipata calcolata al punto precedente:

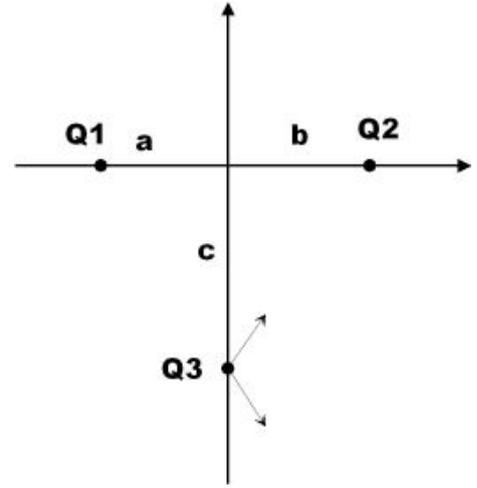
$$\begin{aligned}\Delta K &= \frac{1}{2}m_1v_{1,in}^2 - \frac{1}{2}m_1v_A^2 = W_{attr} = -\frac{\mu_{d,max}}{2}m_1gL \\ \frac{1}{2}m_1v_{1,in}^2 &= \frac{m_1}{2}(v_0^2 + 2gH) - \frac{m_1}{4}(v_0^2 + 2gH) \\ v_{1,in} &= \frac{v_A}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{v_0^2 + 2gH}{2}}\end{aligned}$$

Risposta alla domanda n. 5: Il corpo 2 descrive una traiettoria parabolica e raggiunge il suolo dopo un intervallo di tempo $t_2 = \sqrt{2h/g}$ a una distanza dalla base del precipizio

$$\Delta x = v_{2,f}t_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{(v_0^2 + 2gH)h}{g}}$$

Esercizio B: Elettromagnetismo

Il disegno mostra la posizione delle cariche e le forze elettrostatiche dovute a q_1 e q_2 nel punto in cui si trova q_3 , scelte in modo opportuno perchè si verifichi quanto ipotizzato nel testo: infatti, affinché l'accelerazione di q_3 sia diretta lungo x , le componenti delle forze lungo y devono essere di uguale modulo e di verso opposte. Per calcolare queste componenti occorre conoscere il modulo della forza e proiettarla lungo y (utilizzando i lati a , b e c dei triangoli formati dalle coppie di cariche e dall'origine degli assi):



Risposta alla domanda n. 6:

$$F_y = 0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{a^2 + c^2} \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{b^2 + c^2} \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

$$\frac{q_1}{a^2 + c^2} \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = - \frac{q_2}{b^2 + c^2} \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

$$\frac{q_2}{q_1} = - \left[\frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2} \right]^{3/2}$$

Se $a = b$ il risultato si semplifica notevolmente, dato che non dipende più ne' da a ne' da c ; pertanto in tutti i punti dell'asse delle ordinate la forza risulta diretta lungo il verso positivo delle x purchè sia

$$\frac{q_2}{q_1} = -1$$

Risposta alla domanda n. 7: Le risposte precedenti non determinano il verso della forza risultante lungo x , ma questo viene dal prodotto delle cariche $q_1 q_3$ (e $q_2 q_3$): se q_1 e q_3 sono dello stesso tipo (entrambe positive o entrambe negative) la forza è repulsiva, quindi la forza tra q_2 e q_3 è attrattiva, e la forza totale è diretta lungo l'asse positivo delle ascisse; in generale deve valere:

$$q_3 q_1 > 0$$

$$q_3 q_2 < 0$$

e se q_1 è positiva anche q_3 lo è.

Risposta alla domanda n. 8: Con $q_3 = q_1$ l'unico punto del piano posto a distanza finita in cui il campo è nullo e il punto intermedio tra le due cariche, che ha coordinate:

$$P_m = \left[-\frac{a}{2}, -\frac{c}{2} \right]$$

Risposta alla domanda n. 9:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2q_1 q_2}{\sqrt{a^2 + c^2}} + \frac{2q_3 q_2}{\sqrt{a^2 + c^2}} \right] + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

$$= \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\sqrt{a^2 + c^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{\sqrt{a^2 + c^2}} [q_1 + 4q_2]$$

Risposta alla domanda n. 10: Con $q_2 = -q_1$ si ottiene:

$$\mathcal{E} = -190.7 \text{ J}$$