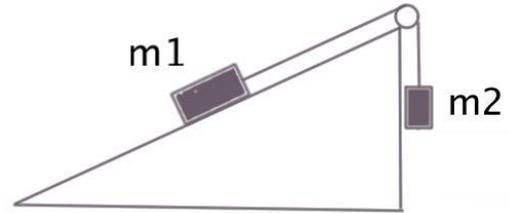


Prova scritta di FISICA
PER SCIENZE BIOLOGICHE MOLECOLARI A, B e C (ord. 509)
PER SCIENZE ECOLOGICHE E DELLA BIODIVERSITA' (ord. 509)
PER BIOLOGIA A, B e C (ord. 270)
03.07.2012

Esercizio A: Meccanica

Nelle risposte indicare sia l'espressione algebrica sia il valore numerico.

Si consideri il sistema mostrato in figura, in cui le masse sono note ($m_1 = 20 \text{ kg}$ e $m_2 = 10 \text{ kg}$). Sia la fune che la carrucola sono ideali e di massa nulla, e il piano su cui si muove m_1 forma un angolo ϑ rispetto al piano orizzontale. Determinare:



Domanda n. 1: per quali valori dell'inclinazione ϑ del piano inclinato il corpo di massa m_1 scende verso il basso e per quali invece sale;

Domanda n. 2: l'accelerazione di ciascuno dei due corpi in funzione di ϑ ;

Domanda n. 3: la tensione della fune in funzione di ϑ .

Si supponga ora che $\vartheta = 40^\circ$; le masse m_1 e m_2 inizialmente ferme vengono lasciate libere; determinare:

Domanda n. 4: la velocità del corpo di massa m_1 dopo aver percorso un tratto $L = 5 \text{ m}$ lungo il piano inclinato;

Domanda n. 5: il lavoro compiuto dalla tensione sul corpo m_1 nello stesso tratto.

Esercizio B: Elettromagnetismo

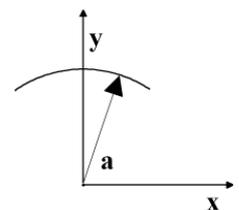
Nelle risposte indicare sia l'espressione algebrica sia il valore numerico.

Due cariche puntiformi $Q_A = Q_B = 25 \mu\text{C}$ sono poste nei punti di coordinate $A = [0, a, 0]$ e $B = [0, -a, 0]$, con $a = 5 \text{ cm}$.

Domanda n. 6: Si calcoli il vettore campo elettrico (modulo, direzione e verso) generato dalle due cariche nel punto di coordinate $X = [0, 0, b]$, con $b = 1 \text{ m}$.

Domanda n. 7: Si calcoli il potenziale elettrostatico in X , assumendo come riferimento un punto a distanza infinita.

Le due cariche puntiformi vengono poi sostituite da due distribuzioni continue di carica, disposte su un arco di circonferenza con centro nell'origine e raggio a , poste nel piano $[x, y]$, e disposte in modo simmetrico come mostrato in figura; l'angolo sotteso da ciascun arco è $\phi = 60^\circ$. La distribuzione di carica è omogenea ed è tale che il valore complessivo delle cariche resta immutato.



Domanda n. 8: Si calcoli il campo e il potenziale generati da questa distribuzione di cariche nel punto X , giustificando chiaramente il risultato ottenuto.

Si consideri ora il campo elettrico generato nel punto $Z = [0, 0, d]$ da una carica puntiforme posta nell'origine, di valore $Q_o = Q_A + Q_B = 50 \mu\text{C}$.

Domanda n. 9: Il campo elettrico generato da questa carica in Z è maggiore, minore o uguale a quello generato dalla distribuzione di cariche della domanda precedente nello stesso punto Z ?

Domanda n. 10: Detto E_{pun} il modulo del campo elettrico generato da questa carica in Z e E_{dis} il modulo del campo elettrico generato dalla distribuzione di cariche della domanda 8 sempre in Z , si trovi il valore minimo di d per cui i due campi differiscano relativamente per meno dello 0.1%, cioè sia verificata la seguente disequazione:

$$\left| \frac{E_{pun} - E_{dis}}{E_{pun}} \right| < \frac{1}{1000}$$

Soluzioni

Esercizio A: Meccanica

Risposta alla domanda n. 1: I due corpi sono in equilibrio se il piano è inclinato di un angolo ϑ_{eq} dato da

$$\vartheta_{eq} = \arcsin \frac{m_2}{m_1}$$

Il corpo 1 scende se $\vartheta > \vartheta_{eq}$, mentre sale se $\vartheta < \vartheta_{eq}$.

Risposta alla domanda n. 2: Dato che la fune è ideale, si può semplificare la descrizione del moto utilizzando una unica accelerazione scalare a che assume valori positivi quando il corpo 1 scende; dal secondo principio si ha:

$$\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g \sin \vartheta - T \\ m_2 a &= T - m_2 g \end{aligned}$$

con T tensione della fune; da queste si ricava per a :

$$a = \frac{m_1 \sin \vartheta - m_2}{m_1 + m_2} g$$

Risposta alla domanda n. 3: Da queste stesse equazioni si ricava T :

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 + \sin \vartheta) g$$

Risposta alla domanda n. 4: La velocità finale può essere calcolata in diversi modi: il più semplice considera il lavoro della forza totale agente su m_1 , data da $m_1 a$:

$$v = \sqrt{2aL} = \sqrt{2Lg \frac{m_1 \sin \vartheta - m_2}{m_1 + m_2}} = 3.06 \text{ m/s}$$

Lo stesso risultato si ottiene dal bilancio della energia totale dei due corpi, considerando l'energia potenziale gravitazionale:

$$\begin{aligned} \Delta U + \Delta K &= 0 \\ \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 &= m_1 g L \sin \vartheta - m_2 g L \end{aligned}$$

Risposta alla domanda n. 5: Il lavoro compiuto dalla tensione è:

$$W_T = -TL = -Lg \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 + \sin \vartheta) = -537 \text{ J}$$

Esercizio B: Elettromagnetismo

Risposta alla domanda n. 6: Il punto X si trova sull'asse del segmento che unisce le due cariche, quindi è equidistante da esse. Per questo, i campi elettrici in X hanno lo stesso modulo e sono orientati in modo che le componenti parallele al segmento che unisce le due cariche sono uguali ed opposte: pertanto il campo elettrico totale generato dalle due cariche in X è diretto lungo l'asse del segmento stesso, cioè lungo la direzione \hat{z} . Il modulo del campo è dato dalla proiezione lungo z del campo generato da una delle due cariche, moltiplicato per due:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{X}) &= [0, 0, E_z(b)] \\ E_z(b) &= 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A}{b^2 + a^2} \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}} = 2 \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0} \frac{b}{(b^2 + a^2)^{3/2}} = 4.48 \cdot 10^5 \text{ V/m} \end{aligned}$$

Risposta alla domanda n. 7: Il potenziale elettrico è la somma dei potenziali dovuti a ciascuna carica:

$$V(X) = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A}{\sqrt{b^2 + a^2}} = 4.49 \cdot 10^5 \text{ V}$$

Risposta alla domanda n. 8: La distribuzione di carica – per la sua disposizione simmetrica rispetto all'origine — si compone di coppie che generano nei punti posti sull'asse z un campo identico a quello descritto nella risposta 6. Dato che la carica totale non è cambiata, il campo in X è lo stesso riportato nella risposta 6.

Risposta alla domanda n. 9: In Z il campo generato dalla carica puntiforme è diretto lungo z , ed è sempre maggiore di quello generato dalla distribuzione di cariche poste sull'arco di raggio a :

$$\begin{aligned} E_{pun}(d) &= \frac{Q_o}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} \\ E_{dis}(d) &= \frac{Q_o}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{(d^2 + a^2)^{3/2}} \\ E_{pun}(d) &> E_{dis}(d) \end{aligned}$$

Risposta alla domanda n. 10: Utilizzando le espressioni trovate prima, si ha:

$$\begin{aligned} \left| \frac{E_{pun} - E_{dis}}{E_{pun}} \right| &< \frac{1}{1000} \\ \frac{\frac{1}{d^2} - \frac{d}{(d^2 + a^2)^{3/2}}}{\frac{1}{d^2}} &< \frac{1}{1000} \\ 1 - \frac{d^3}{(d^2 + a^2)^{3/2}} &< \frac{1}{1000} \end{aligned}$$

che può essere approssimata:

$$\begin{aligned} 1 - \left(1 + \frac{a^2}{d^2}\right)^{-3/2} &< \frac{1}{1000} \\ \frac{3 a^2}{2 d^2} &< \frac{1}{1000} \\ d &> a \sqrt{\frac{3}{2} 1000} = 1.94 \text{ m} \end{aligned}$$