

## Quantità di moto

Per un corpo puntiforme possiamo definire la grandezza **vetto-riale quantità di moto** come il prodotto  $m\vec{v}$ .

La seconda legge di Newton può essere scritta con la quantità di moto:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt} \quad (1)$$

Se il punto ha una massa costante, allora la 1 diventa la più classica  $\vec{F} = m\vec{a}$ , altrimenti va considerata la variazione nel tempo non solo della velocità.

La quantità di moto corrisponde ad una “intuizione” comune: è importante non solo la velocità ma anche la massa di un corpo in movimento.

## Teorema dell'impulso

La variazione di quantità di moto di un corpo dipende dalla risultante delle forze agenti su di esso:

$$\vec{Q}_f - \vec{Q}_i = \Delta \vec{Q} = \int_i^f \vec{F}(t) dt = \vec{J} \quad (2)$$

dove  $\vec{J}$  è l'**impulso della forza**  $\vec{F}$ .

Forze che agiscono per tempi brevi sono dette impulsive: il valore della forza può essere molto alto, e il contributo totale (tramite la 2) è finito.

## Conservazione della quantità di moto

Se consideriamo la quantità di moto di due corpi che interagiscono tra loro, il bilancio della grandezza *quantità di moto totale* — per il terzo principio — è legato solo alla presenza di forze esterne:

$$\vec{Q}_t = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 \quad (3)$$

$$\frac{d\vec{Q}_t}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{ext} \quad (4)$$

$$\frac{d\vec{Q}_t}{dt} = \vec{F}_{ext} \quad (5)$$

La quantità di moto di un sistema isolato si conserva.

## Centro di massa

Per un sistema di più corpi la definizione del centro di massa permette una schematizzazione utile, che tratta — dal punto di vista delle forze esterne — l'insieme dei corpi come un unico punto.

Il centro di massa è definito con la coordinata media (pesata con le masse) delle coordinate dei punti:

$$x_{cm} = \frac{m_a x_a + m_b x_b}{m_a + m_b} \quad (6)$$

$$\vec{x}_{cm} = \frac{m_a \vec{x}_a + m_b \vec{x}_b}{m_a + m_b} \quad (7)$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \quad (8)$$

## Moto del centro di massa

Se  $M$  è la massa totale, allora si ha

$$M\overrightarrow{V}_{cm} = \sum m_i \overrightarrow{v}_i = \sum \overrightarrow{q}_i = \overrightarrow{Q}_t \quad (9)$$

Quindi la seconda legge di Newton ci dice che la coordinata del centro di massa evolve sotto l'azione della risultante delle forze esterne come se il sistema fosse un punto materiale di massa  $M$ .

$$M\overrightarrow{a}_{cm} = \overrightarrow{F}_{ext} \quad (10)$$

## Urti in una dimensione

Consideriamo due corpi (come un proiettile e un bersaglio). Se non interagiscono con nientaltro nell'universo, possiamo considerarli come un sistema isolato. Allora la quantità di moto totale si conserva, indipendentemente da quello che succede tra loro. Prendiamo come sistema di riferimento il sistema solidale con il centro di massa. In questo sistema è ovvio che la velocità del centro di massa è 0, quindi anche la quantità di moto totale è nulla.

Partendo dalle velocità dei due corpi in un sistema qualunque, si può calcolare la velocità del centro di massa, si esegue il cambiamento di sistema di riferimento, e si verifica che la quantità

di moto diventa nulla:

$$\vec{x}_{cm} = \frac{m_a x_a + m_b x_b}{m_a + m_b} \quad (11)$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_a \vec{v}_a + m_b \vec{v}_b}{m_a + m_b} \quad (12)$$

$$\vec{v}_{im} = \vec{v}_i - \vec{v}_{cm} \quad i = a, b \quad (13)$$

$$Q_m = \frac{m_a \vec{v}_{am} + m_b \vec{v}_{bm}}{m_a + m_b} = \quad (14)$$

$$= \frac{m_a \vec{v}_a - m_a \vec{v}_{cm} + m_b \vec{v}_b - m_b \vec{v}_{cm}}{m_a + m_b} = 0 \quad (15)$$

## Urto unidimensionale anelastico

In questo sistema di riferimento consideriamo un urto (unidimensionale).

Inizialmente i due corpi sono distanti e entrambi si dirigono verso il centro di massa. Se supponiamo che arrivino ad urtarsi, possiamo supporre diverse ipotesi, a seconda di cosa succede all'energia del sistema. **La conservazione della quantità di moto non dice nulla sulla conservazione o meno dell'energia.**

Partiamo dalla condizione limite in cui la perdita di energia è massima, sempre compatibilmente con la conservazione della quantità di moto. Questa è 0, cioè si può ottenere anche con velocità nulle.

Quindi la massima perdita di energia corrisponde alla perdita



di tutta l'energia cinetica. In questo caso — chiamando  $v$  le velocità prima dell'urto e  $u$  quelle dopo l'urto — valgono le relazioni:

$$m_a v_a + m_b v_b = 0 \quad (16)$$

$$v_a = -\frac{m_b}{m_a} v_b \quad (17)$$

$$u_a = u_b = 0 \quad (18)$$

$$\Delta K = -\frac{1}{2}(m_a v_a^2 + m_b v_b^2) \quad (19)$$

Questa condizione di massima perdita di energia è detta **urto perfettamente anelastico**.



(a) Avvicinamento



(b) Urto



(c) Se elastico



(d) Se anelastico

## Urto unidimensionale elastico

L'altro caso particolare è l'**urto perfettamente elastico** in cui l'energia cinetica si conserva completamente. In questo caso valgono due relazioni (sempre nel SR del CM):

$$m_a v_a + m_b v_b = m_a u_a + m_b u_b = 0 \quad (20)$$

$$\frac{1}{2}(m_a v_a^2 + m_b v_b^2) = \frac{1}{2}(m_a u_a^2 + m_b u_b^2) \quad (21)$$

Le soluzioni possibili sono semplicemente:

$$m_a u_a = \pm m_a v_a \quad (22)$$

$$m_b u_b = \pm m_b v_b \quad (23)$$

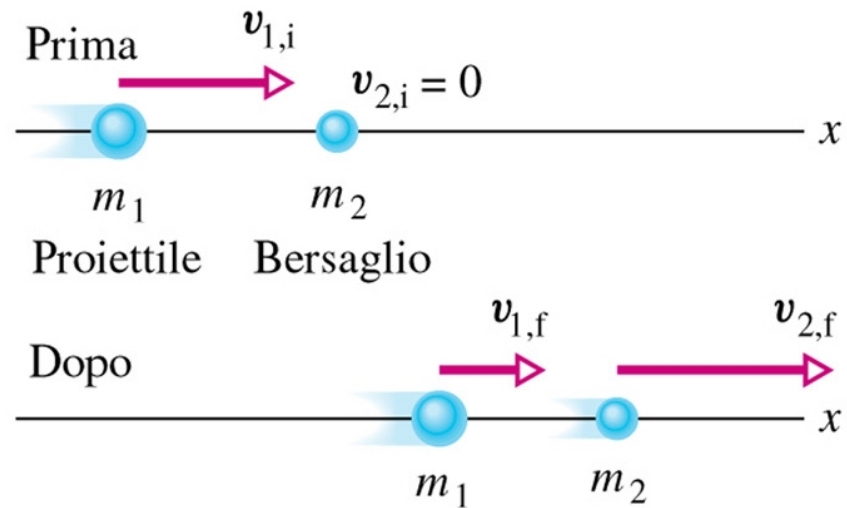
La soluzione con il  $+$  corrisponde al *mancato urto*, mentre la soluzione con il  $-$  corrisponde alla situazione fisica in cui i corpi ritornano indietro rispetto alla loro direzione originale.

In un qualunque sistema di riferimento diverso da quello del centro di massa, le equazioni per un urto elastico sono più complicate:

$$\begin{aligned}m_a v_a + m_b v_b &= m_a u_a + m_b u_b \neq 0 \\ \frac{1}{2}(m_a v_a^2 + m_b v_b^2) &= \frac{1}{2}(m_a u_a^2 + m_b u_b^2)\end{aligned}$$

$$u_a = \frac{m_a - m_b}{m_a + m_b} v_a + \frac{2m_b}{m_a + m_b} v_b \quad (24)$$

$$u_b = \frac{2m_a}{m_a + m_b} v_a - \frac{m_a - m_b}{m_a + m_b} v_b \quad (25)$$



Osservazioni:

- se le due masse sono uguali, le velocità si scambiano;
- se il corpo b è massiccio e fermo, il corpo a rimbalza indietro;

- se il corpo a è massiccio e b è fermo, il corpo a continua quasi indisturbato, mentre b parte con velocità quasi doppia rispetto ad a;

**Per gli urti elastici vale sempre (in qualunque SR) la relazione**

$$v_a - v_b = -(u_a - u_b)$$

Cioè la velocità relativa dei due corpi dopo l'urto è uguale in modulo ma di segno opposto a quella prima dell'urto.

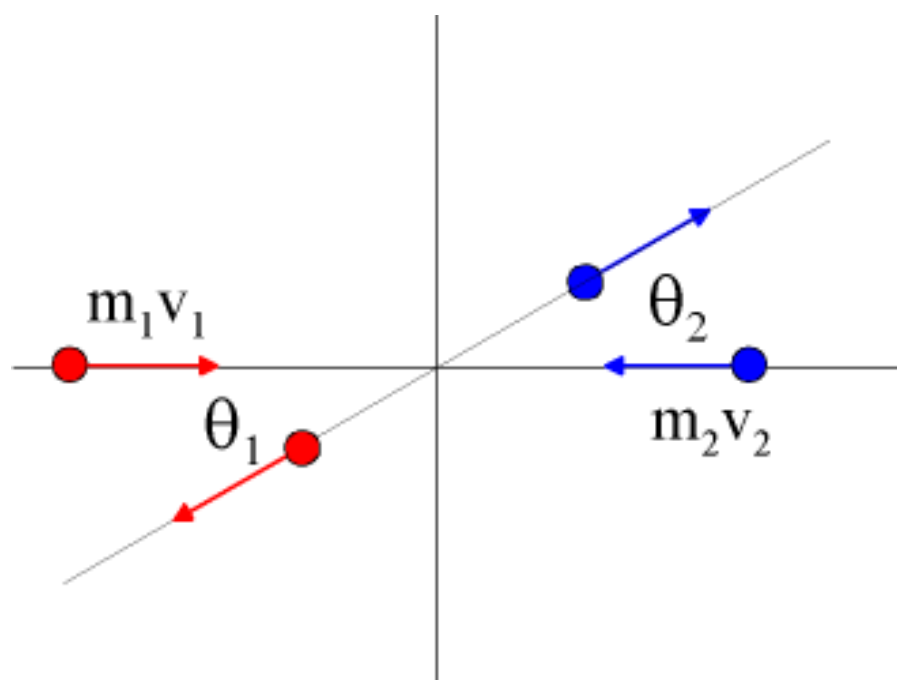
## Urto in due dimensioni

In questo caso la conservazione della QM porta a due equazioni scalari. Se c'è anche conservazione dell'energia, c'è un'altra equazione, ma il problema non è definito.

Nel SR del CM l'urto è ancora una volta semplice, in quanto la situazione finale è semplicemente una “rotazione” della direzione lungo cui avviene il moto dei due corpi.

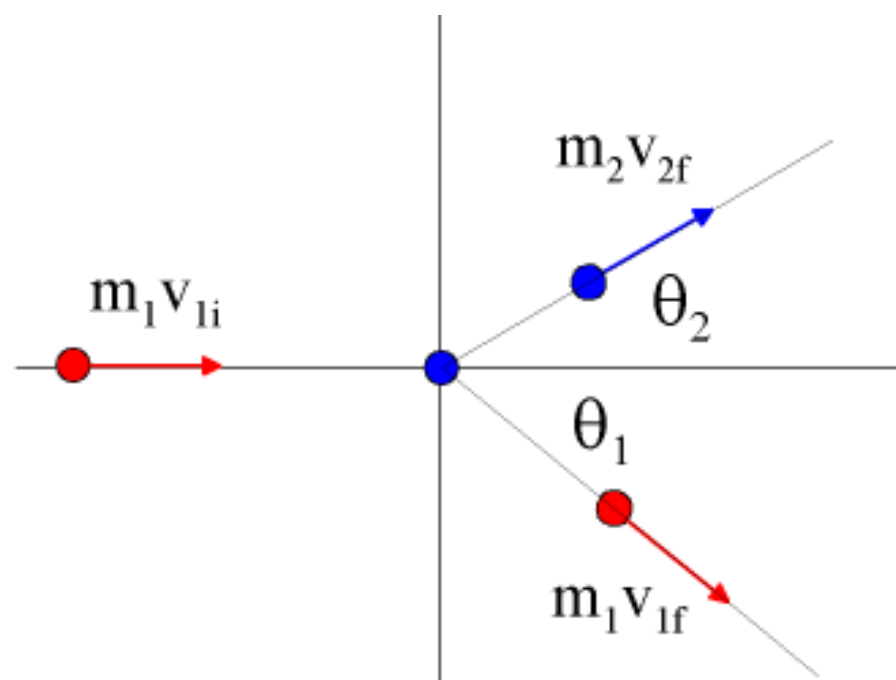
Se l'urto è elastico, l'unico parametro libero è l'angolo tra le due direzioni.

Se l'urto è anelastico, i moduli delle QM dei singoli scalano sino a 0 (completamente anelastico).



Sistema di riferimento  
del centro di massa

$$\theta_1 = \theta_2$$



Sistema di riferimento  
con  $v_{2i} = 0$

$$m_1 v_{1f} \sin \theta_1 = m_2 v_{2f} \sin \theta_2$$