Grandezze angolari

Lineare	*Angolare*	*Relazione*
x	θ	$x = r\theta$
v	ω	$v = \omega r$
a	α	$a = \alpha r$
m	I	$I = \sum mr^2$
F	N	$N = rF \sin\theta$
$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$	Energia cinetica

In forma vettoriale:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{r}$$

questa collega la **velocità angolare** con la **velocità lineare** di un corpo che si muove su una traiettoria di raggio (istantaneo) r.

Energia rotazionale

Prendiamo un corpo composto da diverse masse (non ricorriamo più al modello di corpo puntiforme) e vogliamo calcolare l'energia associata al movimento. Prendiamo due corpi, collegati in modo rigido (un manubrio) e facciamolo ruotare rispetto ad un punto del manubrio. Il sistema è descritto da una unica velocità angolare ω ma ciascuno dei due corpi ha una velocità sua. Calcoliamo l'energia, esprimendo v_i con ω:

$$E = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2 r_2^2\omega^2 \tag{1}$$

$$E = \frac{1}{2}\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2\right)\omega^2 \tag{2}$$

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \tag{3}$$

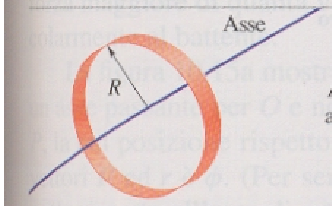
$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{4}$$

Si può generalizzare la 3 tenendo conto di tutte le masse e del fatto che la velocità angolare è unica per tutti se il sistema delle masse è **rigido**, passando ad una formulazione integrale,

sommando su tutte le masse esistenti.
Si può calcolare quindi il **momento di inerzia** per un sistema, tenendo conto però della direzione e della posizione dell'asse di rotazione.
Quando l'asse passa per il centro di massa, si ha il valore minimo per I.
C'è poi modo di calcolare il momento di inerzia quando l'asse è parallelo a quello considerato ma traslato, facendo riferimento all'asse passante per il centro di massa:
Teorema di Huygens-Steiner (o degli assi paralleli)
Per il momento di inerzia rispetto ad un asse non passante per il centro di massa (a distanza tra i due assi) vale la relazione:

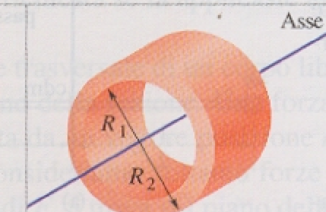
$$I = I_{cm} + Ma^2 \tag{5}$$

TABELLA 10.2 Alcune espressioni del momento d'inerzia



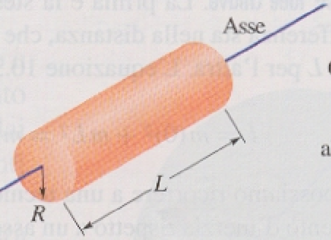
Anello rispetto all'asse centrale

$I = MR^2$ (a)



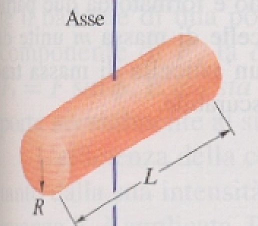
Cilindro anulare rispetto all'asse centrale

$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$ (b)



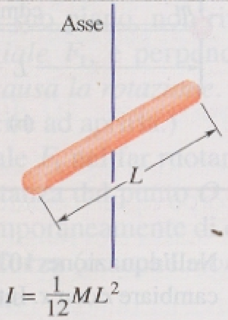
Cilindro pieno (o disco) rispetto all'asse centrale

$I = \frac{1}{2}MR^2$ (c)



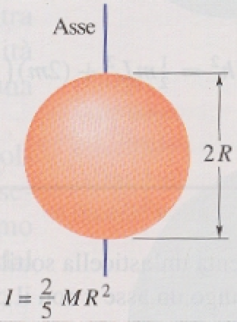
Cilindro pieno (o disco) rispetto a un diametro passante per il centro

$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$ (d)



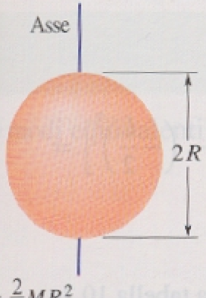
Barra sottile rispetto a un asse passante per il centro e perpendicolare alla lunghezza

$I = \frac{1}{12}ML^2$ (e)



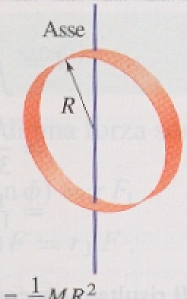
Sfera piena rispetto a un diametro

$I = \frac{2}{5}MR^2$ (f)



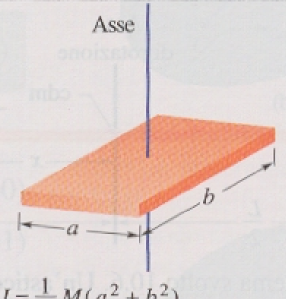
Sfera cava (o guscio) sottile, rispetto a un diametro

$I = \frac{2}{3}MR^2$ (g)



Anello rispetto a un diametro

$I = \frac{1}{2}MR^2$ (h)



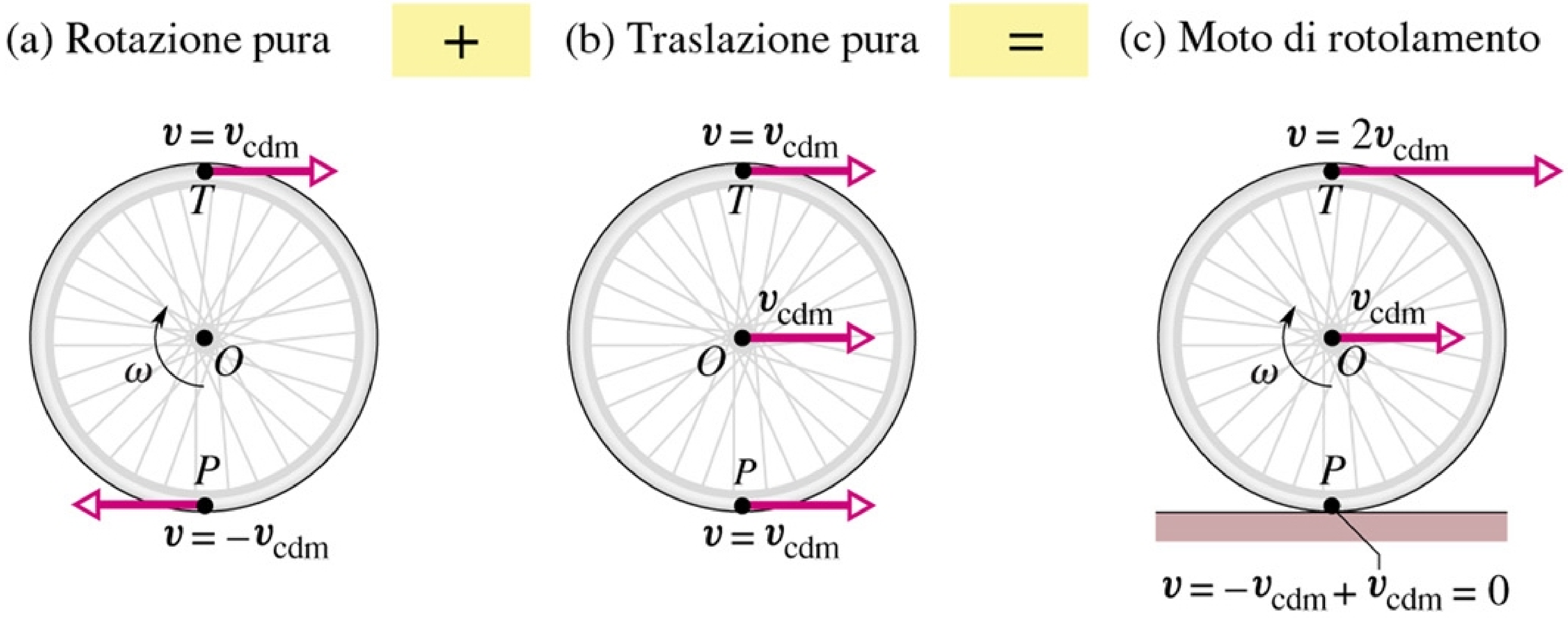
Lastra rispetto a un asse perpendicolare passante per il centro

$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$ (i)

Momenti di inerzia tipici

Oggetto	I
Sfera (centro)	$\frac{2}{5}MR^2$
Sfera (bordo)	$\frac{7}{5}MR^2$
Cilindro	$\frac{1}{2}MR^2$
Guscio cilindrico sottile	MR^2
Guscio sferico sottile	$\frac{2}{3}MR^2$
Sbarra sottile (centro)	$\frac{1}{12}MR^2$
Sbarra sottile (estremo)	$\frac{1}{3}MR^2$

Nel bilancio energetico di un oggetto composto, occorre quindi tener conto sia del moto di traslazione che di quello di rotazione: per esempio, una ruota che trasla.



Seconda legge di Newton per il moto rotatorio

La relazione tra il moto rotatorio e le sue cause richiede la definizione del **momento di una forza** rispetto ad un asse:

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F} \tag{6}$$

Se prendiamo il modulo di $\overrightarrow{N}$, la relazione diventa:

$$N = I\alpha$$

dove α è l'**accelerazione angolare**. La forma vettoriale della seconda legge è:

$$\overrightarrow{N} = \frac{d\overrightarrow{J}}{dt} = I\frac{d\overrightarrow{\omega}}{dt} \tag{7}$$

dove si utilizza il momento angolare:

$$\overrightarrow{J} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{Q} \tag{8}$$

che ha la stessa direzione di $\overrightarrow{\omega}$:

$$\overrightarrow{J} = I\overrightarrow{\omega} \tag{9}$$

Piano inclinato e oggetto che rotola Possiamo calcolare la velocità che ha una corpo che rotola giù da un piano inclinato, applicando la conservazione dell'energia (non c'è scivolamento):

$$E = Mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}\left(I + MR^2\right)\omega^2 \tag{10}$$

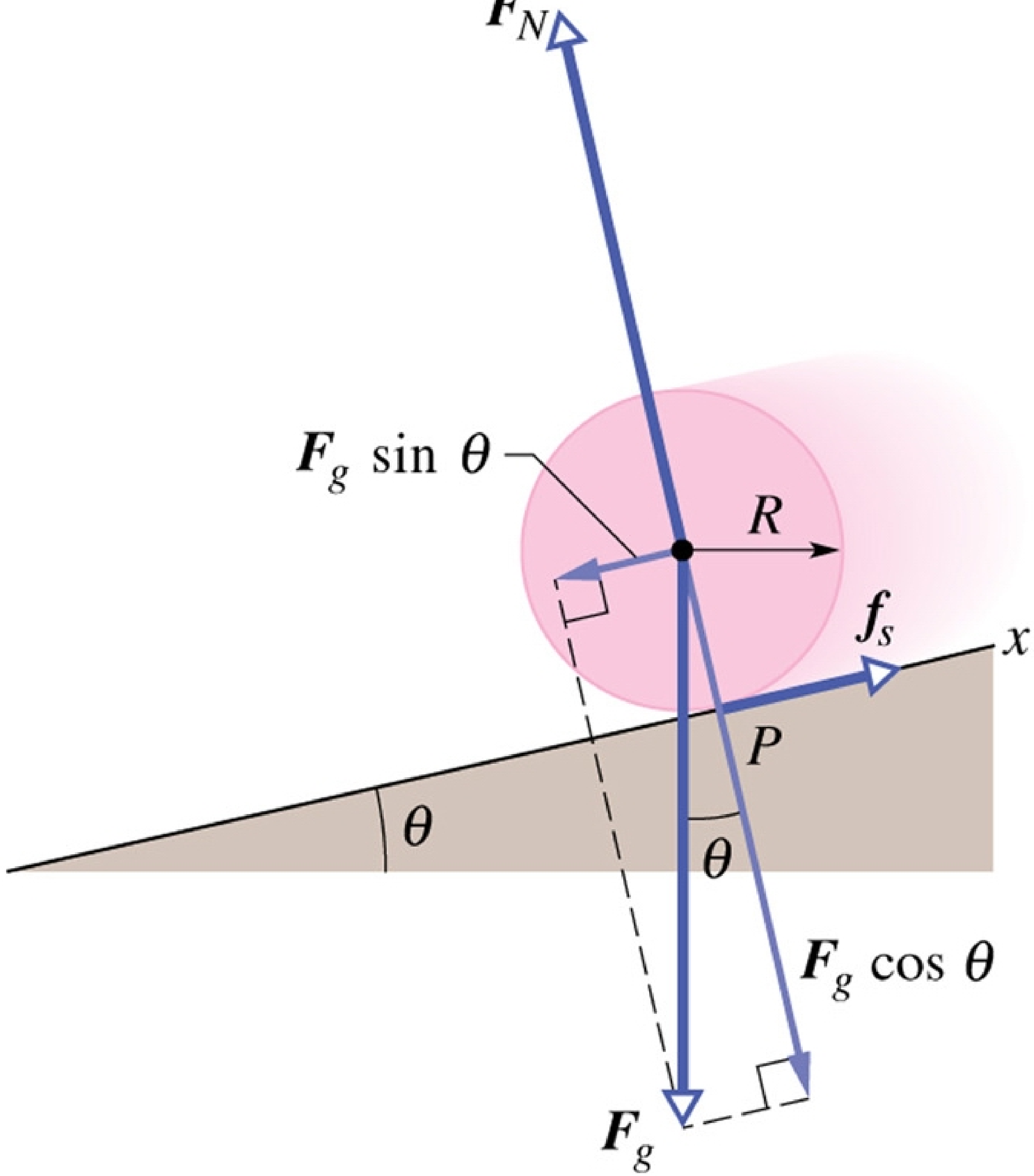
$$\omega^2 = \frac{2Mgh}{I + MR^2} \tag{11}$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I}{MR^2}}} \tag{12}$$

Si può anche calcolare l'accelerazione o dal lavoro (la forza è costante, il percorso è $h/\sin\theta$) o valutando il momento della forza peso rispetto al punto di contatto e utilizzando la seconda legge di Newton per il moto rotatorio:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{v^2}{2x} = \frac{v^2 \sin\theta}{2h} = \frac{g \sin\theta}{1 + \frac{I}{MR^2}} && (13) \\
N &= MgR \sin\theta && (14) \\
N &= I' \frac{d\omega}{dt} && (15) \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{MgR \sin\theta}{I'} && (16) \\
a &= g \sin\theta \frac{MR^2}{I'} && (17) \\
I' &= I + MR^2 && (18)
\end{aligned}$$

I' è il momento di inerzia calcolato rispetto al punto di contatto.



F_N
$F_g \sin\theta$
R
f_s
x
P
θ
θ
$F_g \cos\theta$
F_g

Pendolo

Un esempio di un moto angolare è il pendolo (sia semplice che fisico). Per il pendolo semplice il problema può essere trattato sia con le variabili lineari sia con quelle angolari. Nell'approssimazione di angoli piccoli o di spostamenti dalla verticale piccoli rispetto alla lunghezza del pendolo, il problema si riduce comunque ad un problema 1D, nella variabile x oppure θ.
Lineare: Tenendo conto solo della componente tangenziale, approssimandola orizzontale (lungo x) si ha:

$$\begin{aligned}
F_x &= -mg\sin\theta \sim -mg\frac{x}{L} && (19)\\
a_x &= -\frac{g}{L}x && (20)\\
\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{g}{L}x && (21)\\
x(t) &= A\sin(\omega t+\varphi) && (22)\\
\omega^2 &= \frac{g}{L} && (23)\\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} && (24)
\end{aligned}$$

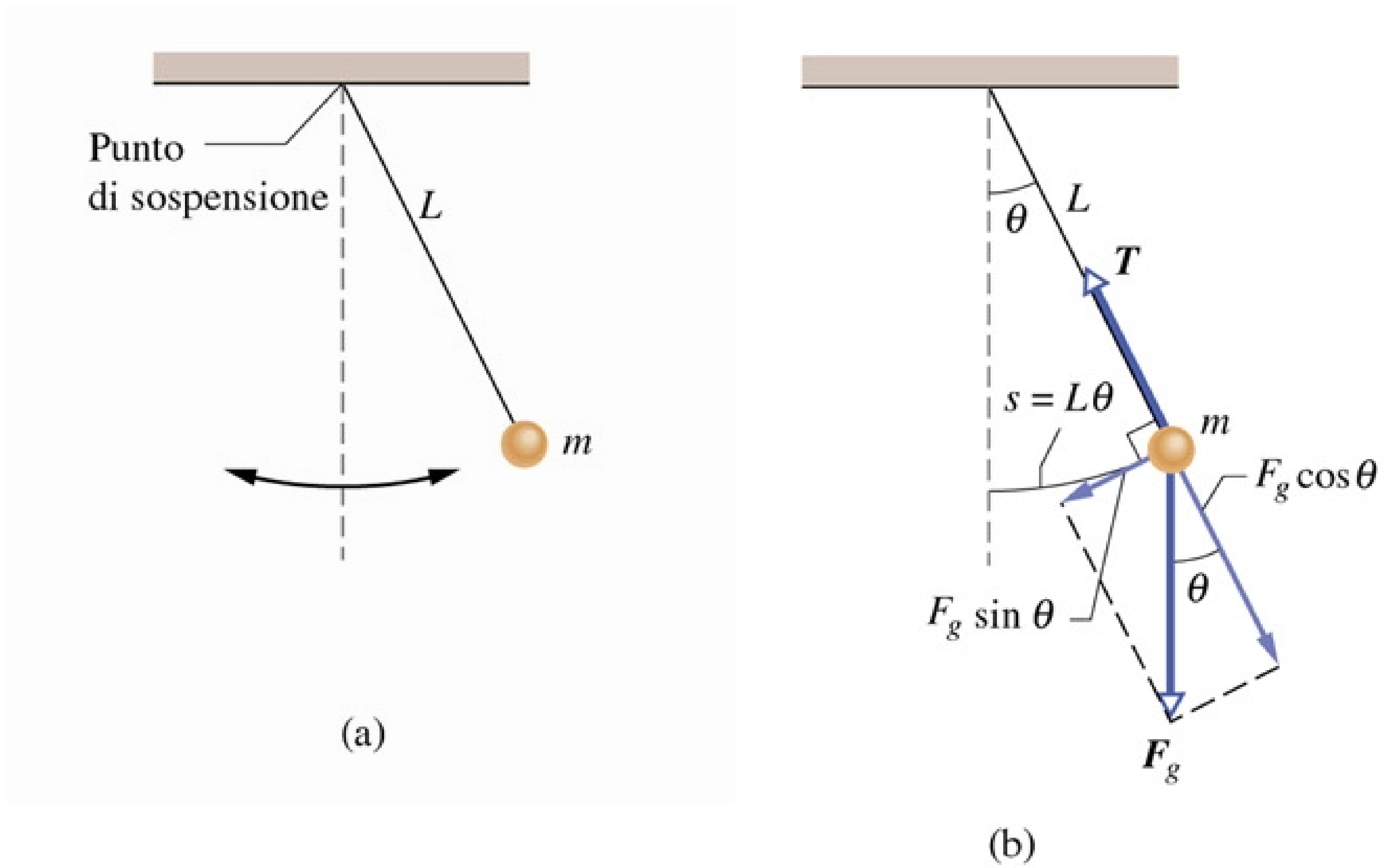
Angolare: Il momento della forza peso rispetto al punto di sospensione del pendolo deriva solo dal contributo della componente perpendicolare al filo:

$$
\begin{aligned}
N &= -mgL\sin\theta \sim -mgL\theta && (25)\\
I\frac{d^2\theta}{dt^2} &= -mgL\theta && (26)\\
\frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\frac{g}{L}\theta && (27)\\
\theta(t) &= A\sin(\omega t+\varphi) && (28)\\
\omega^2 &= \frac{g}{L} && (29)\\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} && (30)
\end{aligned}
$$

Per un pendolo fisico, l'equazione 26 permette di valutare il periodo, semplicemente cambiando significato a L, distanza del punto di applicazione della forza (cioè il centro di massa).

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgL}{I}\theta \tag{31}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{2}\pi\sqrt{\frac{I}{N}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \tag{32}$$


Punto
di sospensione
L
m
(a)
L
θ
T
s = Lθ
m
F_g cos θ
θ
F_g sin θ
F_g
(b)