

Forze elastiche e moti oscillatori

Diagramma dell'energia vicino ad un punto di equilibrio stabile: minimo, approssimabile con il suo sviluppo in serie. Nel caso di un moto unidimensionale, si trova per l'energia una espressione:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv_x^2$$

dove k è il valore (positivo) della derivata seconda della funzione energia potenziale calcolata nel minimo. Applicando la definizione di lavoro e la seconda legge si arriva ad una equazione:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1)$$

che corrisponde ad una equazione (formale) del tipo:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (2)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4)$$

con soluzione:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (5)$$

La soluzione è quella tipica di un moto periodico. La soluzione (5) per $x(t)$ può essere vista anche in un modo diverso, applicando le formule trigonometriche per una somma, che risulta più agevole se si conoscono le condizioni iniziali di posizione e velocità:

$$x(0) = A \sin(\varphi) \quad (6)$$

$$v(0) = \omega A \cos(\varphi) \quad (7)$$

$$x(t) = A \cos(\omega t) \sin(\varphi) + A \sin(\omega t) \cos(\varphi) \quad (8)$$

$$x(t) = x(0) \cos(\omega t) + \frac{v(0)}{\omega} \sin(\omega t) \quad (9)$$

Moto oscillatorio smorzato

L'equazione (1) corrisponde ad un caso ideale, in cui c'è completa conservazione dell'energia. In generale, ci possono essere forze dissipative (=attriti viscosi) che descrivono meglio la situazione reale. Un modello (che ha una soluzione semplice) è quello di una forza viscosa **proporzionale alla velocità**, e viene detto **oscillatore smorzato**:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (10)$$

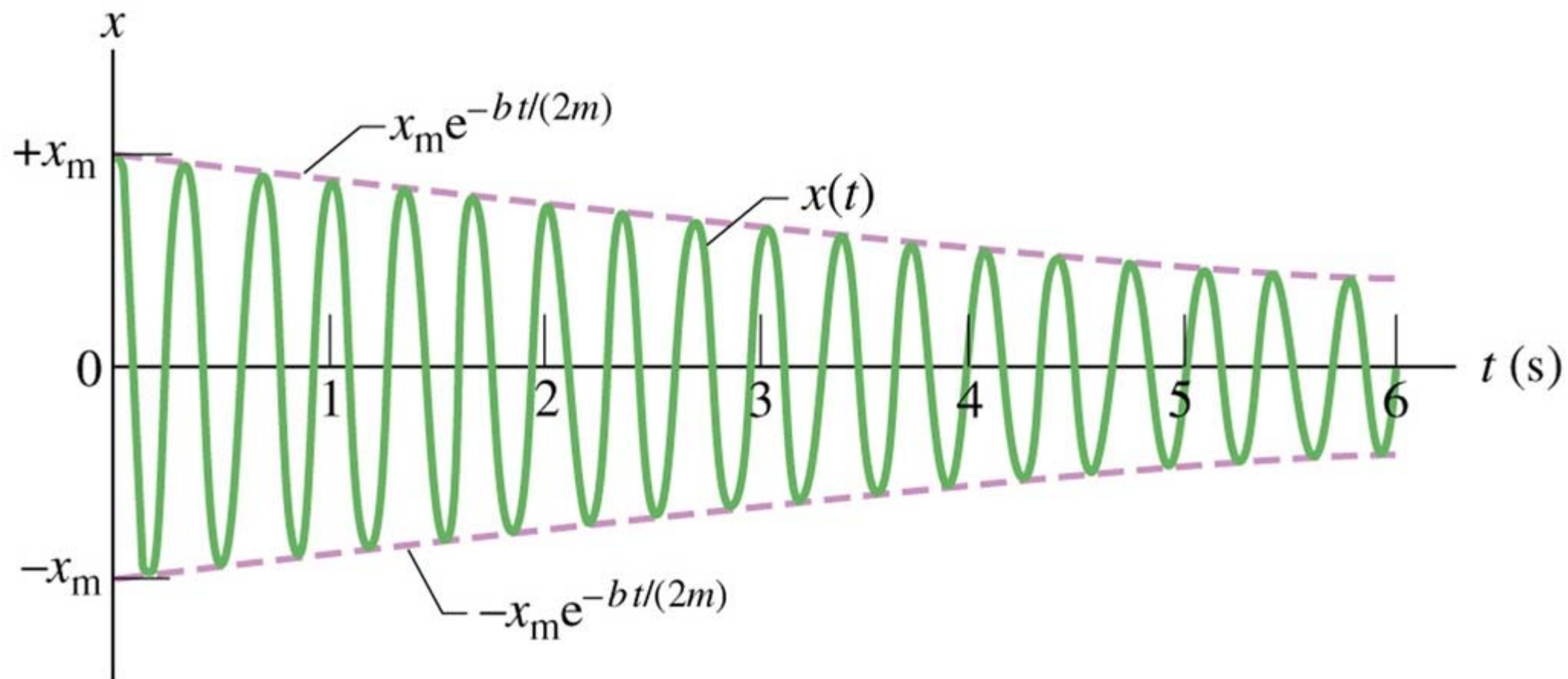
$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (11)$$

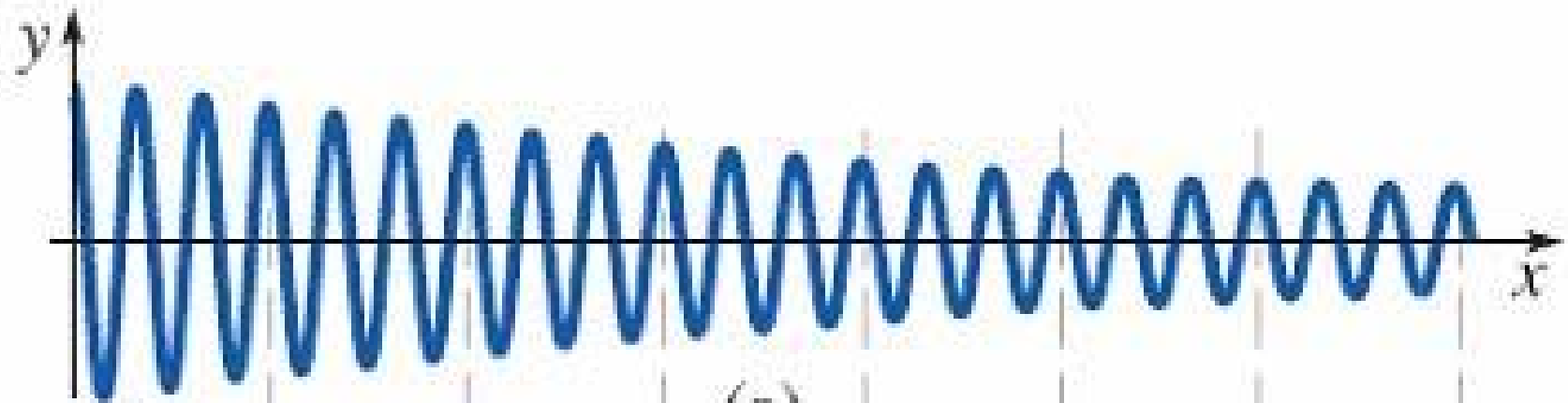
che ha soluzione:

$$x(t) = Ae^{-bt/(2m)} \cos(\omega_s t + \phi) \quad (12)$$

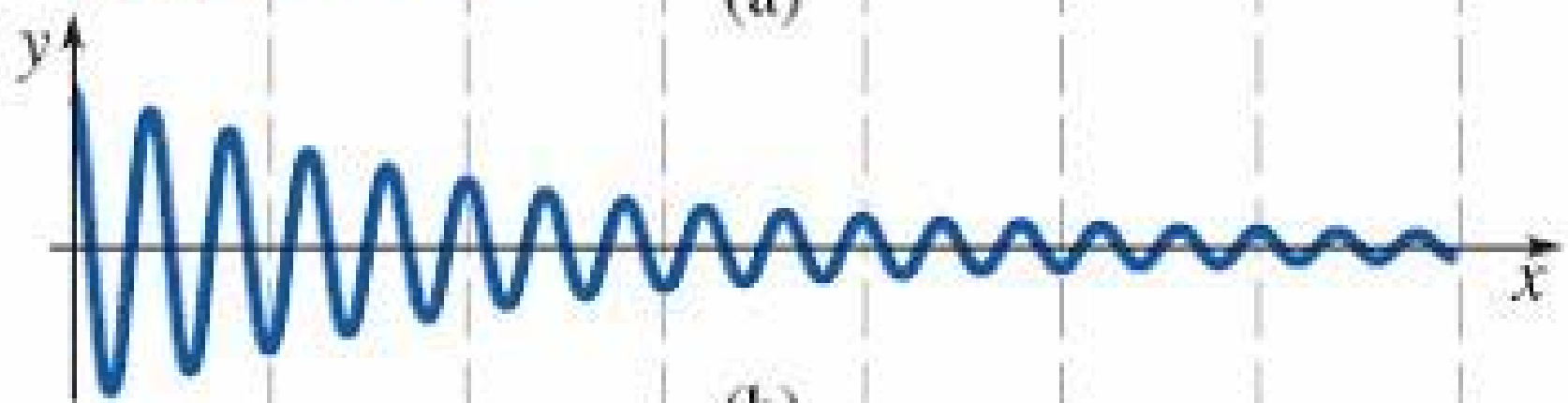
$$\omega_s = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad (13)$$

E' evidente che il periodo è cambiato rispetto a quello di un oscillatore non smorzato (aumenta), ma se la forza viscosa è piccola ($b \ll \sqrt{km}$ ossia $\gamma \ll \omega_0$) non si hanno cambiamenti apprezzabili. L'andamento temporale di x è quello di una funzione sinusoidale smorzata (con un inviluppo dato da una esponenziale decrescente).

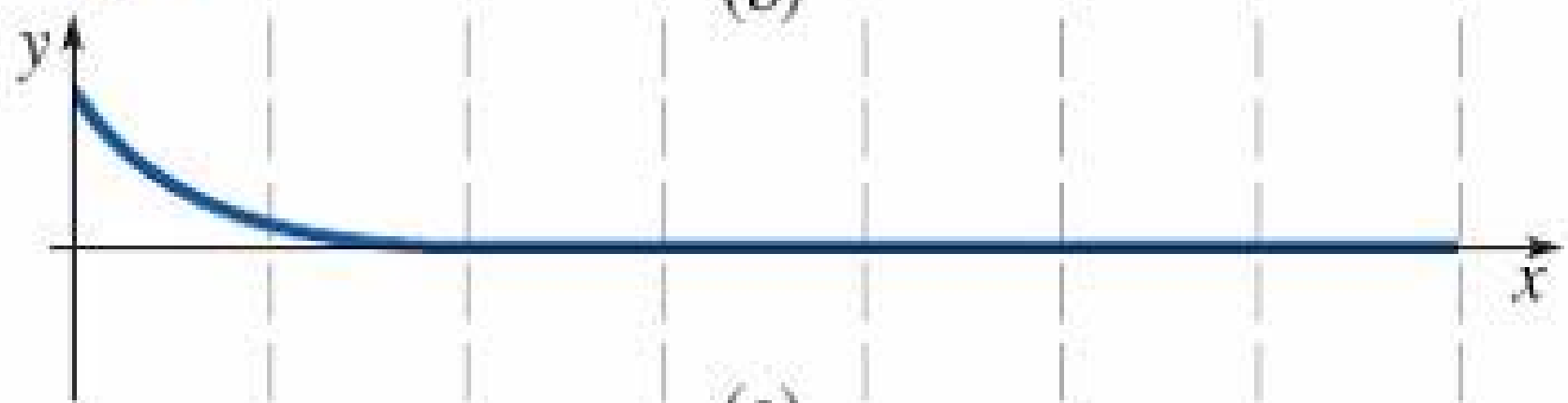




(a)



(b)



(c)

Oscillatore forzato (I - senza forze viscosse)

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \quad (14)$$

$$F(t) = F \cos \omega t \quad (15)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = B \cos \omega t \quad (16)$$

Una soluzione particolare dell'equazione omogenea può essere provata supponendo:

$$x(t) = A \cos \omega t \quad (17)$$

$$-\omega^2 A \cos \omega t + \omega_0^2 A \cos \omega t = B \cos \omega t \quad (18)$$

$$A = \frac{B}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (19)$$

Oscillatore forzato (II - con forze viscosse)

$$m\ddot{x} + bv + kx = F(t) \quad (20)$$

$$F(t) = F \cos \omega t \quad (21)$$

sostituendo $\gamma = b/m$ e $B = F/m$ si ha:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = B \cos \omega t \quad (22)$$

Qui la soluzione è più complicata, ma di nuovo si può provare supponendo:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (23)$$

Si ottengono queste relazioni:

$$A = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \quad (24)$$

$$\phi = \frac{\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (25)$$

Risonanza

I risultati per l'oscillatore forzato viscoso sono interessanti quando $\omega \sim \omega_0$.

In questo caso si ottengono per l'ampiezza di oscillazione e per l'energia delle espressioni particolari:

$$\gamma\omega = \gamma\omega_0 \quad (26)$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 \sim 2\omega_0(\omega_0 - \omega) \quad (27)$$

$$A \sim \frac{B}{2\omega_0 \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}} \quad (28)$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sim \frac{1}{8} \frac{mB^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \quad (29)$$

$$A_{max} = \frac{B}{\gamma\omega_0} \quad (30)$$

$$E_{max} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A_{max}^2 = \frac{1}{2} \frac{mB^2}{\gamma^2} = \frac{1}{2} \frac{mF^2}{b^2} \quad (31)$$

$$E = E_{max} \frac{\frac{\gamma^2}{4}}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \quad (32)$$

Da notare che l'energia massima che il sistema può avere dipende dal coefficiente delle forze viscosse b (o γ).

Fattore di qualità di un oscillatore

La presenza di forze di attrito rende necessario rifornire l'oscillatore di energia mano mano che questa viene dissipata. Per caratterizzare la perdita di energia di un oscillatore si conviene di definire un parametro, detto fattore di qualità Q come:

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energia immagazzinata}}{\text{Energia persa in un ciclo}} \quad (33)$$

$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2(t) \quad (34)$$

$$E(t + T) = \frac{1}{2}e^{-\gamma T}kA^2(t) \quad (35)$$

$$|\Delta E| \sim \frac{\gamma T}{2}kA^2(t) \quad (36)$$

$$Q = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{\omega}{2\gamma} \quad (37)$$