Legge di Coulomb

$$\overrightarrow{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\overrightarrow{n_{12}} \qquad (1)$$

La costante $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ è espressa nel sistema SI, dove le cariche si misurano in Coulomb. Il valore numerico della costante è:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} &= 8.988\,10^9\ Nm^2C^{-2} \\ \epsilon_0 &= 8.854\,10^{-12}\ C^2N^{-1}m^{-2} \end{aligned}$$

ϵ_0 è detta **costante dielettrica del vuoto** o **permittività del vuoto**.

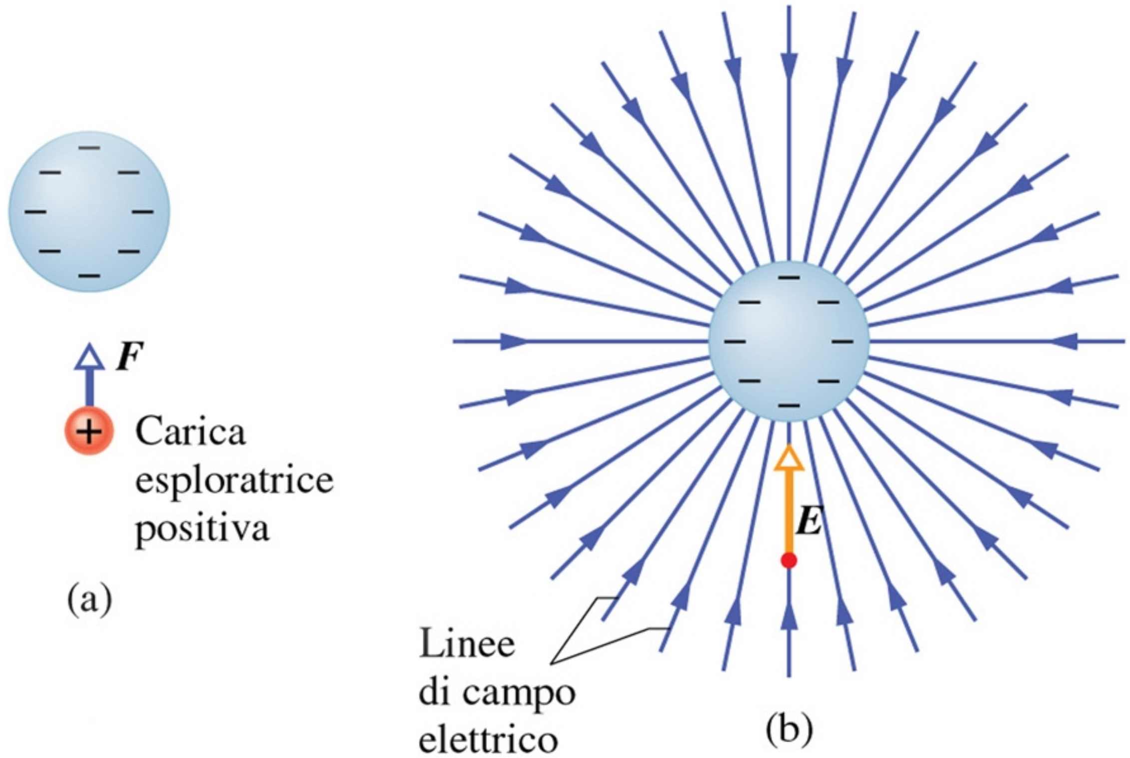
Le cariche sono quantizzate.

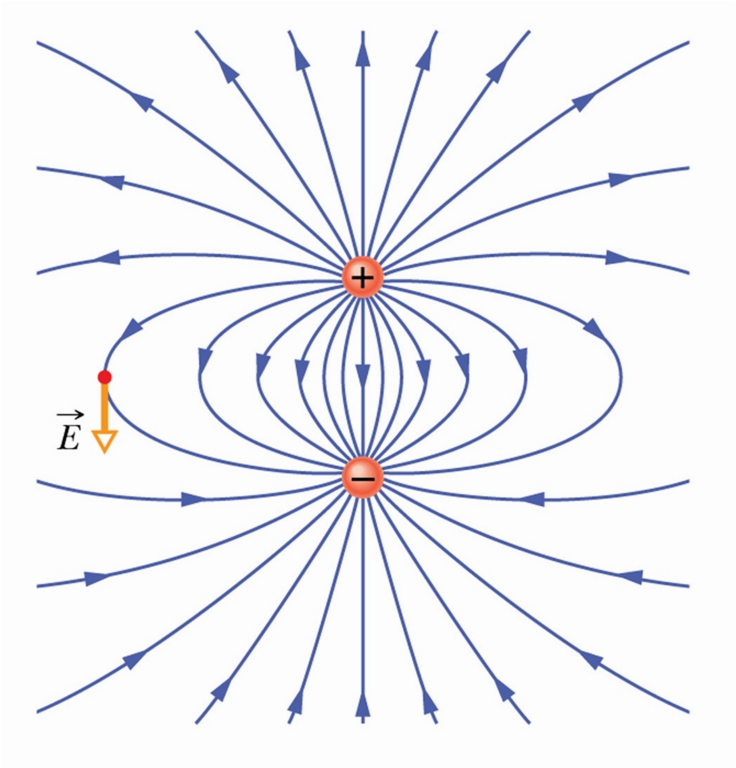
La quantità di carica totale si conserva.

Forza centrale di tipo $\propto \mathbf{r^{-2}}$.Carica elementare: (carica dell'elettrone)

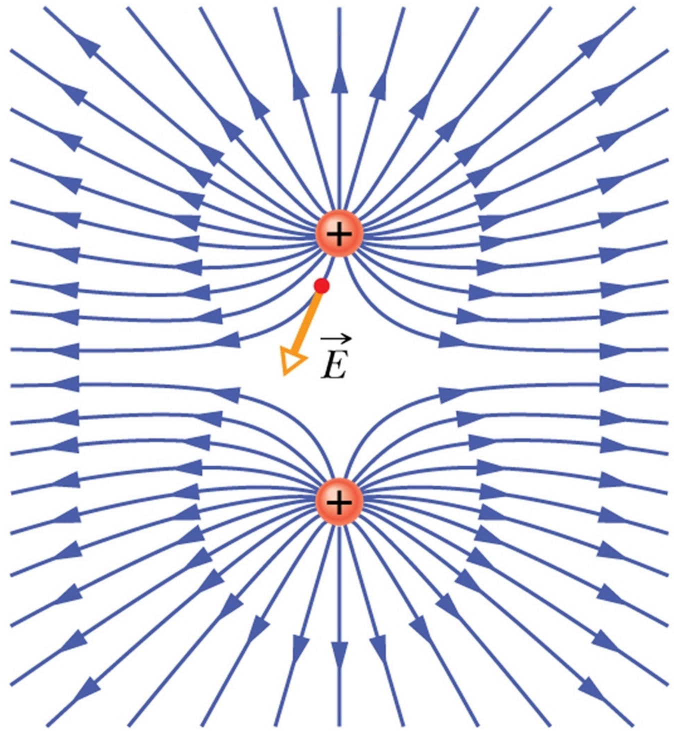
$$e = -1.602\,10^{-19}\,C$$

Principio di sovrapposizione: la forza totale è la somma vettoriale delle forze che agiscono tra ciascuna coppia di cariche.


F
Carica
esploratrice
positiva
(a)
E
Linee
di campo
elettrico
(b)



$\vec{E}$



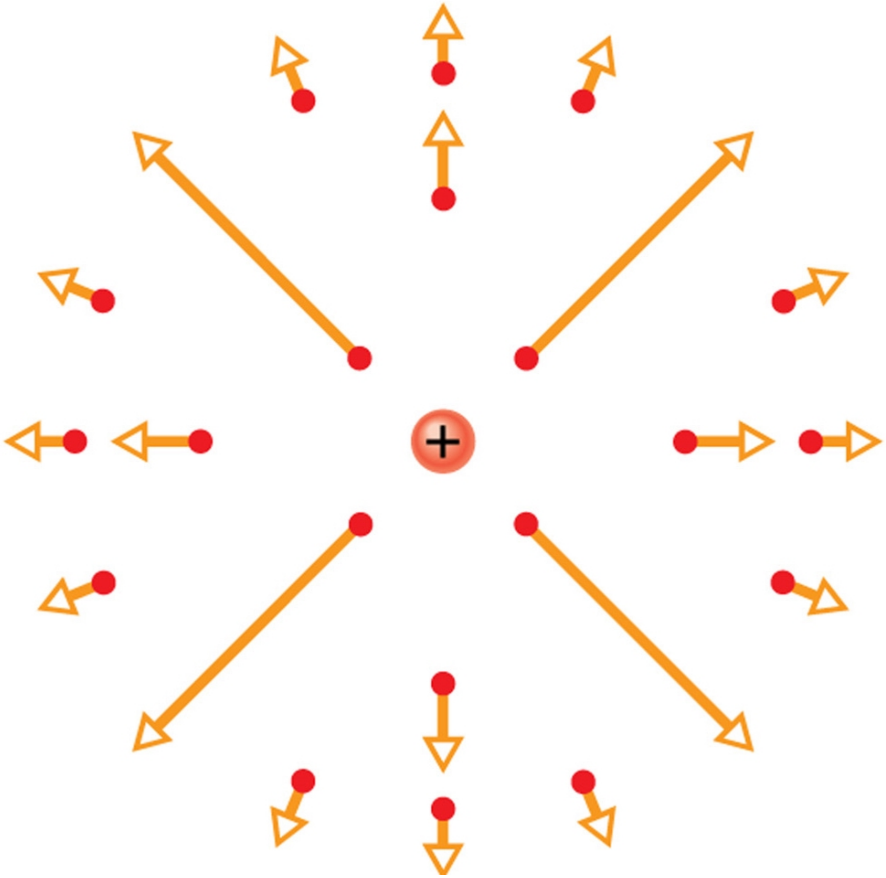
$\vec{E}$

Campo elettrico

$$\vec{E}(\vec{r_1}) = \frac{\vec{F_1}}{q_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{|\vec{r_1} - \vec{r_2}|^3}(\vec{r_1} - \vec{r_2}) \tag{2}$$

Il campo elettrico $\overrightarrow{E}$ nel punto 1 è funzione solo del valore della carica 2 e della posizione relativa tra 1 e 2. Possiamo estendere il concetto in modo tale da comprendere tutte le cariche:

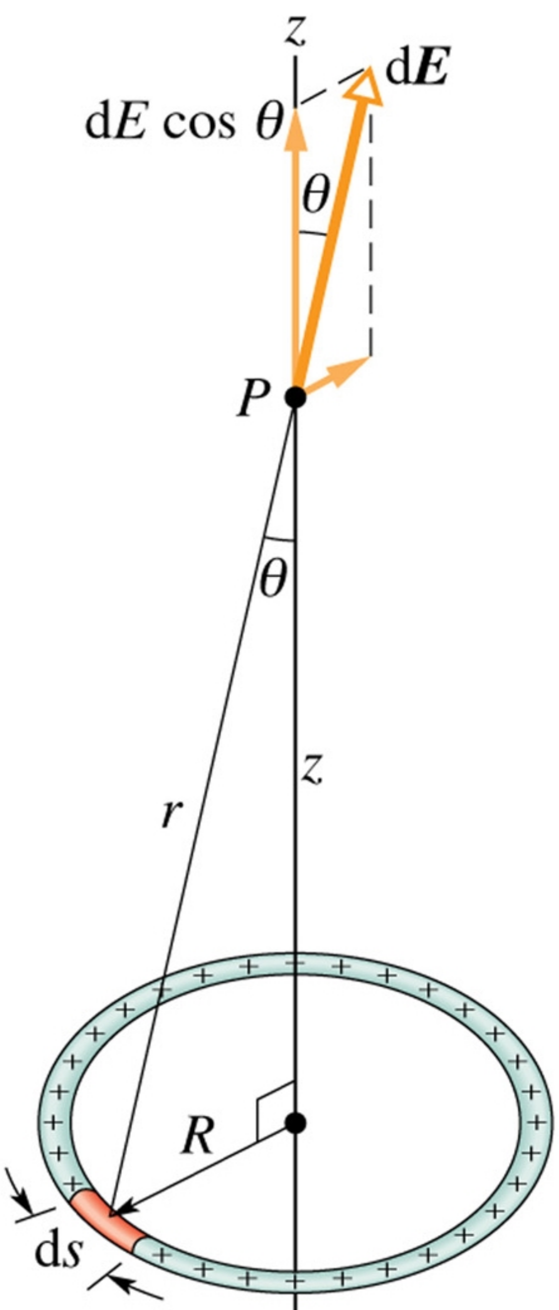
$$\vec{E}(\vec{r_1}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_j \frac{q_j}{|\vec{r_1} - \vec{r_j}|^3}(\vec{r_1} - \vec{r_j}) \tag{3}$$



densità di carica:

$$q = \int \rho \, dV$$

$$\vec{E}(\vec{r_1}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{|\vec{r_1} - \vec{r_j}|^3} (\vec{r_1} - \vec{r_j}) \, dV \tag{4}$$



z
dE
dE cos θ
θ
P
θ
z
r
R
ds

Mettendo una densità lineare λ di carica, si calcola il campo sull'asse dell'anello con un integrale prendendo la componente verticale, dopo aver considerato che è l'unica componente non nulla:

$$dE_{asse} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, ds}{r^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, ds}{R^2+z^2}\frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}} \tag{5}$$

$$E_{asse} = \int dE_{asse} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{z\lambda}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int ds \tag{6}$$

$$E_{asse} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{zq}{(R^2+z^2)^{3/2}} \tag{7}$$

Dipolo. Il campo è ottenuto come la somma di due termini (mettendo l'origine nel punto di mezzo tra le due cariche). Sull'asse il campo è la differenza di due termini con quello relativo alla carica più vicina che domina, quindi il verso del campo è semplicemente "simile" a quello generato dalla carica più vicina. Invece nel piano perpendicolare all'asse delle cariche il campo è ottenuto dalla somma delle componenti parallele all'asse, quindi va nel verso opposto alla direzione del dipolo. Il campo sull'asse è:

$$E_{asse}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{(z-d/2)^2} - \frac{q}{(z+d/2)^2}\right) \tag{8}$$

$$E_{asse}(z) \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2qd}{z^3} \tag{9}$$

$\overrightarrow{p}$ = **momento di dipolo** = qd: il campo è proporzionale a $\overrightarrow{p}$ e dipende dall'inverso del cubo della distanza.

Legge di Gauss

La legge di Gauss deriva dalla forma $\propto r^{-2}$ della forza elettrostatica

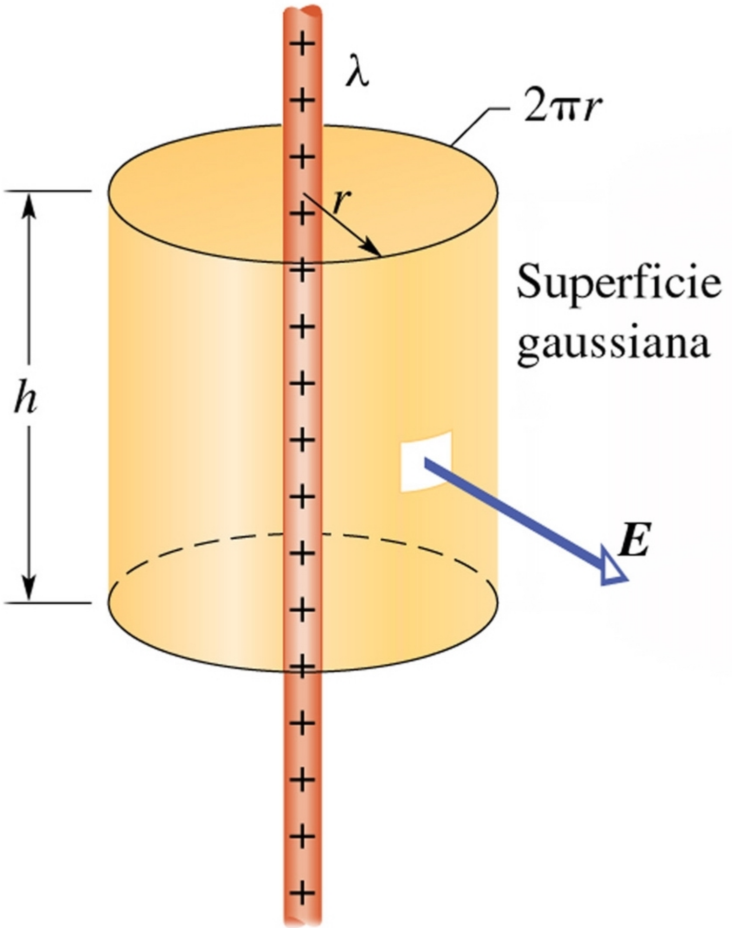
$$\Phi_E = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \tag{10}$$

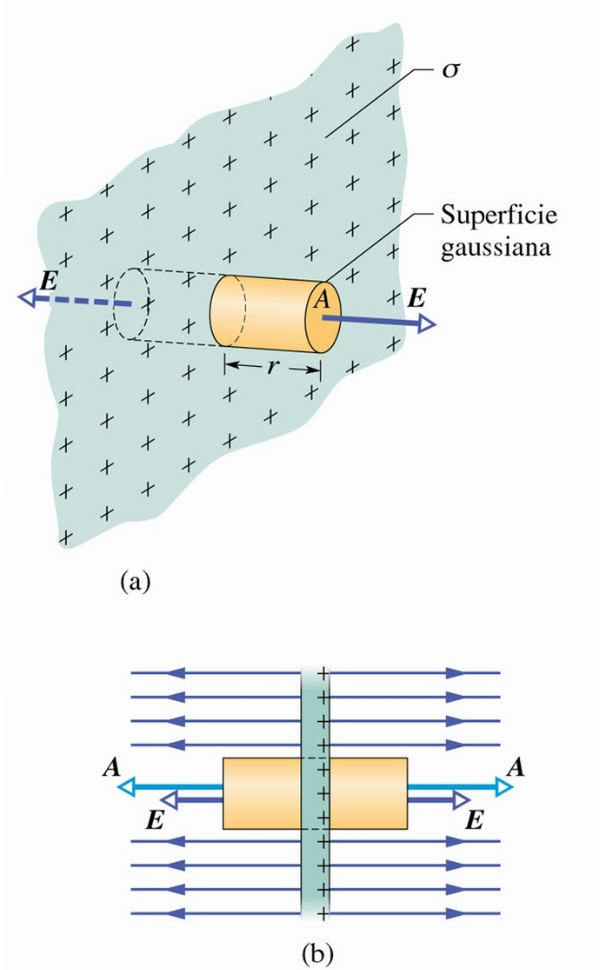
dove

$$\Phi_E = \oint \overrightarrow{E} d \overrightarrow{s} \tag{11}$$

è il flusso attraverso una superficie chiusa del vettore campo elettrico e Q_{int} rappresenta la somma (algebrica) delle cariche contenute dalla superficie.

La legge di Gauss permette di collegare il valore delle cariche (grandezza scalare) con il risultato di un integrale di superficie. Se questo è facilmente calcolabile, perchè con considerazioni di simmetria è facile scegliere una superficie chiusa opportuna, essa permette di ricavare il modulo di E in modo semplice.


λ
2πr
r
Superficie
gaussiana
h
E


σ
Superficie
gaussiana
E
A
E
r
(a)
A
A
E
E
(b)

Conduttori

Il teorema di Gauss permette di dimostrare che **la carica elettrica presente su un conduttore si dispone sempre sulla superficie esterna.** In condizioni statiche, al suo interno non vi possono essere campi elettrici, dato che questo provocherebbe moto di cariche (che sono libere). Quindi, prendendo una qualunque superficie (all'interno del conduttore) si trova sempre un risultato nullo per il flusso, e quindi anche che la somma delle cariche interne deve essere 0.

Per quanto riguarda il campo **immediatamente fuori la superficie di un conduttore** si può utilizzare il risultato precedente e una superficie di Gauss che racchiuda la superficie esterna del conduttore per dimostrare che il campo vale

$$E_{supcond} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{12}$$

dove σ è la densità superficiale di carica (locale) del conduttore. Il campo elettrico nelle immediate vicinanze deve essere perpendicolare alla superficie.

Energia potenziale elettrostatica

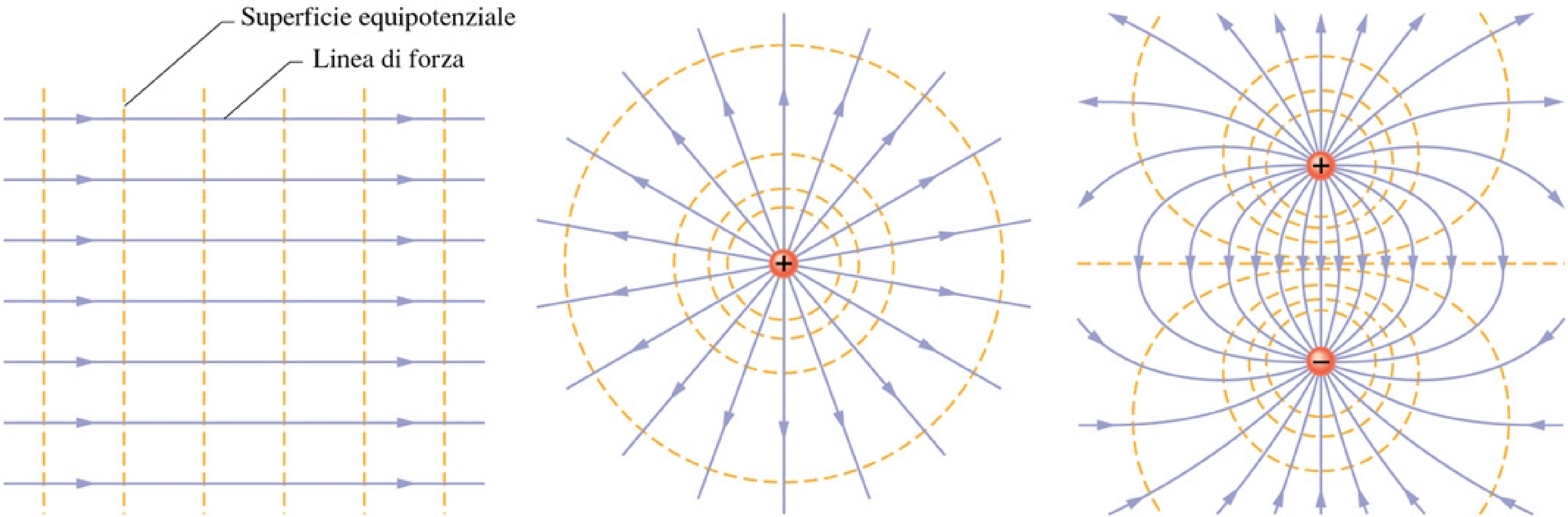
Nel caso di due cariche puntiformi, si ottiene una energia potenziale (simile a quella gravitazionale).
La carica di prova q_1 può essere isolata e il resto delle espressioni può essere raggruppato.
Si può quindi definire un **potenziale elettrostatico** come l'energia potenziale di una carica unitaria, associando così a ciascun punto dello spazio una energia (per carica unitaria).

$$\Delta U = -L$$

$$V = \frac{U}{q}$$

Il potenziale dovuto ad una carica puntiforme:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$



(a) (b) (c)

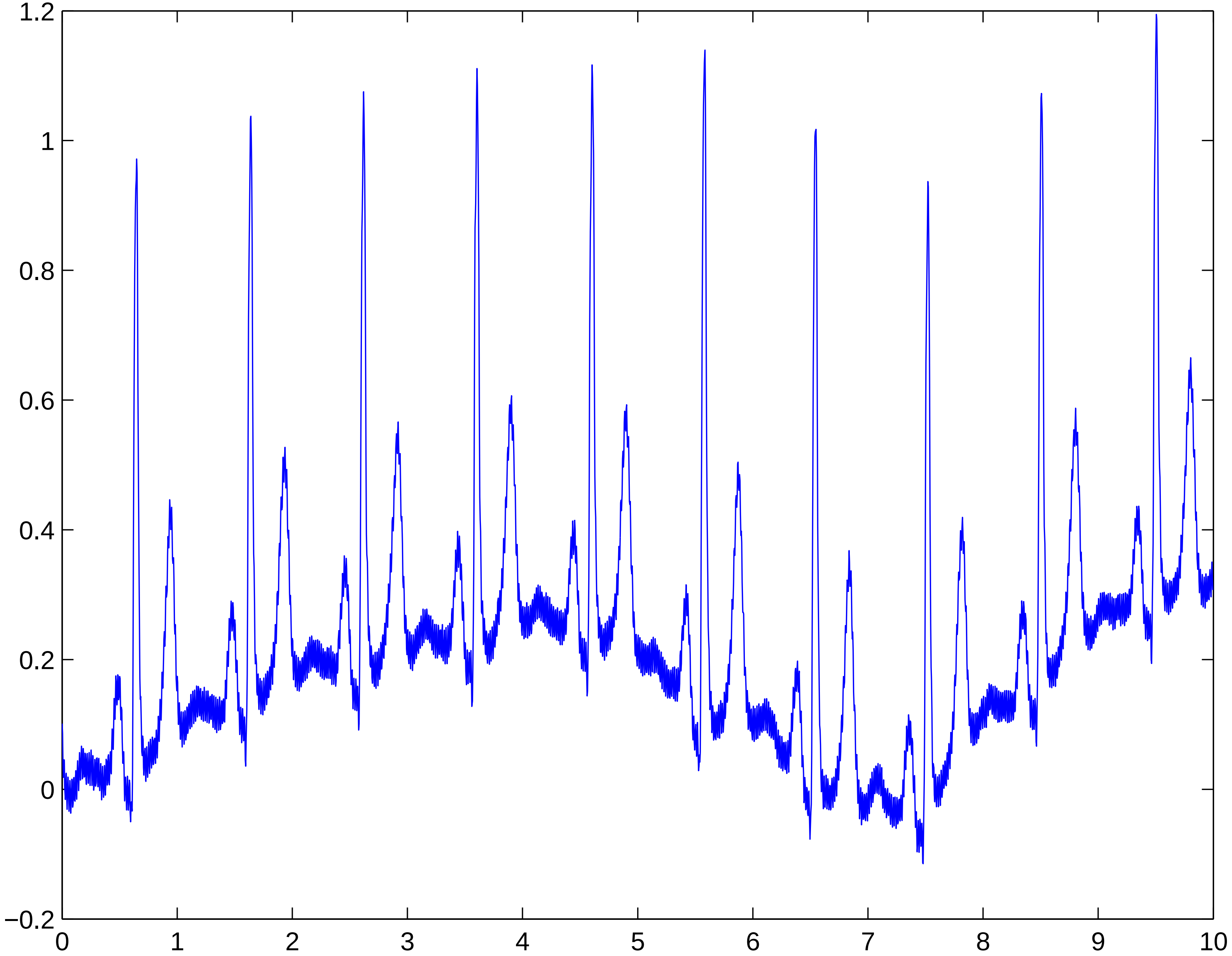
Relazione tra campo elettrico e potenziale elettrostatico:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Partendo dalle linee di forza si possono definire le **superfici equipotenziali** come l'insieme dei punti che sono allo stesso potenziale. Le linee di forza sono perpendicolari alle superfici equipotenziali, e che se una carica si muove su una superficie equipotenziale la sua energia non cambia.

Da notare che il calcolo del campo elettrico immediatamente all'esterno di un conduttore (o anche il significato stesso di una superficie equipotenziale) permette di affermare che un **la superficie di un conduttore è una superficie equipotenziale.**

ECG: un esempio di misura di un potenziale



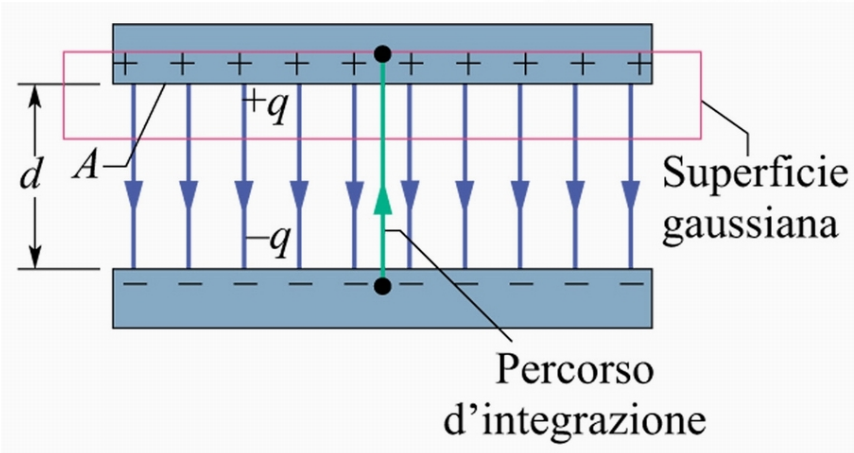
Condensatori

Un condensatore è formato da due oggetti conduttori, vicini ma non in contatto, che possono ospitare cariche di segno opposto, per esempio due piatti paralleli, di superficie S posti a distanza d.
la carica presente sulle armature è proporzionale alla differenza di potenziale che c'è tra di esse:

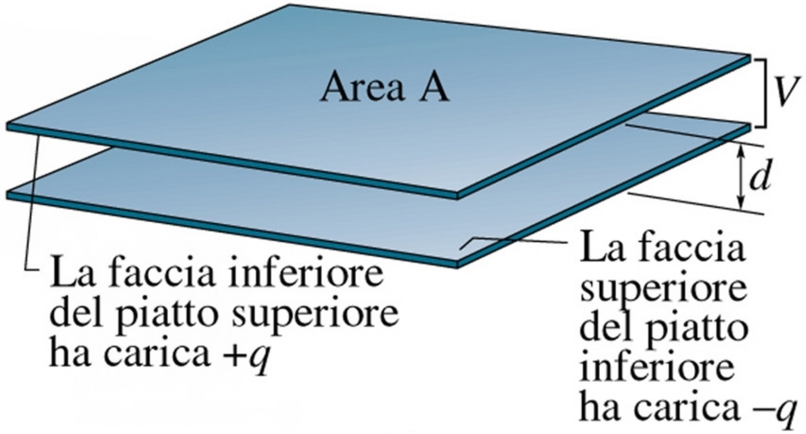
$$Q = C\,\Delta V \tag{13}$$

La costante C è detta **capacità del condensatore**. Per un condensatore piano (con le piastre molto vicine) è

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

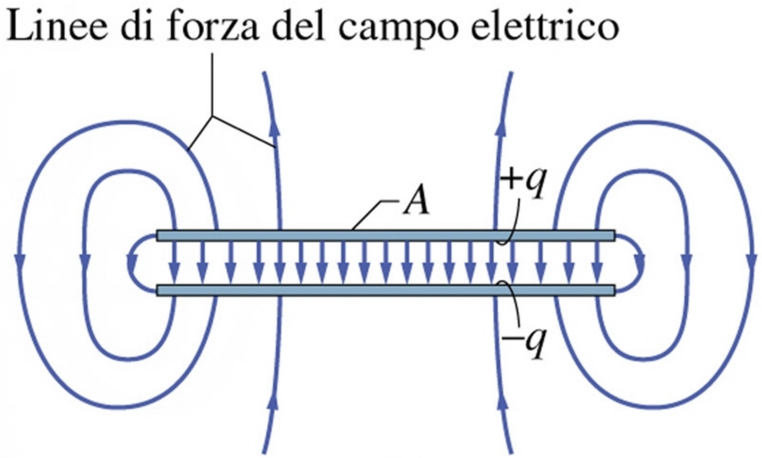


+q
−q
d
A
Superficie gaussiana
Percorso d'integrazione



Area A
V
d
La faccia inferiore del piatto superiore ha carica +q
La faccia superiore del piatto inferiore ha carica −q

(a)



Linee di forza del campo elettrico
A
+q
−q

(b)

Se si considera che in un condensatore carico le cariche sono separate, è evidente che per realizzare questa situazione è stato necessario del lavoro: una volta che su una piastra c'è presente della carica, per aggiungerne altra, occorre portare ciascuna carica facendo un cammino in una regione di campo.

$$
\begin{aligned}
dL &= V\,dq && (14)\\
&= \frac{q}{C}dq && (15)\\
L = \Delta U &= \frac{1}{C}\int_0^Q q\;dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 && (16)
\end{aligned}
$$

L'espressione 16 — nelle due forme — esprime l'energia immagazzinata in un condensatore carico.

Se facciamo comparire il campo elettrico invece della differenza di potenziale, si ottiene che associata al volume Sd (del condensatore) c'è una energia

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 \, Sd \, E^2$$

e quindi una **densità di energia per unità di volume**

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 \, E^2$$

Questo risultato è valido non solo per il condensatore ma per qualunque campo elettrico: **la densità di energia associata al campo è proporzionale al modulo quadro del campo stesso.**

Corrente elettrica

Un conduttore è — in condizioni statiche — una regione equipotenziale, e quindi non si ha campo al suo interno. Ma in generale, se due punti A e B di un conduttore sono a potenziale diverso, tra i due punti si genera un campo e le cariche (libere) si muovono sotto l'azione del campo.

Se supponiamo che le cariche che si possono muovere sono di due tipi, avremo due moti (opposti), ma se supponiamo convenzionalmente che solo un tipo di cariche si possano muovere, avremo un moto di cariche che viene chiamato **corrente elettrica.**
La corrente è definita come la **rapidità (=derivata temporale) con cui la carica (netta) fluisce attraverso una sezione trasversale del conduttore**:

$$I = \frac{dQ}{dT}$$

La corrente scorre sempre da punti a potenziale maggiore a punti a potenziale minore.

La corrente si misura in **Ampère**.

L'**Ampère** è una delle unità di misura fondamentali del SI.
Il Coulomb è un unità derivata da esso:

$$1C = 1A \cdot s$$

Associata alla corrente si può definire una **velocità di deriva** come il rapporto tra corrente e carica che si muove:

$$v_d = \frac{I}{nSe} = \frac{J}{ne}$$

cioè la densità di corrente diviso il numero di portatori di carica per la carica elementare.

Le velocità di deriva sono piccole (mm/s) ma l'effetto di una corrente è immediato (molto più rapido) a causa della presenza di molti portatori di carica.

Resistenza elettrica e legge di Ohm

Se si applica una differenza di potenziale ad un materiale, si osserva che (entro certi limiti) c'è una relazione lineare tra essa e la corrente che si instaura:

$$V \propto I \qquad\qquad \textbf{legge di Ohm}$$

La costante di proporzionalità è detta **resistenza** di quel conduttore, e dipende sia dalle proprietà fisiche del materiale sia da quelle geometriche.

$$V = RI$$

Per un conduttore rettilineo di lunghezza L e sezione S vale:

$$R = \rho\frac{L}{S}$$

$\rho =$ **resistività del materiale**