

Forza di Lorentz

Sperimentalmente si nota che le cariche elettriche sono sottoposte ad una forza che dipende dal campo magnetico, e che non è interpretabile con la forza di Coulomb:

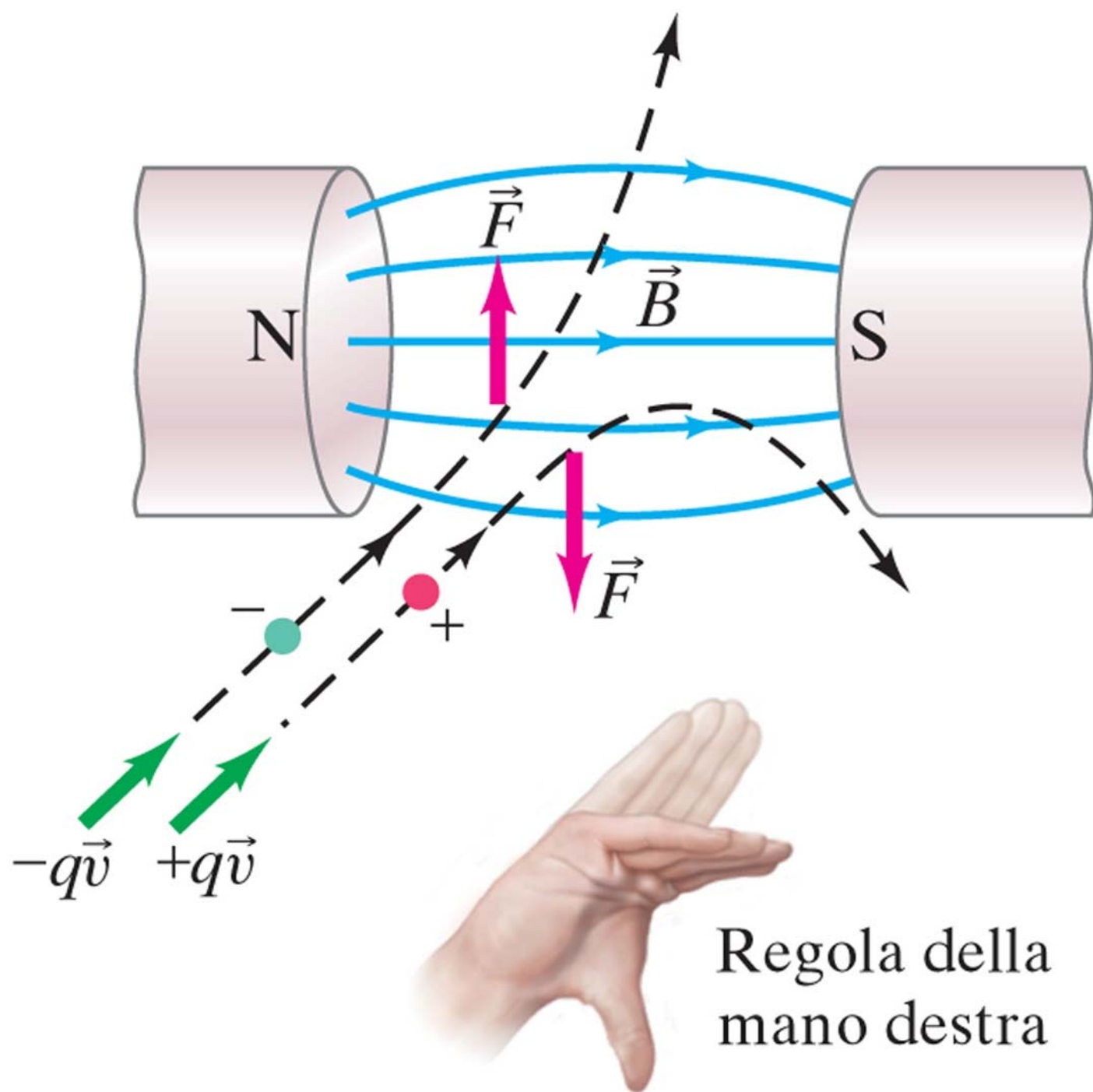
$$\vec{F}_M = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

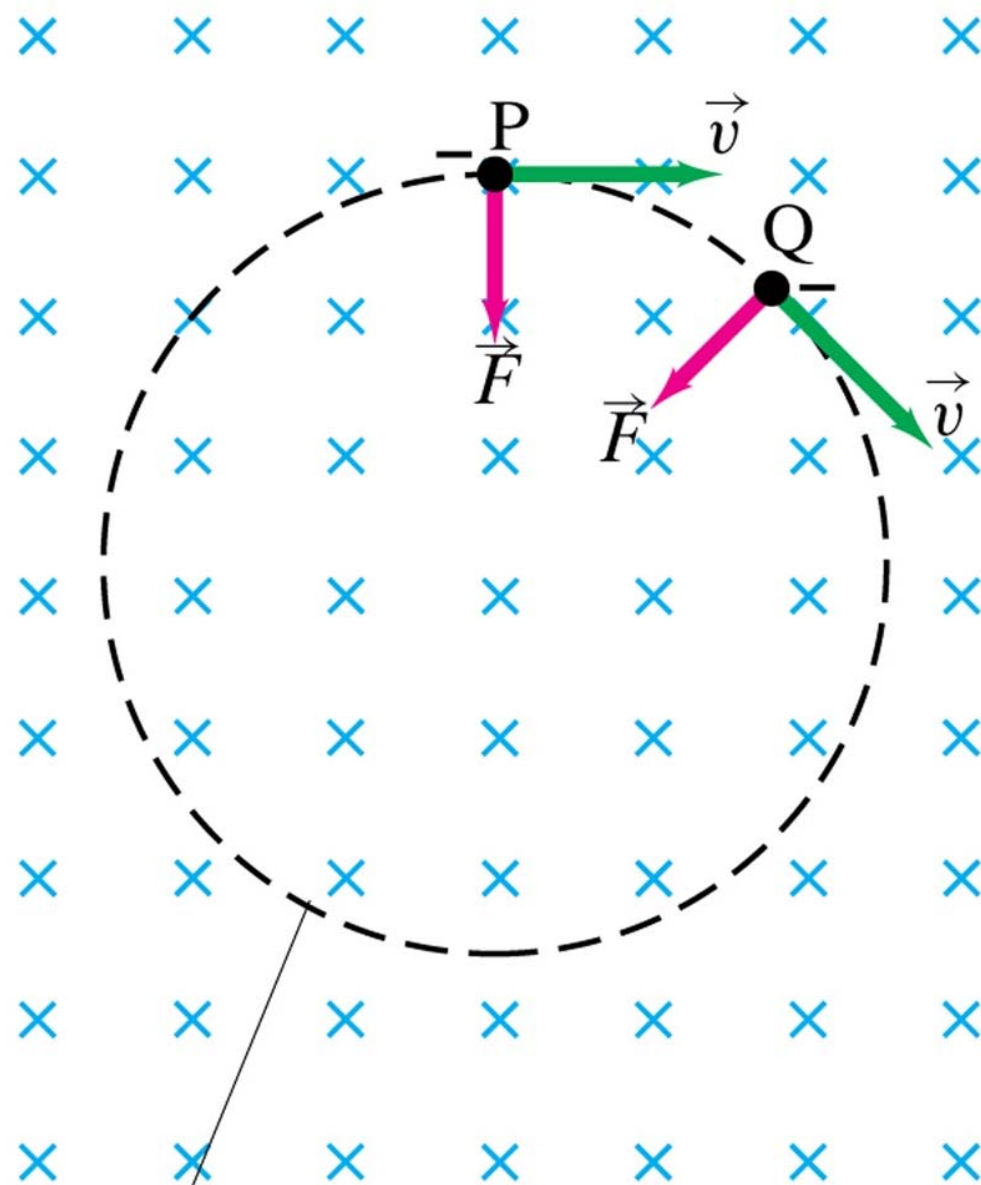
Quindi la forza su una carica elettrica dovuta ad un campo magnetico si manifesta solo se la carica è in movimento.

$$\vec{F}_L = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

La parte di forza dovuta al campo magnetico è sempre perpendicolare alla velocità, e quindi non compie lavoro sulla carica, ma produce solo una deviazione.

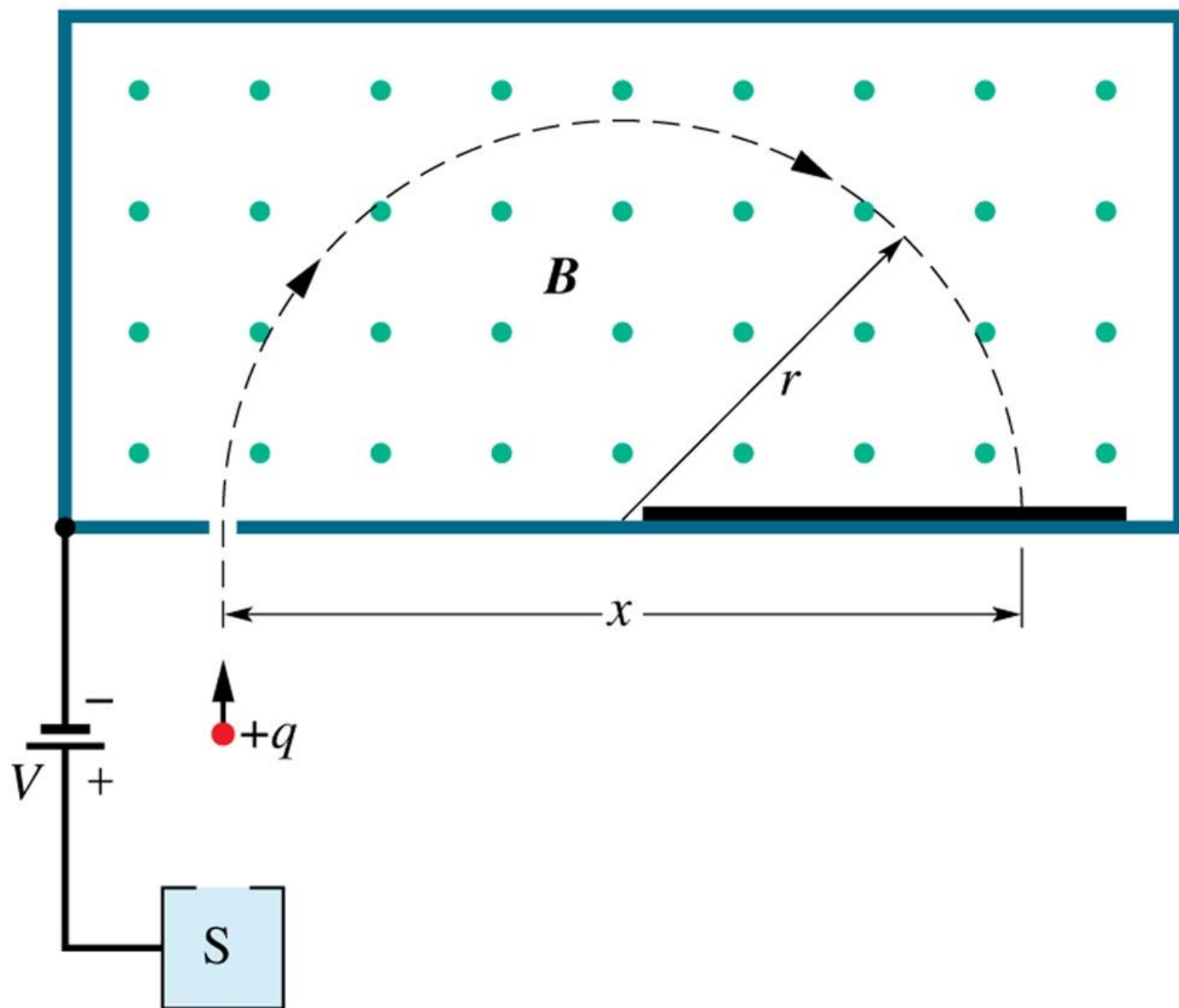
Per esempio un elettrone con velocità perpendicolare a B (costante) compie una traiettoria circolare.





Percorso
dell'elettrone

$\vec{B}$ è diretto
dentro la pagina



Il campo magnetico si misura nelle unità SI in **Tesla** che è definito in termini delle grandezze fondamentali come:

$$T = \frac{N}{A \, m}$$

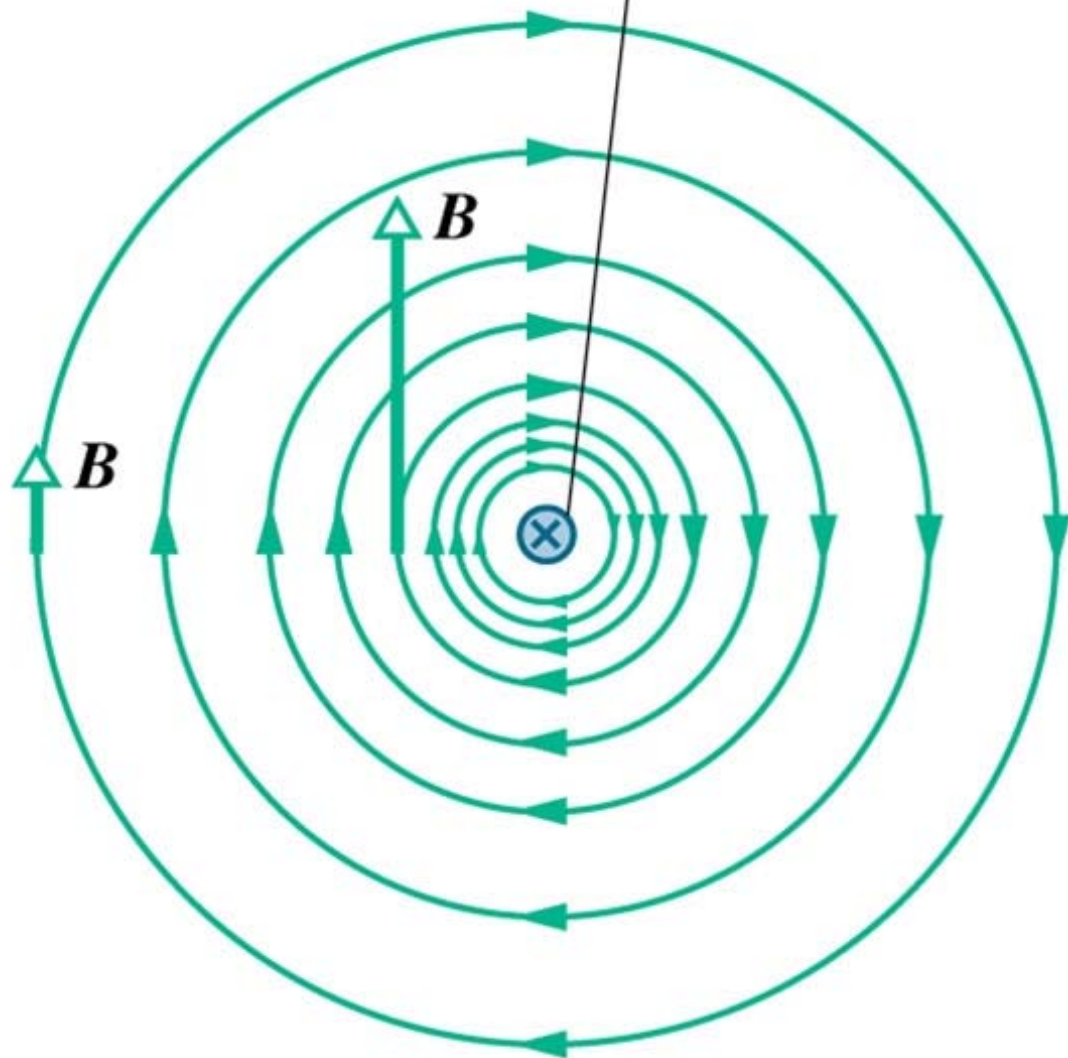
I campi magnetici usuali sono minori di 1 T: per esempio il campo magnetico terrestre è $\leq 10^{-4} T$.

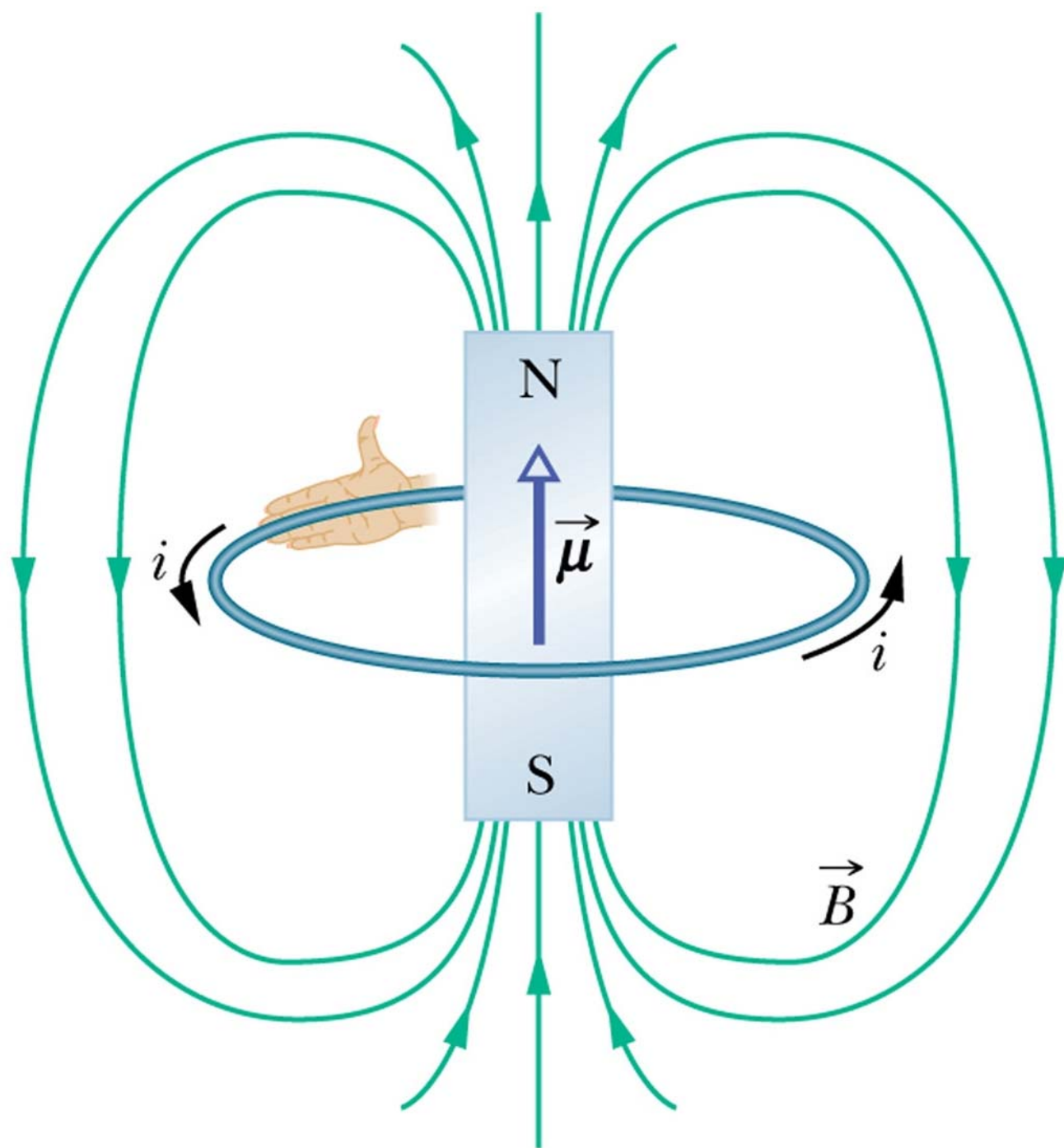
Linee di campo magnetico

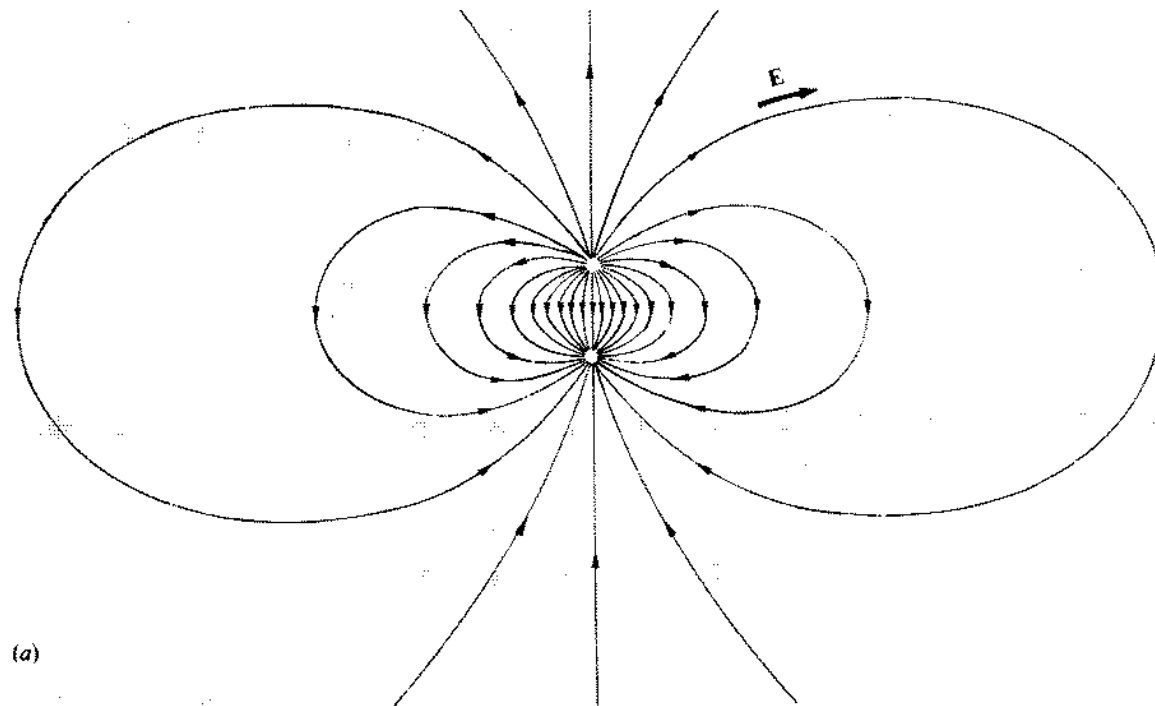
Anche per B si possono disegnare le linee di campo: in questo caso, si trova che le linee sono **chiuse** (non hanno ne' inizio ne' fine) perché non esistono cariche magnetiche.

Sperimentalmente ci si accorge non esistono cariche magnetiche isolate, ma solo “coppie di cariche magnetiche” (cioè dipoli magnetici).

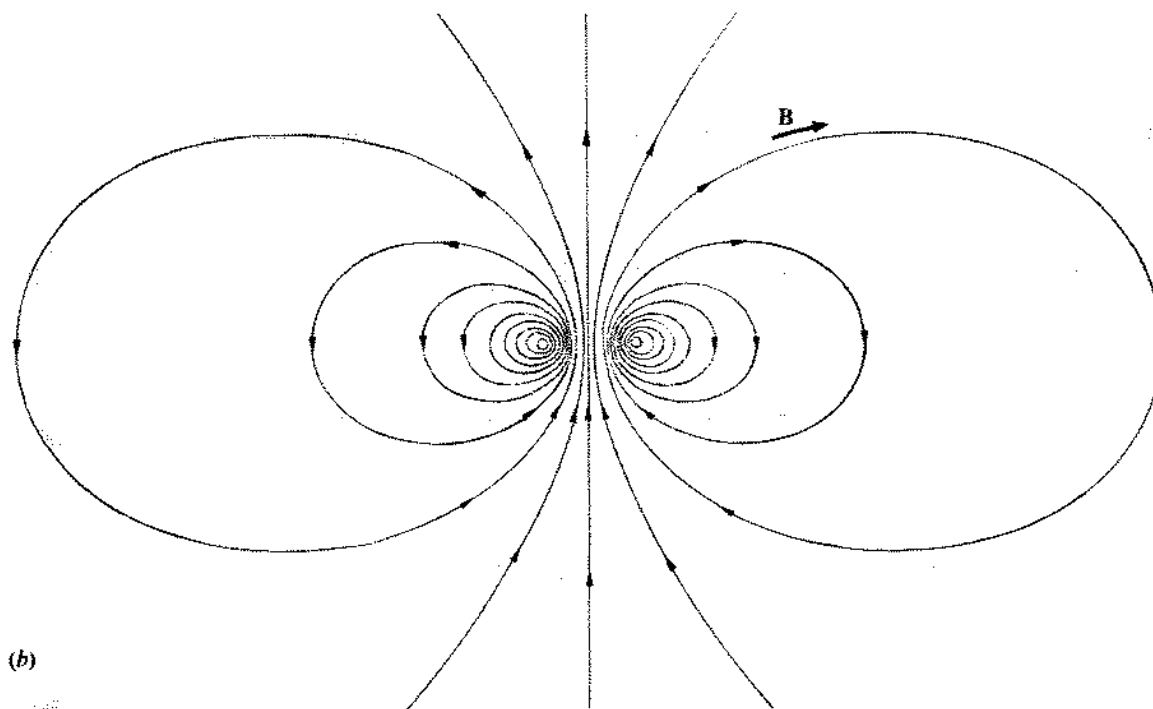
Filo percorso da corrente entrante nella pagina







(a)



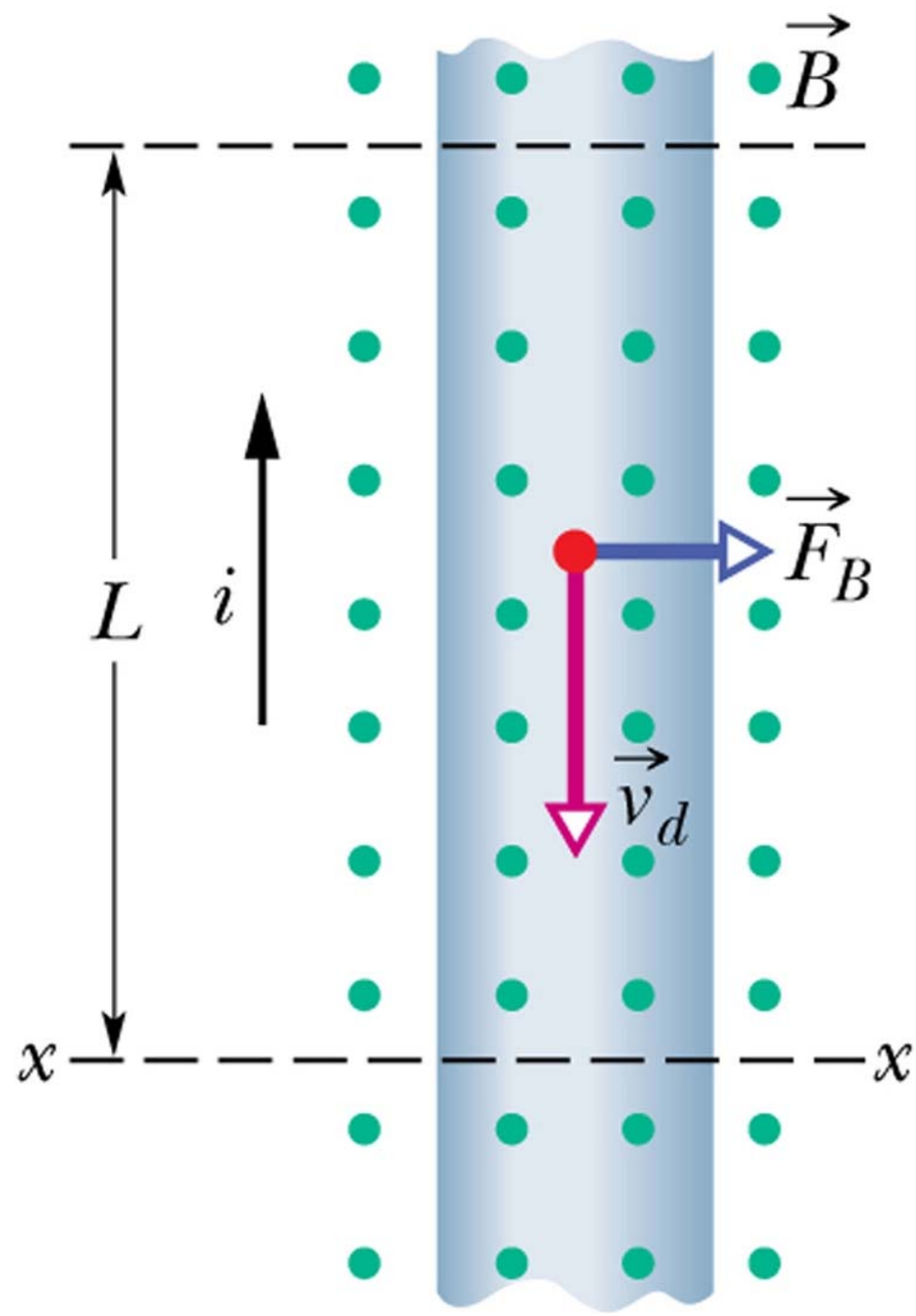
(b)

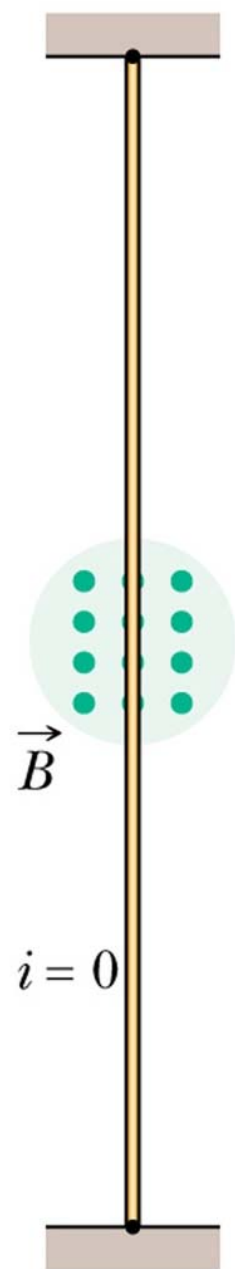
Forza e momento agenti su un circuito

Sempre sperimentalmente si verifica che su una corrente elettrica (= su un filo in cui scorre la corrente) agisce una forza che è di nuovo attribuibile alla presenza di un campo magnetico:

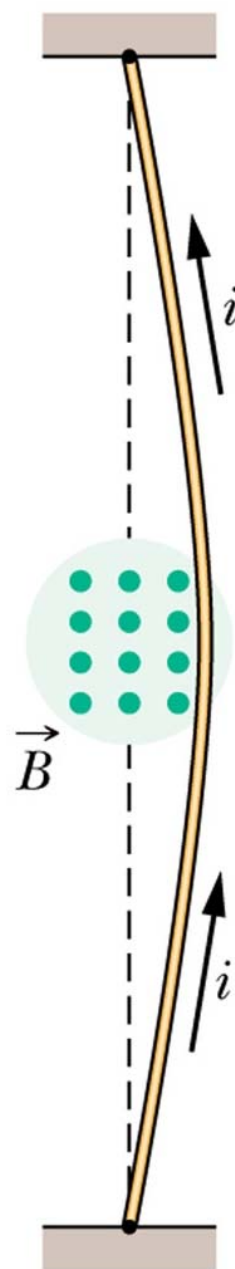
$$d\vec{F} = I d\vec{L} \wedge \vec{B}$$

dove $d\vec{L}$ è l'elemento orientato di conduttore in cui scorre la corrente. Per stabilire la direzione della forza vale la regola della mano destra, associando in questo caso la direzione della corrente al dito indice, il campo al medio, e il pollice alla forza risultante.

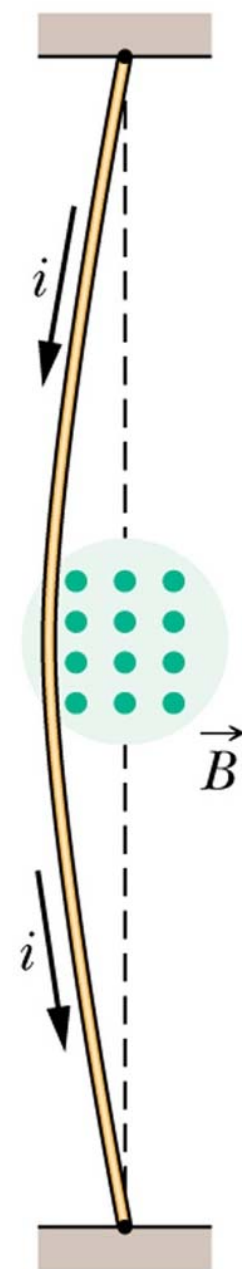




(a)



(b)



(c)

Dato che un circuito in cui scorre corrente è (in generale) chiuso, si può calcolare la forza agente su un intero circuito, sommando i contributi. Nel caso di un circuito (piccolo) posto in una regione di campo uniforme, la forza totale è nulla:

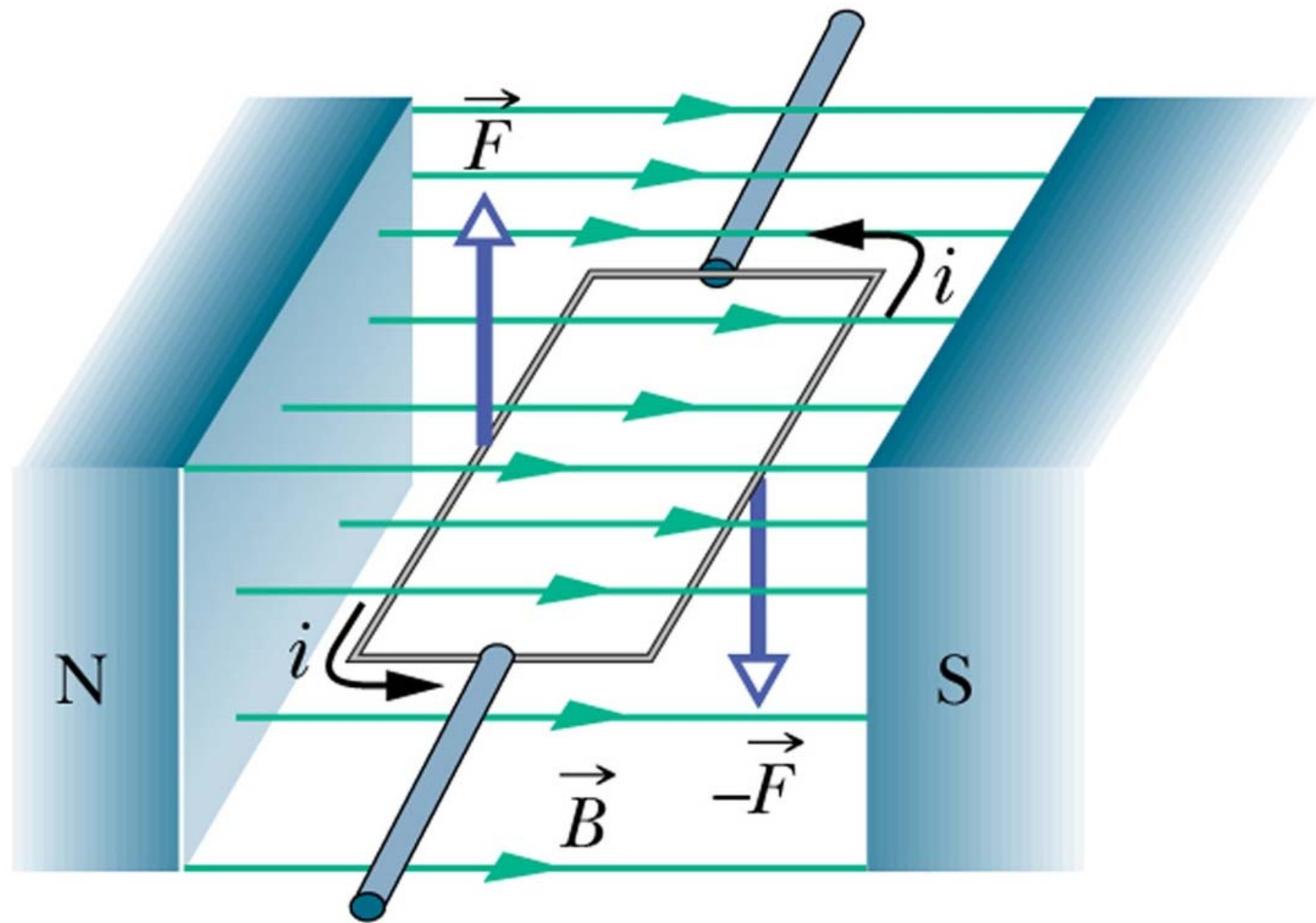
$$\vec{F} = I \oint (d\vec{L} \wedge \vec{B}) = I \oint (d\vec{L}) \wedge \vec{B} = 0$$

ma si può verificare che il **momento della forza** è diverso da 0, e vale

$$\vec{N} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$$

dove si è introdotto il **momento magnetico** del circuito (di una spira, equivalente a quello di un magnete) come il prodotto corrente - superficie, e direzione perpendicolare al piano del circuito:

$$\vec{\mu} = I \vec{A}$$



Generazione dei campi magnetici: Legge di Biot-Savart

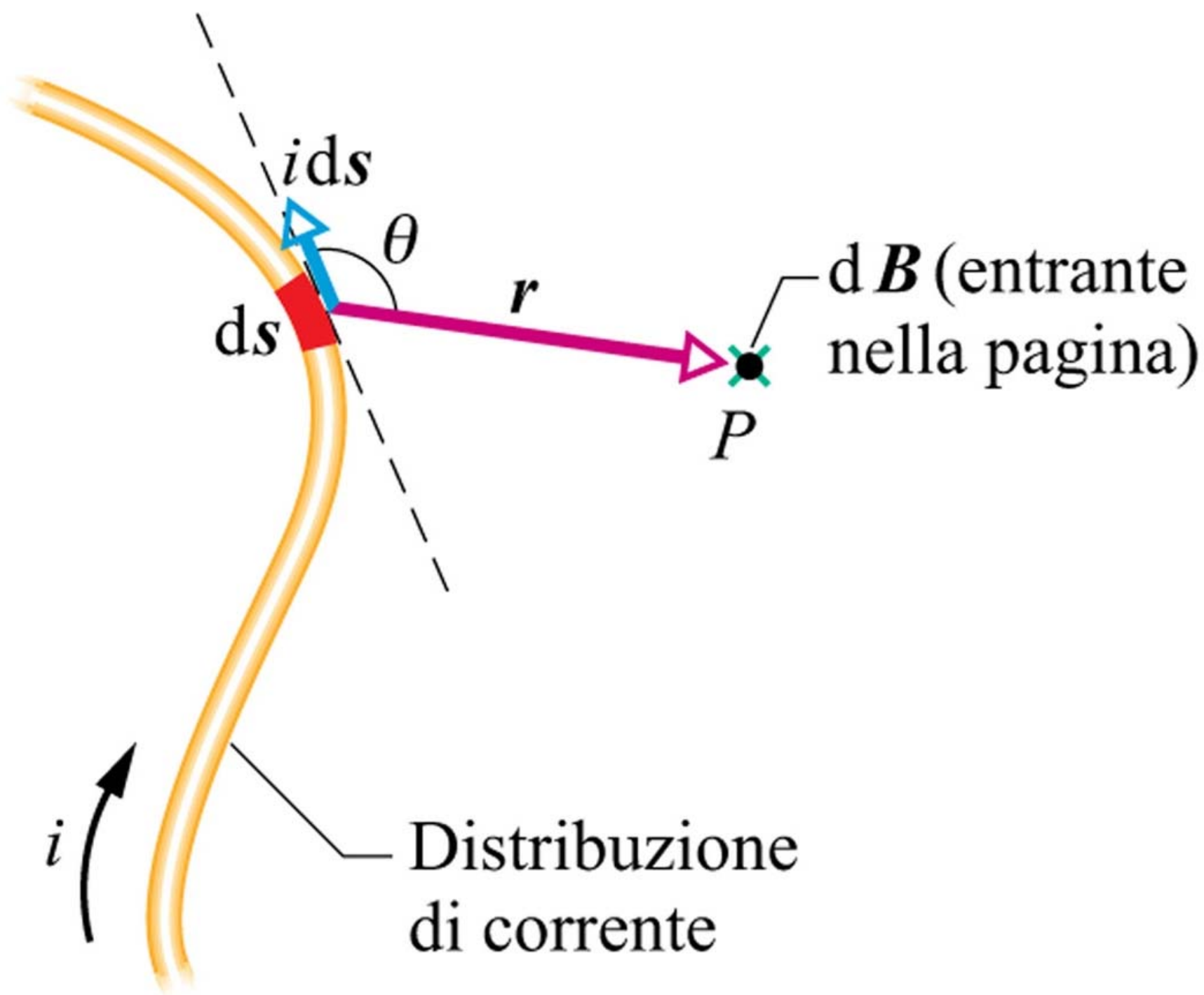
Sperimentalmente si trova che una carica in movimento (e quindi una corrente) produce un campo magnetico.

Sempre sperimentalmente, si trova che anche per il campo magnetico vale il **principio di sovrapposizione**: il campo è la somma dei campi generati da ciascuna sorgente.

L'intensità del campo dipende dal quadrato dell'inverso della distanza:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I ds \sin \theta}{r^2} \quad (1)$$

dove ds è l'elemento (di linea) in cui scorre la corrente I .



Anche per il campo magnetico l'intensità **dipende dall'inverso del quadrato della distanza**.

La formula completa tiene conto della direzione del campo mediante il prodotto vettore tra l'elemento di corrente (che genera) e la posizione del punto in cui si calcola il campo:

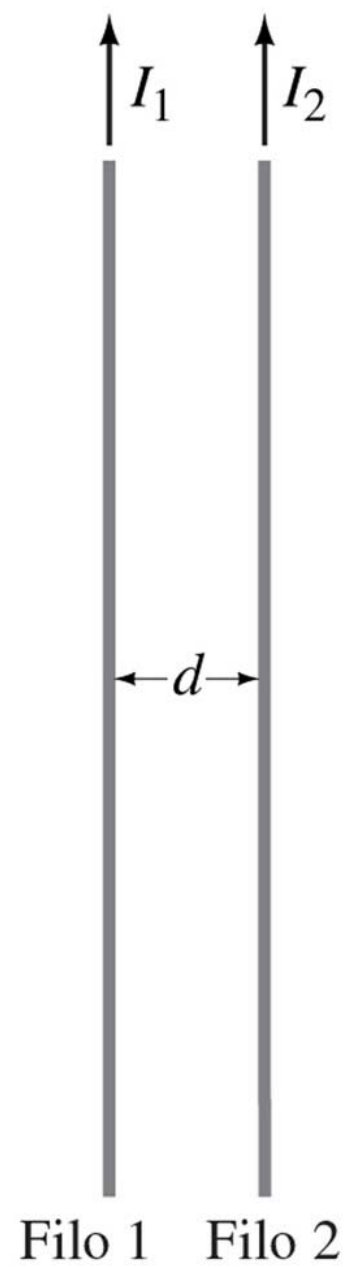
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Esempio: Campo magnetico di un filo rettilineo

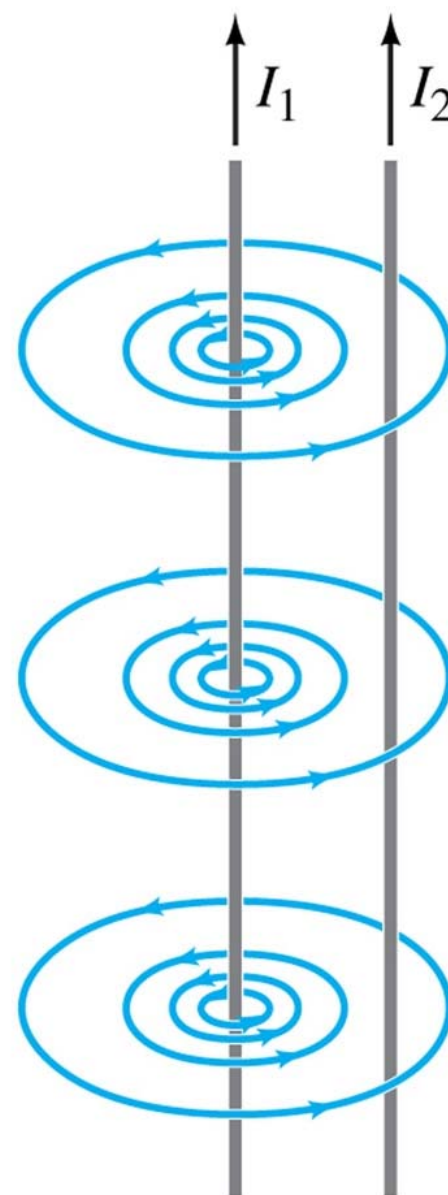
Le linee di forza del campo sono circonferenze concentriche al filo, e il verso del campo è quello derivato dall'applicazione della regola della mano destra.

Utilizzando l'eq.(1), per il modulo del campo ad una distanza R dal filo si ha:

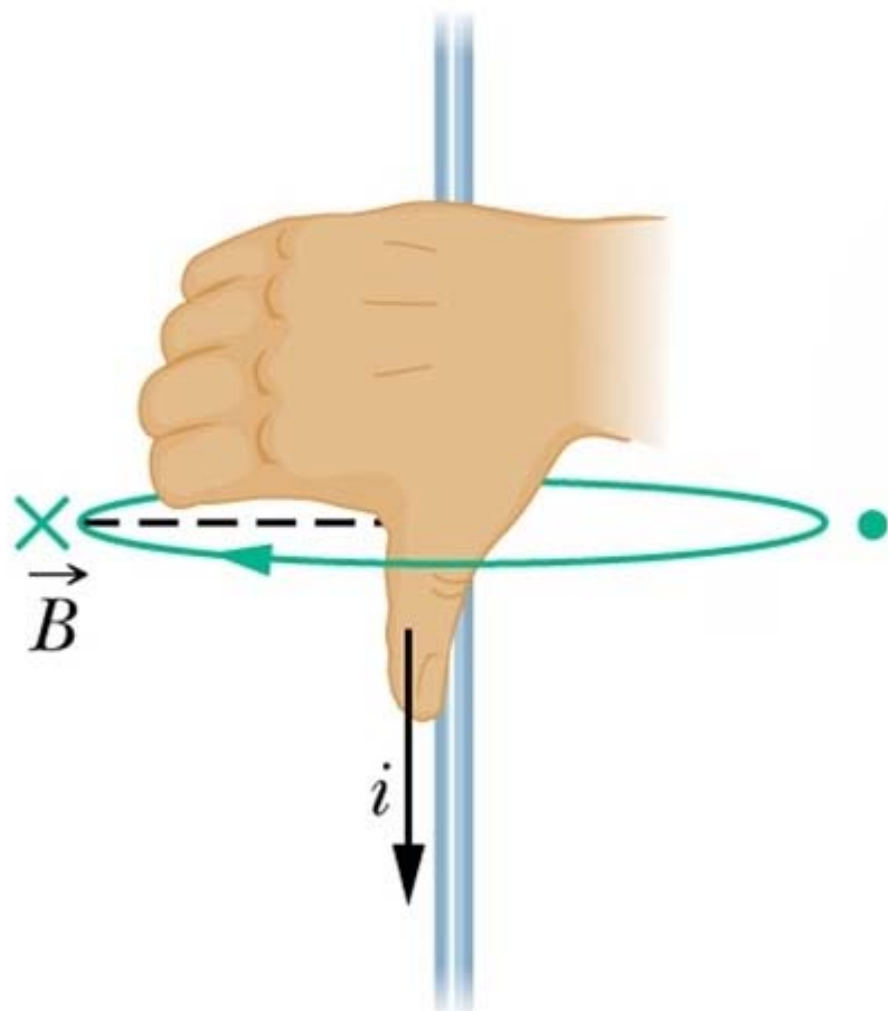
$$\begin{aligned} r &= \frac{R}{\sin \theta} \\ ds &= -\frac{r}{\sin \theta} d\theta \\ B &= 2 \int_{\pi/2}^0 dB = -\frac{2\mu_0 I}{4\pi} \int_{\pi/2}^0 \frac{r}{\sin \theta} \frac{\sin \theta}{r^2} d\theta = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \\ B_{filo} &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} \end{aligned}$$



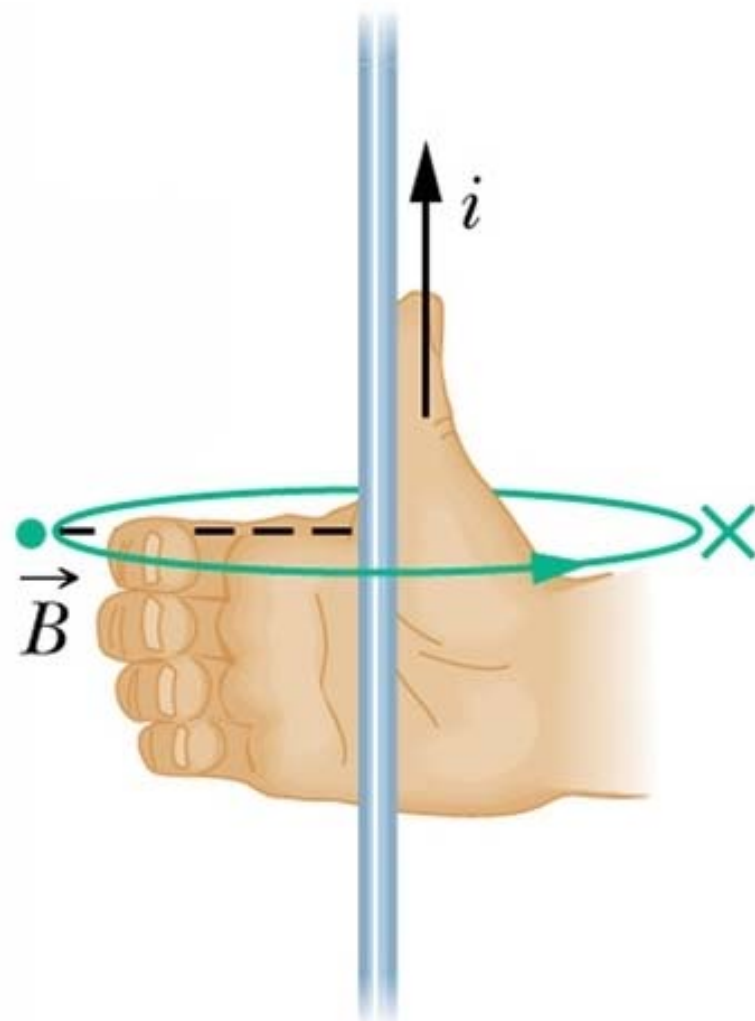
(a)



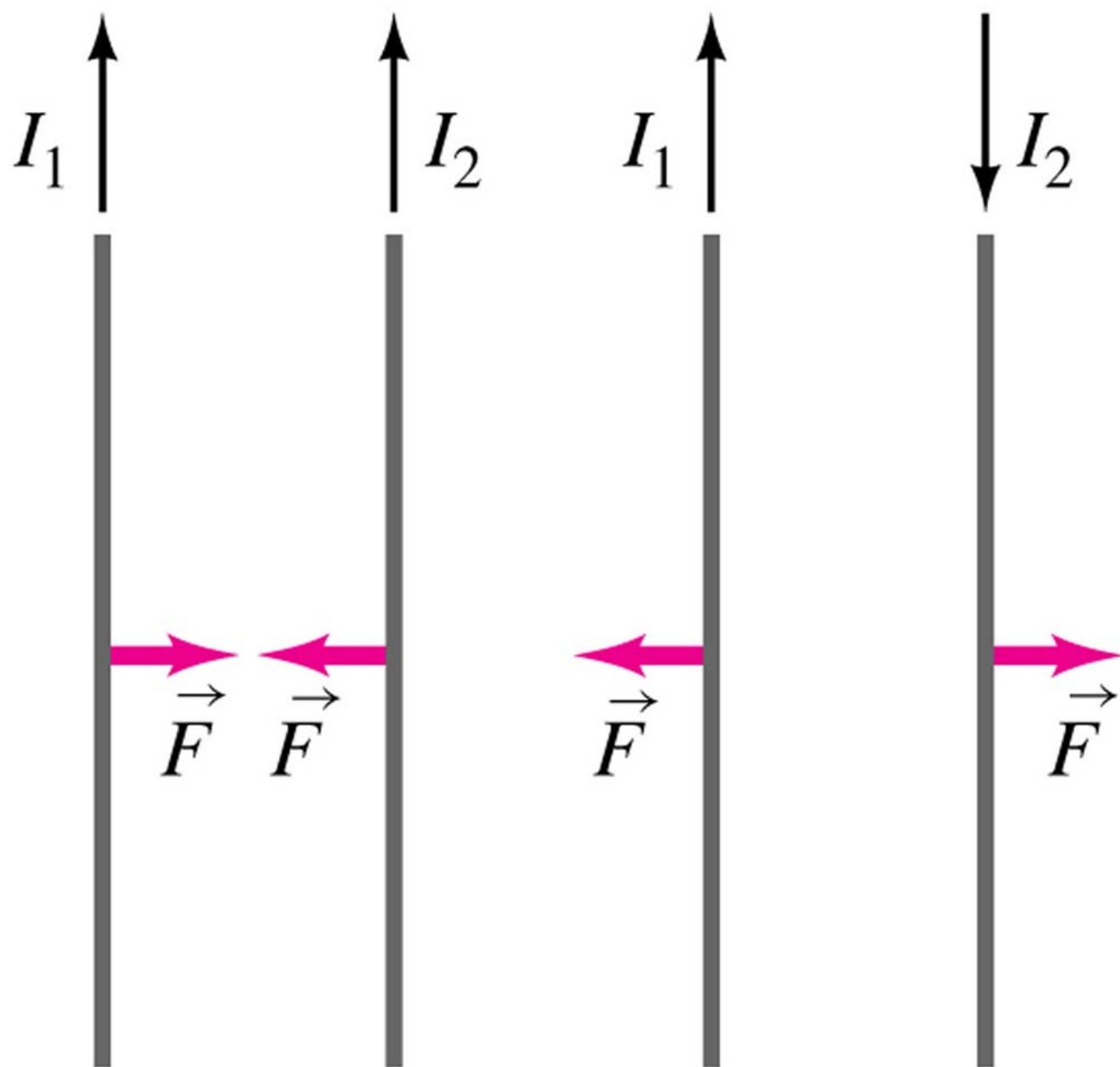
(b)



(a)



(b)



(a)

(b)

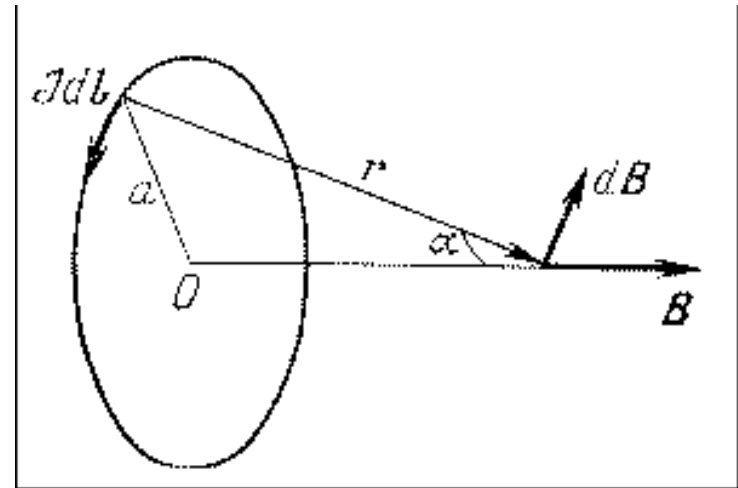
Esempio: Campo magnetico di una spira circolare

Il campo è facilmente calcolabile solo sull'asse della spira, dove è orientato parallelamente all'asse stesso (perpendicolarmente al piano della spira): se a è il raggio della spira, ad una distanza z sull'asse il modulo vale:

$$\sin \theta = 1 \qquad \sin \alpha = \frac{a}{r}$$

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I ds \sin \theta}{r^2} \sin \alpha$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi a I \frac{a}{r^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{2 r^3}$$



Nel centro della spira vale:

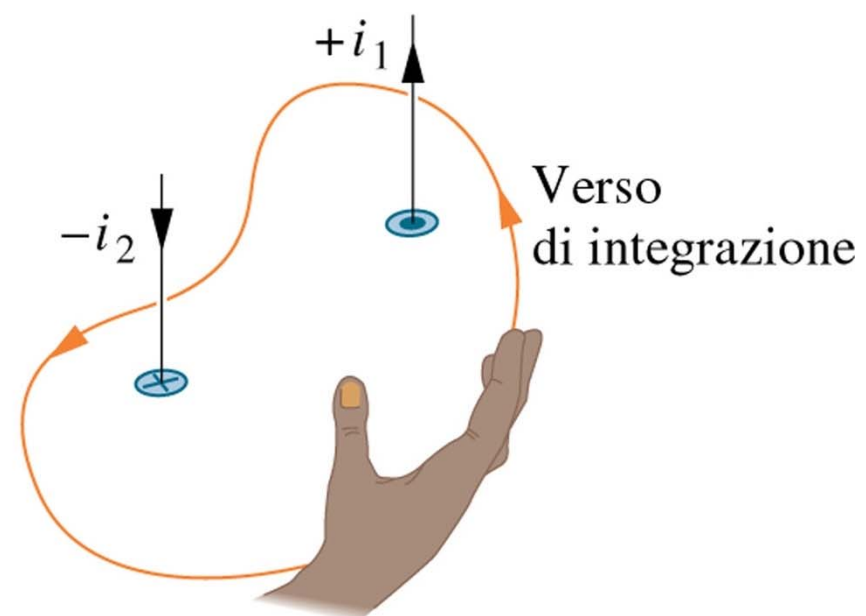
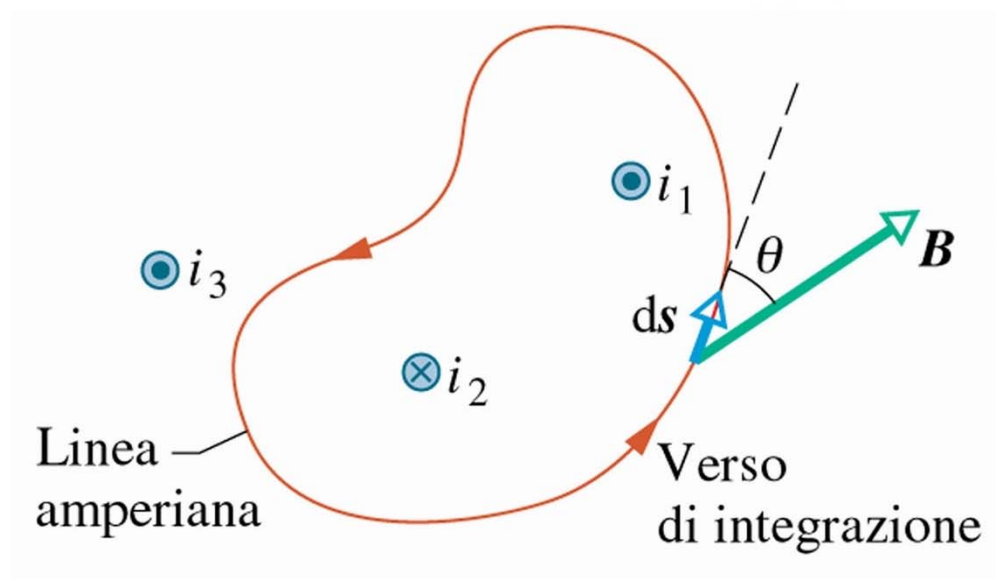
$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

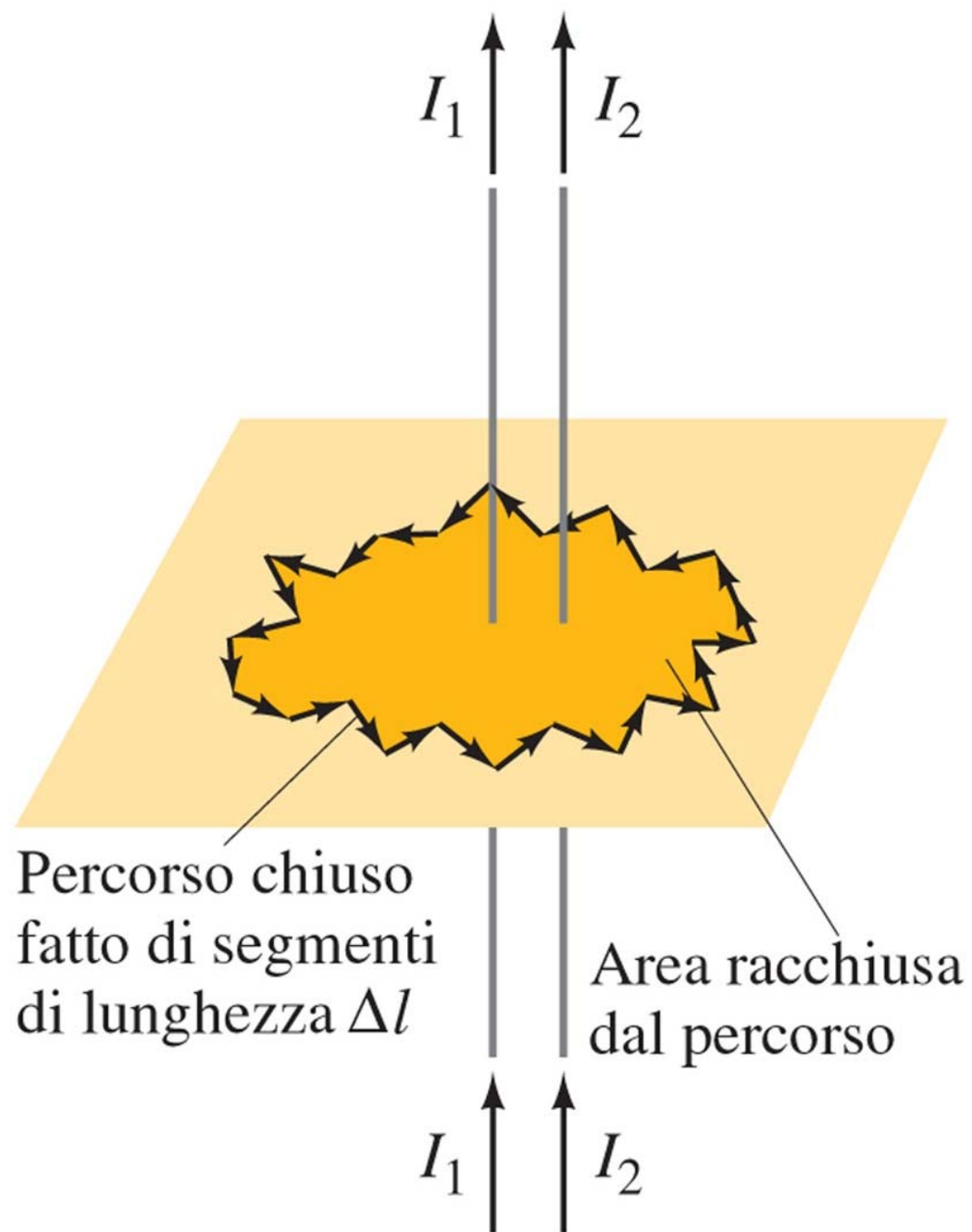
Legge di Ampere

Come in elettrostatica alcuni problemi erano risolvibili grazie ad una proprietà globale del campo elettrico quale il **flusso**, anche per il campo magnetico esiste una proprietà globale che viene espressa dalla legge di Ampere:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum I_{ch}$$

L'integrale di linea del campo magnetico svolto su un percorso chiuso è collegato al valore totale delle correnti che attraversano una (qualunque) superficie che ha come bordo il percorso chiuso stesso. La regola da applicare nel calcolo della somma (correnti positive e negative, e segno complessivo del termine) è quella solita della mano destra: allineando la corrente lungo il pollice, se l'orientazione delle dita della mano corrisponde a quella del verso di $d\vec{s}$ allora il contributo è positivo.





Campo magnetico all'interno di un filo percorso da corrente

Una sbarra percorsa da una corrente con densità superficiale σ , con simmetria sufficiente a rendere l'applicazione della legge di Ampère semplice: una sbarra a sezione circolare, raggio R , con σ uniforme.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint ds = B2\pi r$$

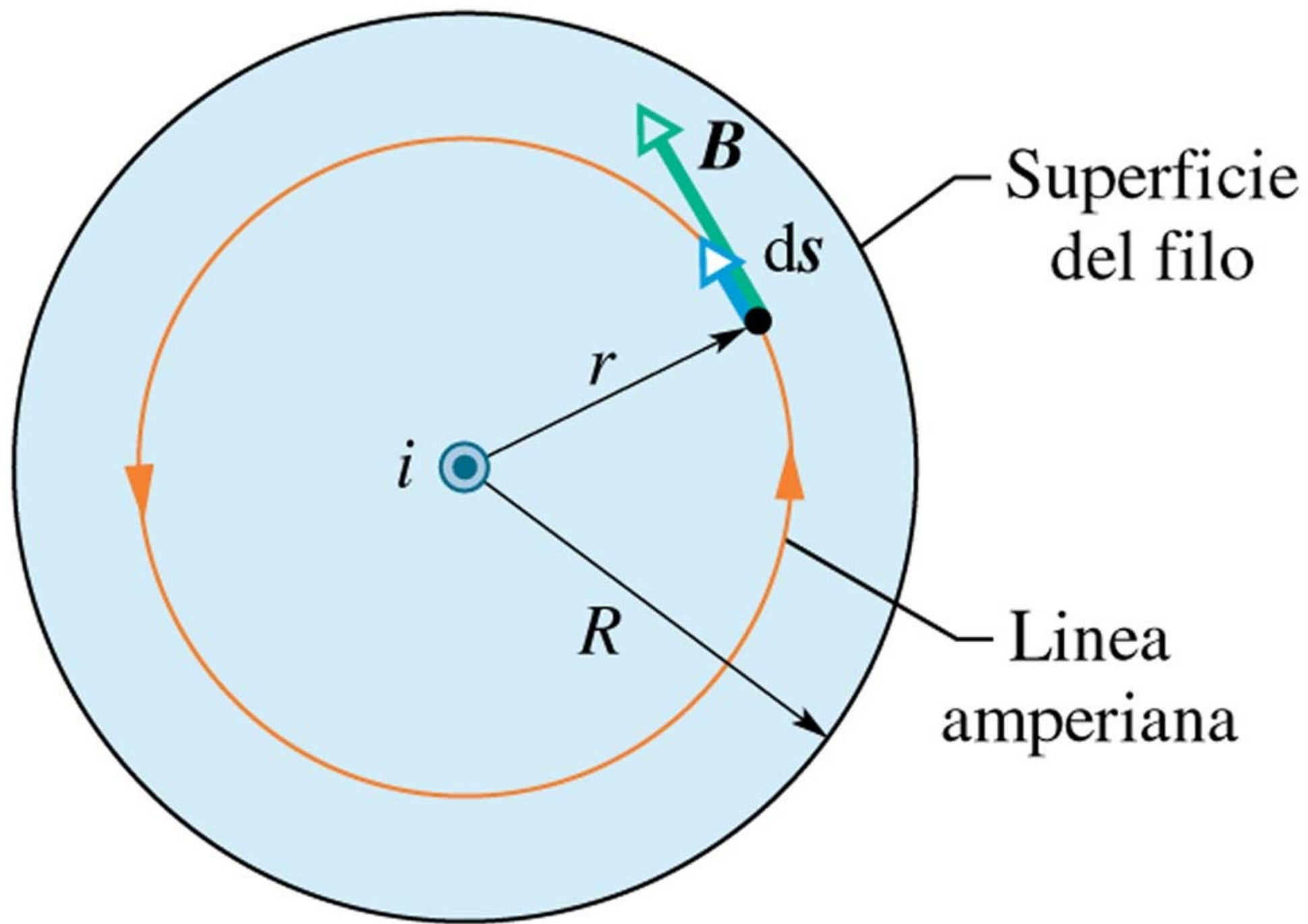
$$\mu_0 \sum I_{ch} = \mu_0 \sigma \pi r^2$$

$$B_{int}(r) = \frac{\mu_0}{2} \sigma r$$

sostituendo σ con la sua relazione per la corrente totale I :

$$\sigma = \frac{I}{\pi R^2}$$

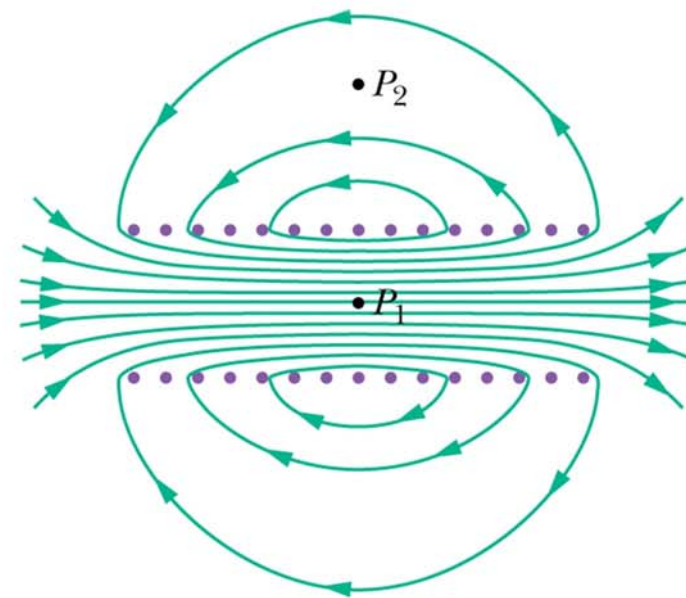
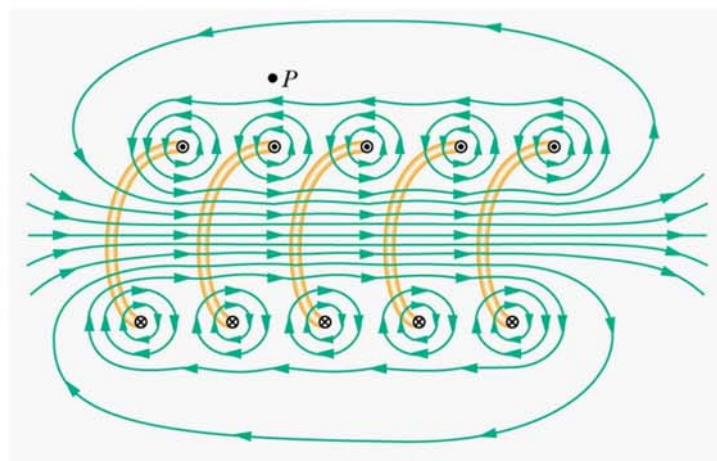
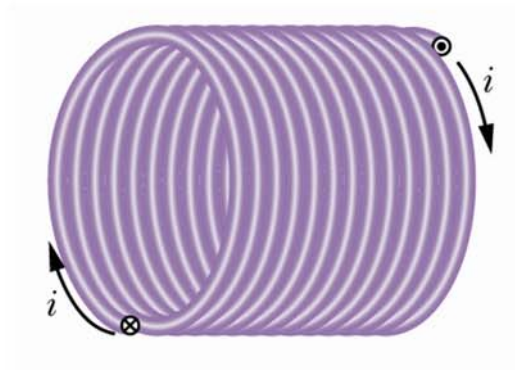
$$B_{int}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$

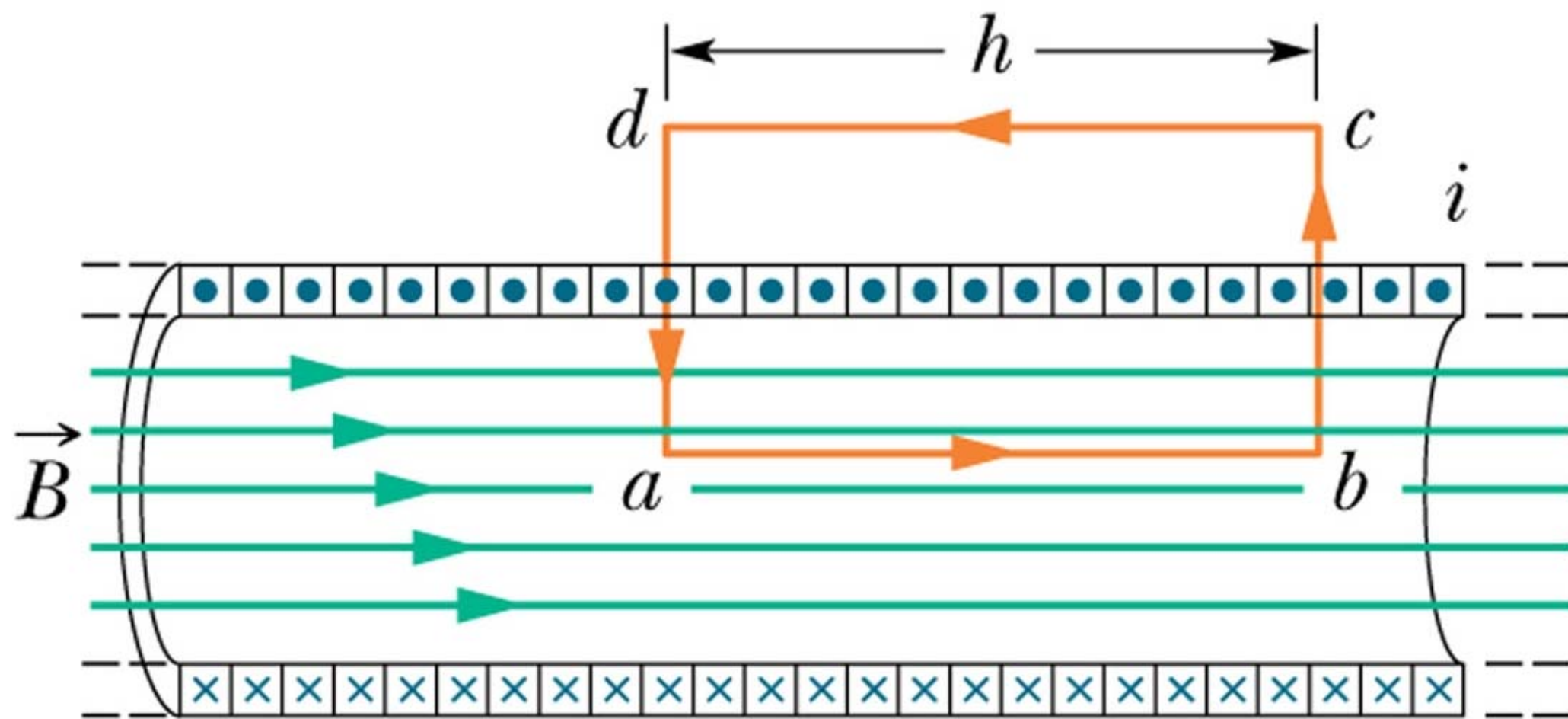


Solenoidi

Un modo per generare un campo magnetico uniforme consiste nel far fluire una corrente costante I in un solenoide, cioè in una serie di spire circolari molto vicine fra loro. Se si hanno N spire su una lunghezza L , cioè $n = N/L$ spire per unità di lunghezza, applicando il teorema di Ampère ad un solenoide di lunghezza infinita ($L \gg r$), notando che il campo magnetico all'esterno è nullo, si ha:

$$B_{solen} = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{L} I$$

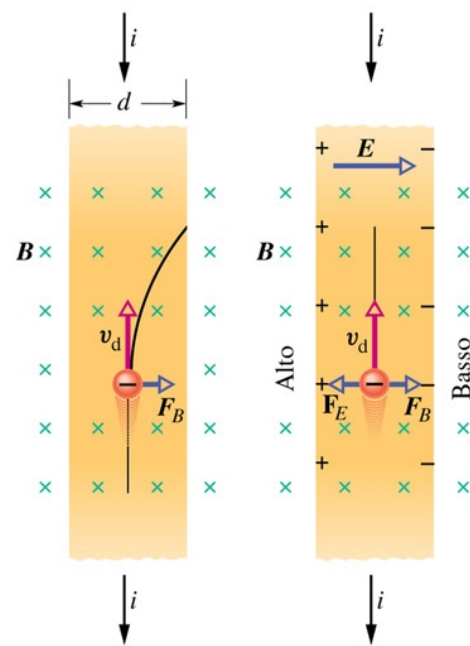




Effetto Hall

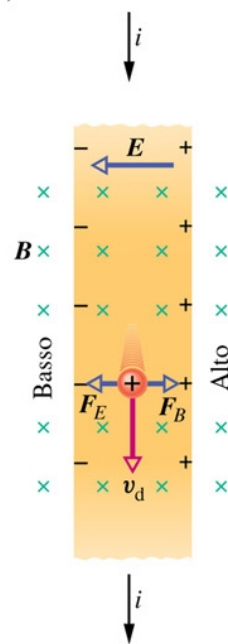
In un conduttore percorso da corrente, se sottoposto ad un campo magnetico perpendicolare alla velocità delle cariche, si instaura un accumulo di cariche di polarità opposta sui due lati del conduttore stesso; questo produce una differenza di potenziale (e un campo elettrico) che — in condizioni stazionarie — compensa la componente magnetica della forza di Lorentz. Misurando $\Delta\phi$ si ha una misura del prodotto vB , e quindi noto uno dei due si ricava l'altro.

$$v_D = \frac{E}{B}$$



(a)

(b)



(c)

Proprietà complessive dei campi statici (non dipendenti dal tempo)

$$\int \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (2)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (3)$$

$$\int \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad (4)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum I_{ch} \quad (5)$$

Eq. 2 rappresenta il **teorema di Gauss**, ed esprime il fatto che le sorgenti del campo elettrico sono le cariche elettriche.

Eq. 3 rappresenta la **conservatività** del campo elettrostatico (e quindi giustifica la definizione del potenziale).

Eq. 4 rappresenta la **manca di cariche magnetiche isolate**.

Eq. 5 rappresenta il legame tra il campo magnetico e le correnti: il campo magnetico è dovuto al moto (stazionario) delle cariche.