CAPITOLO 1

Introduzione

Nella fisica moderna i metodi algebrici — e in particolare la teoria dei gruppi — hanno acquistato un interesse sconosciuto alla fisica del secolo scorso. Si può vedere la cosa in una prospettiva generale, nel modo seguente.

La fisica "classica" del diciottesimo o diciannovesimo secolo ha avuto come suo massimo obiettivo quello della costruzione di modelli meccanici spazio-temporali; in tale spirito lo strumento matematico ben doveva essere l'analisi classica, col suo bagaglio di equazioni differenziali, atte a descrivere la fondamentale continuità e località dei processi fisici. Basta citare i nomi di Eulero, d'Alembert, Lagrange, Hamilton, Jacobi, Gauss, Maxwell, fino allo stesso Einstein.

La fisica del ventesimo secolo porta invece l'impronta della relatività e della meccanica quantistica; e perciò da un lato si ha la ricerca dell'invarianza sotto insiemi di trasformazioni; dall'altro l'indagine sugli aspetti di una teoria che risultino indipendenti da riferimenti, descrizioni, modelli particolari: cioè sugli aspetti strutturali nel senso della matematica moderna. Solo per citare qualche nome, si pensi a Weyl, Wigner, von Neumann, Birkhoff.

Un'altra ragione di questo aumento d'importanza dei metodi algebrici sta nel fatto che la meccanica quantistica, guardata dal punto di vista matematico, ha come struttura di base uno spazio lineare; di conseguenza non solo le osservabili, ma anche le trasformazioni di simmetria divengono operatori lineari su quello spazio, e diventa importante studiare le *rappresentazioni lineari* degli oggetti considerati: in particolare dei gruppi di simmetria.

Simmetria

Anche se la fisica classica non ha dato tradizionalmente molto spazio a considerazioni di simmetria, queste sono possibili e molte volte utili; cominceremo perciò il nostro studio con un approccio il più possibile indipendente dalla forma della teoria fisica cui dovremo applicarlo. In questo spirito, sono fondamentali alcuni concetti: *descrizione*, *riferimento*, *trasformazione di simmetria* (brev. simmetria). Parleremo poi, a seconda dei casi, di *stato* di un *sistema* fisico, oppure più genericamente di *fenomeno*.

Qualunque fenomeno fisico, per essere soggetto a indagine, dev'essere *descritto* in termini di misure di grandezze fisiche (osservabili), di relazioni fra queste (leggi fisiche) e in particolare di leggi di evoluzione temporale. Una tale descrizione presuppone però che sia stato fissato un *sistema di riferimento* (brev. riferimento). Un riferimento non va confuso con un sistema di coordinate: mentre quest'ultimo è un elemento della descrizione matematica, il riferimento è un concetto fisico. Esso designa l'insieme delle strutture materiali necessarie e sufficienti a consentire le osservazioni e le misure che dobbiamo impiegare nello studio del sistema (del fenomeno). In termini semplici, si può pensare "riferimento" come sinonimo di "laboratorio": prima di tutto sarà un riferimento *spazio-temporale*, ossia una struttura (corpo rigido) che consenta di stabilire le posizioni delle parti del sistema, e di uno o più *orologi.* Ma non basta: nel concetto di riferimento includiamo anche tutti gli strumenti necessari per misurare cariche, campi, temperature, frequenze, e in generale tutte le *osservabili* che possono intervenire nel fenomeno.

La descrizione di un fenomeno *rispetto a un dato riferimento* consiste di tutte le informazioni che sono risultate necessarie e sufficienti a caratterizzare il fenomeno, come già detto sopra. Ripetiamo che nella descrizione è bene includere le *leggi* relative al fenomeno in esame. Nel seguito daremo esempi, che potranno chiarire meglio il concetto.

L'interesse per le *simmetrie* nasce dal fatto che spesso l'andamento di un esperimento non dipende da certe caratteristiche del laboratorio (riferimento) in cui lo si esegue: così ad es. di solito non importa l'orientamento rispetto ai punti cardinali, l'altezza sul livello del mare, ecc. Anche la data e l'ora esatta in cui si svolge l'esperimento possono essere irrilevanti, ecc. (S'intende che questo non è vero sempre: data e ora sono essenziali nelle osservazioni astronomiche, l'altezza può essere importante se la pressione atmosferica influisce sul fenomeno, ma è addirittura determinante in un esperimento sul redshift gravitazionale; l'orientamento conta se il campo magnetico terrestre ha effetti osservabili, e così via.)

Tornando al caso favorevole, ha dunque interesse definire una trasformazione da un riferimento R a un altro R$'$, e da un sistema fisico S a un altro S$'$. La trasformazione potrà essere descritta, nei casi più semplici, da relazioni geometriche, come una rotazione o una traslazione; ma in seguito prenderemo in esame anche casi più complessi. Converrà tener presente che in linea di principio entrambi i sistemi S e S$'$ possono essere descritti da entrambi i riferimenti. Diremo S e S$'$ *soggettivamente identici* se le loro descrizioni risp. da R e da R$'$ coincidono:

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}}(\mathrm{S}) = \mathcal{D}_{\mathrm{R}'}(\mathrm{S}'), \tag{1–1}$$

dove abbiamo anche introdotto una notazione per la "descrizione del sistema S dal riferimento R."

Nota: Il concetto astratto di descrizione può essere materializzato con quello di "quaderno di laboratorio" (logbook): il protocollo di un esperimento, ossia tutto ciò che occorre per comprenderne lo svolgimento ed eventualmente riprodurlo. Brevemente in seguito parleremo di "taccuino."

Ovviamente non avremo in generale $\mathcal{D}_{\mathrm{R}}(\mathrm{S}) = \mathcal{D}_{\mathrm{R}}(\mathrm{S}')$, né $\mathcal{D}_{\mathrm{R}}(\mathrm{S}) = \mathcal{D}_{\mathrm{R}'}(\mathrm{S})$: nel primo caso descriviamo *due sistemi diversi dallo stesso riferimento*, nel secondo invece descriviamo *lo stesso sistema da due diversi riferimenti.* La prima si chiama di solito trasformazione "attiva," la seconda "passiva." Il motivo dei nomi è questo: nel primo caso stiamo attivamente cambiando il sistema, nel secondo ci limitiamo (passivamente) a guardare lo stesso sistema da due diversi punti di vista. Possiamo astrattamente parlare di "trasformazione della descrizione," introducendo un operatore ϱ: avremo per la trasformazione attiva

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}}(\mathrm{S}') = \varrho\, \mathcal{D}_{\mathrm{R}}(\mathrm{S})$$

e ovviamente per quella passiva

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}'}(\mathrm{S}) = \varrho^{-1}\, \mathcal{D}_{\mathrm{R}}(\mathrm{S}),$$

vista la (1–1). Solitamente riesce più utile il punto di vista attivo.

A titolo di esempio, supponiamo che la simmetria in questione sia la rotazione di un angolo α intorno a un asse verticale: se nel riferimento R abbiamo scelto assi cartesiani, con la z orientata verso l'alto, per ogni punto $P(x, y, z)$ del sistema S avremo la familiare legge di trasformazione:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\alpha - y \sin\alpha \\ y' &= x \sin\alpha + y \cos\alpha \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Qui x', y', z' sono le coordinate del punto trasformato in senso attivo, ossia appartenente a S′; se avessimo invece assunto il punto di vista passivo avremmo avuto

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\alpha + y \sin\alpha \\ y' &= -x \sin\alpha + y \cos\alpha \\ z' &= z. \end{aligned}$$

(si noti il cambiamento nei segni) ma ora x', y', z' stanno a significare le coordinate dello *stesso* punto P, dello *stesso* sistema S, ma *visto* da R′. È evidente il rischio di errori, se non si chiarisce bene quale punto di vista si è scelto, e se non lo si segue coerentemente.

Stati e osservabili

Finora non abbiamo precisato tutta le terminologia usata; in particolare, abbiamo parlato liberamente di "sistema," "fenomeno," "osservabile." Possiamo dare per sufficientemente definiti il primo e l'ultimo termine, mentre sul secondo ritorneremo. Occorre però aggiungere quello di "stato": è ben noto che il concetto di stato è essenziale in meccanica quantistica, ma ha pienamente senso anche in meccanica classica; trova poi impiego comune in termodinamica... Proprio dalla forma astratta in cui lo si usa in termodinamica prenderemo spunto per intenderlo in generale: stato di un sistema fisico è *l'astrazione dell'insieme delle informazioni* (ad es. valori di osservabili) che sono necessarie e sufficienti a caratterizzare il comportamento del sistema. Conviene parlare di "astrazione" per sottolineare che lo stato non coincide con i valori delle osservabili che lo individuano: queste infatti possono essere scelte in più modi equivalenti, per uno stesso stato.

Altra osservazione: lo stato così definito è inteso *a un dato istante*; in generale dunque lo stato dipenderà dal tempo. Sono in uso altre accezioni del termine "stato": citiamo quella di Heisenberg, in cui lo stato non cambia, ma la variazione nel tempo è a carico delle osservabili; e quella dello stato "sub specie æternitatis," che include tutta l'evoluzione temporale del sistema, e riesce utile in una teoria relativistica, dove lo stato nel primo senso incorre nella difficoltà derivante dalla relatività della simultaneità. Tuttavia non avremo occasione d'impiegare queste due accezioni, e ci atterremo alla forma più semplice e naturale che abbiamo introdotta per prima.

Definita una trasformazione di simmetria per il sistema (in senso attivo) riesce più comodo dire che essa trasforma lo stato, piuttosto che il sistema, come avevamo detto sopra. Va da sé che la simmetria sarà completamente definita appena sia detto come si trasforma il valore di ogni osservabile. Si noti che *non si trasformano le osservabili*, ma i loro valori: in concreto ciò vuol dire che ogni osservabile è definita da uno strumento di misura, che non viene toccato; è il sistema che cambia stato, e perciò con gli stessi strumenti porta a valori diversi per le grandezze che si misurano. Si veda l'esempio dato sopra per le rotazioni: gli assi cartesiani sono fissi, il che vuol dire che gli strumenti con cui misuriamo le coordinate non si muovono; però il sistema ruota, e così cambiano le coordinate dei suoi punti.

Si tenga presente che quanto detto sopra vale per il punto di vista attivo: dal punto di vista passivo la situazione s'inverte, perché cambiando il riferimento cambiano le osservabili, e non lo stato. È anche ovvio che se consideriamo sistemi soggettivamente identici abbiamo a che fare con entrambe le trasformazioni: in effetti il sistema S' che per R' è soggettivamente identico al sistema S visto da R, se lo descriviamo da R avrà uno stato trasformato, ma in R' sarà descritto in termini di osservabili anch'esse trasformate, scelte in modo tale da lasciare immutata la descrizione. Tutti questi, che possono sembrare puri giochi di parole, si chiariranno meglio anche nella loro importanza quando arriveremo ad applicazioni concrete, specie di tipo quantistico.

Diremo che un'osservabile è *simmetrica* se la simmetria in esame non ne cambia il valore (come accade alla z nel caso della rotazione (1–2); diremo invece che uno stato è *simmetrico* se tutti i valori delle osservabili (anche di quelle non simmetriche) restano uguali. Nel caso di una rotazione lo stato di un sistema assimilabile a un punto materiale classico potrà essere simmetrico se e solo se il punto si trova sull'asse z e la velocità è diretta come z. Per un sistema quantistico (ad es. un atomo) sarà simmetrico un autostato di L_z, se trascuriamo spin elettronici e nucleari. È forse il caso di approfondire questo esempio: perché non è simmetrico lo stato $2p_x$ di un atomo d'idrogeno, sebbene tutte le coordinate e i momenti coniugati abbiano valor medio nullo su quello stato? La risposta è che *ci sono altre osservabili*: ad es. il valor medio di x^2 non si annulla, e cambia con una rotazione.

Osservazione: La terminologia in materia di simmetrie può variare alquanto. Quella che qui abbiamo chiamato “osservabile simmetrica” si dice di solito “invariante,” mentre “simmetria” e “invarianza” sono più o meno sinonimi, con una preferenza per il termine “simmetria” nel caso di trasformazioni discrete, e per “invarianza” nel caso continuo. La scelta che qui abbiamo fatta è di usare sempre “simmetria,” riservando “invarianza” per un altro concetto, che introdurremo fra poco.

Invarianza

La più antica formulazione di una legge d'invarianza è il *principio di relatività* di Galileo:

> “*Non è possibile distinguere tra due riferimenti in moto relativo traslatorio uniforme, con esperimenti eseguiti al loro interno.*”

Ciò si esprime, col nostro linguaggio, al modo seguente: comunque scelto un fenomeno F, che descriviamo in R, esiste in R′ un fenomeno F′ *soggettivamente identico*:

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}}(\mathrm{F}) = \mathcal{D}_{\mathrm{R}'}(\mathrm{F}'). \tag{1–3}$$

La (1–3) somiglia molto alla (1–1): l'unica differenza sta nell'aver scritto F in luogo di S. Ma la novità è tutta qui: stiamo dicendo non più che esistono sistemi identici, o stati identici, ma *fenomeni* identici, ossia cose che accadono nel tempo. Si può precisare il discorso al modo seguente: se abbiamo preparato due sistemi in modo che i loro stati siano soggettivamente uguali all'istante t_0, essi resteranno uguali a qualunque istante.

Prenderemo spunto proprio dall'idea di Galileo per definire in generale il concetto d'invarianza: *diremo che una simmetria è un'invarianza del sistema in esame* (o che *le leggi fisiche del sistema sono invarianti* per quella simmetria) *se due copie del sistema, poste in stati soggettivamente identici a un certo istante, si mantengono a ogni tempo in stati ancora soggettivamente identici*, ossia *se l'evoluzione temporale conserva l'identità degli stati.* Possiamo enunciare il criterio come “principio del taccuino”: sussiste invarianza se osservando il taccuino di uno sperimentatore non è possibile decidere in quale riferimento è stato condotto l'esperimento.

Osservazione: Tutto questo discorso è chiaro se il tempo è lo stesso nei due riferimenti, ed è quindi, almeno a prima vista, non relativistico; qui non ci occuperemo di come vada riformulato per renderlo relativistico.

Possiamo rappresentare la situazione di un'invarianza per mezzo di un diagramma come il seguente:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{S}(0) & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{S}'(0) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \tau(t)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \tau(t)} \\ \mathrm{S}(t) & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{S}'(t) \end{array}$$

dove abbiamo indicato con σ la trasformazione fra gli stati corrispondente alla simmetria in questione, e con τ quella dovuta all'evoluzione temporale. Quello che abbiamo costruito si chiama "diagramma commutativo," in quanto indica che σ commuta con $\tau(t)$:

$$\sigma\,\tau(t) = \tau(t)\,\sigma. \tag{1–4}$$

Nota: Può accadere di dover considerare simmetrie *dipendenti dal tempo*: l'esempio più ovvio è una trasformazione di Galileo $x' = x + vt$, o anche una trasformazione di Lorentz. In tal caso la (1–4) va modificata come segue:

$$\sigma(t)\,\tau(t) = \tau(t)\,\sigma(0).$$

e la corrispondente modifica va fatta sul diagramma commutativo. Nel seguito non avremo però bisogno di occuparci di questa complicazione.

In poche parole, la distinzione fra simmetria e invarianza è la seguente: simmetria è una qualsiasi trasformazione degli stati del sistema (o del riferimento, se si assume il punto di vista passivo); la sua definizione è largamente arbitraria (vedremo meglio in seguito) e non implica alcuna asserzione avente contenuto fisico circa il sistema in esame. Invarianza è una simmetria che si conserva nel tempo, ossia che è compatibile con l'evoluzione temporale del sistema: questa è una proprietà fisica, che il sistema può possedere oppure no. D'importanza ancora maggiore sono ovviamente le invarianze a carattere universale, ossia che valgono per qualsiasi sistema.

Ecco qualche esempio. Abbiamo già parlato delle rotazioni come trasformazioni di simmetria: ovviamente una tale simmetria può essere definita per qualunque sistema fisico. Un sistema meccanico consistente di un punto materiale soggetto a una forza centrale è invariante per rotazioni, mentre non lo è per una forza generica. Tuttavia un sistema comunque complicato, ma isolato, è sempre invariante per rotazioni: questo è dunque un principio d'invarianza universale.

La simmetria rispetto a un piano è il caso tipico di simmetria (che dà il nome a tutte le altre). Non tutti i sistemi fisici sono invarianti per riflessioni: ad es. un corpo soggetto alla gravità (uniforme) è invariante per riflessioni rispetto a un piano verticale, ma non rispetto a un piano orizzontale. Pensando a sistemi isolati, l'invarianza per riflessioni rispetto a qualunque piano vale per una larga classe di sistemi, ma sappiamo da quasi 40 anni che essa non sussiste più quando entrano in gioco le interazioni deboli: non si tratta dunque di una legge universale.

Invarianze e campi esterni

Accade spesso che la non-invarianza sia dovuta a un'interazione del sistema con un "campo esterno." Gli esempi possono essere vari, e alcuni sono già stati visti. Pensiamo al moto nel campo della gravità, o a una particella carica in campo magnetico. In tutti questi casi possiamo assumere due diversi atteggiamenti:

- Definire la trasformazione di simmetria limitatamente alle sole osservabili del sistema, lasciando invariato il campo esterno: allora l'invarianza non sussiste. Così il moto di un grave non è invariante per rotazioni qualsiasi, ma solo per quelle attorno a un asse verticale.
- Includere nella trasformazione anche gli oggetti esterni che generano il campo (la Terra, o il magnete): allora si ritrova invarianza, ma al prezzo di dover considerare una simmetria poco realistica. Infatti non ha molto senso ruotare il campo gravitazionale terrestre, e anche nel caso di un campo magnetico di laboratorio è di scarso interesse pensare al confronto tra due esperimenti in cui si è fatto ruotare un magnete che pesa magari qualche tonnellata.

Però dal punto di vista teorico la cosa ha importanza, perché nella verifica che il risultato di un calcolo è corretto il test d'invarianza è di grande aiuto: in un caso del genere occorre appunto trasformare anche i campi esterni per recuperare l'invarianza più generale.