CAPITOLO 3

Un esempio storico: l'inversione spaziale

L'inversione spaziale è una simmetria che occupa un posto di rilievo nella storia della fisica di questo secolo. Vogliamo quindi dedicare un po' di spazio a discutere l'argomento.

Possiamo indifferentemente occuparci d'inversione spaziale o di riflessione rispetto a un piano, perché l'una si ottiene dall'altra con una rotazione di 180° rispetto a un asse ortogonale al piano. Come vedremo, in certi casi conviene ragionare sull'inversione, in altri sulla riflessione.

Ecco una definizione (incompleta) della riflessione rispetto al piano (y, z):

$$x' = -x, \qquad y' = y, \qquad z' = z. \tag{3–1}$$

Supponiamo di aver a che fare con una particella dotata di spin: allora la definizione è incompleta perché non abbiamo stabilito la trasformazione di $\vec{p}$ e di $\vec{s}$. Quanto a $\vec{p}$ la discussione è parallela a quella già fatta per la simmetria di rotazione, e ci porta a

$$p'_x = -p_x, \qquad p'_y = p_y, \qquad p'_z = p_z. \tag{3–2}$$

Per lo spin il discorso è più complicato, ma ancora a simile a quello fatto per le rotazioni. Non c'è niente di male a scrivere

$$s'_x = s_x, \qquad s'_y = s_y, \qquad s'_z = s_z$$

(ossia a dire che si lascia invariante lo spin); il problema è se la simmetria così definita è utile, cioè se sussiste invarianza per una classe abbastanza larga di sistemi e d'interazioni.

Noi sappiamo che una particella con spin di regola ha un momento magnetico (proporzionale a $\vec{s}$) per cui interagisce con un campo magnetico esterno. Negli atomi ad es. questo fatto dà luogo all'interazione spin-orbita (che in effetti è un'interazione fra il momento magnetico dell'elettrone e il campo magnetico che l'elettrone vede, nel suo riferimento di quiete, quando si muove nel campo elettrico generato dal nucleo e dagli altri elettroni). In sostanza nella hamiltoniana compare un termine del tipo $\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

Quanto a $\vec{B}$, esso è proporzionale al momento angolare orbitale dell'elettrone e alla sua carica. Se assumiamo (e siamo liberi di farlo) che la simmetria in questione non cambi la carica, avremo che $\vec{B}$ si trasforma come $\vec{L}$. Per la riflessione definita dalle (3–1), (3–2) si ha

$$L'_x = L_x, \qquad L'_y = -L_y, \qquad L'_z = -L_z$$

come si vede partendo dalle relazioni $L_x = yp_z - zp_y$ ecc. È allora facile verificare che in presenza d'interazione spin-orbita si avrà invarianza sse anche $\vec{\mu}$, e quindi anche $\vec{s}$, si trasforma come $\vec{L}$:

$$s'_x = s_x, \qquad s'_y = -s_y, \qquad s'_z = -s_z. \tag{3–3}$$

Poiché le leggi di trasformazione di $\vec{L}$ e di $\vec{s}$ sono opposte a quelle di $\vec{p}$, che è un vettore, si dice che $\vec{L}$ e $\vec{s}$ sono *pseudo*-vettori.

In conclusione: l'esperienza dimostra che in presenza d'interazioni elettromagnetiche (e anche forti) la simmetria definita dalle (3–1), (3–2), (3–3) è un'invarianza.

Non invarianza nel decadimento β

La scoperta storica (Wu e coll., 1957) è che l'invarianza non sussiste più quando entrano in gioco interazioni deboli, come accade nel decadimento β di un nucleo. La scoperta era stata preceduta da indicazioni derivanti dalle "particelle strane," di cui riparleremo più avanti. Sulla base di quegli indizi Lee e Yang avanzarono appunto l'ipotesi che l'invarianza per inversioni spaziali non fosse una legge universale, ma fosse invece violata dalle interazioni deboli.

L'esperimento di Wu si basa sulla seguente idea generale: se una simmetria è anche invarianza, qualora il sistema in esame sia stato posto in uno stato simmetrico a un certo istante, rimane in uno stato simmetrico a qualunque tempo. Lo si vede facilmente in termini formali osservando che se $[U, T] = 0$ allora un autovettore di U rimane tale per evoluzione temporale; ma la dimostrazione è già implicita nel diagramma commutativo del Cap. 1.

Tutto quanto occorre è dunque costruire uno stato simmetrico di un sistema, nella cui evoluzione entri in modo determinante un'interazione debole. La soluzione più ovvia è di pensare a un nucleo radioattivo β: infatti è noto che il decadimento β avviene tramite il processo

$$\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}$$

ovvero, in termini di quarks

$$\mathrm{d} \to \mathrm{u} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}.$$

Questi processi avvengono attraverso un'interazione diversa da quella elettromagnetica e da quella nucleare (forte), com'è mostrato dalla lunga vita media, e da tutto il quadro teorico e sperimentale, che esula dal nostro tema.

Una volta costruito lo stato iniziale simmetrico, occorrerà verificare se anche lo stato finale lo è. Poiché lo stato finale comprende più particelle, emesse con una certa energia cinetica, sarà la distribuzione angolare di queste (in pratica degli elettroni) che dovrà essere simmetrica. Si noti che uno stato finale simmetrico è condizione necessaria, ma non sufficiente per l'invarianza: niente esclude che in casi particolari anche un'interazione che non è invarianza dia luogo a uno stato simmetrico.

Resta dunque da costruire lo stato simmetrico. Una soluzione banale potrebbe essere la seguente: lavorare con nuclei di spin zero. Però la soluzione non funziona, perché un nucleo di spin zero è simmetrico anche per rotazioni, e non abbiamo dubbi che l'invarianza per rotazioni sussista: dunque la distribuzione degli elettroni di decadimento sarà certamente isotropa, anche se non c'è invarianza per riflessioni. Occorre dunque uno stato simmetrico per riflessioni ma non per rotazioni, ossia uno spin diverso da zero.

La scelta di Wu e coll. cadde sul ^{60}Co, che ha spin 5 e decade appunto β^- con vita media 7.5 anni. Per avere uno stato simmetrico per riflessioni ma non per rotazioni occorre *orientare* i nuclei, il che si fa immergendoli a bassa temperatura in un campo magnetico: se l'asse x è preso nella direzione del campo, tutti i momenti magnetici (e quindi gli spin) si allineano con l'asse x. Abbiamo quindi tutti i nuclei in un autostato di s_x con autovalore $5\hbar$, e con $\langle s_y \rangle = \langle s_z \rangle = 0$. Come si vede dalle (3–3), questo è uno stato simmetrico per le osservabili di spin. Per il resto, basta che i nuclei siano fermi nel piano di simmetria, per avere uno stato completamente simmetrico.

L'esperimento ha dimostrato che gli elettroni prodotti nel decadimento non hanno una distribuzione simmetrica rispetto al piano (y, z), il che prova che lo stato finale *non è simmetrico*, a differenza di quello iniziale. Dunque la riflessione rispetto a un piano (e di conseguenza anche l'inversione spaziale) *non è un'invarianza per le interazioni deboli.*

Si può semplificare il ragionamento, evitando di parlare di legge di trasformazione dello spin ecc., al modo seguente. L'apparato sperimentale di Wu consiste in sostanza in una bobina — che possiamo schematizzare con una spira situata in un certo piano — percorsa da corrente. Al centro della spira si mette il nucleo di ^{60}Co. La situazione iniziale è quindi simmetrica per costruzione (?). Si osserva l'evoluzione del sistema, che consiste nell'emissione di elettroni, e si vede che l'emissione non rispetta la simmetria. Questo è tutto, a parte il (?): chi ci assicura che lo stato iniziale sia veramente simmetrico? La bobina è simmetrica, ma lo stato del nucleo? L'ipotesi è che la bobina genera un campo magnetico simmetrico, e che un nucleo immerso in un campo simmetrico si deve mettere necessariamente in uno stato simmetrico. Tutto ciò è vero perché fidiamo nell'invarianza delle equazioni di Maxwell e dell'interazione fra nucleo e campo: dunque l'esperimento si basa su di un'invarianza già verificata in un certo ambito, per verificare se essa si estende anche ad altri tipi d'interazioni.

La parità

È noto che il risultato di questo esperimento si esprime dicendo che "la parità non si conserva." Conviene, d'ora in poi, ragionare sull'inversione spaziale, che sarà definita da relazioni analoghe alle (3–1), (3–2), (3–3):

$$\begin{aligned} x' &= -x, & y' &= -y, & z' &= -z \\ p'_x &= -p_x, & p'_y &= -p_y, & p'_z &= -p_z \\ s'_x &= s_x, & s'_y &= s_y, & s'_z &= s_z. \end{aligned} \tag{3–4}$$

La simmetria definita dalle (3–4) ha la proprietà che se la si applica due volte tutte le osservabili ritornano come all'inizio: in altre parole il suo quadrato è l'identità. Sia ora P l'operatore unitario di tale simmetria: vediamo che P^2 commuta con tutte le osservabili, per cui differisce dall'operatore identità solo per un inessenziale fattore di fase, che possiamo porre per convenzione uguale a 1; dunque $P^2 = 1$.

Ne segue che l'operatore (unitario) P ha solo due possibili autovalori: 1 e -1, il che implica tra l'altro che P è anche autoaggiunto, ossia è un'osservabile. P si chiama *parità*, perché i suoi autovettori per l'autovalore 1 restano invariati per inversioni, ossia sono *pari*, mentre quelli per l'autovalore -1 cambiano segno, ossia sono *dispari*.

Attenzione: Gli autostati di P sono tutti *simmetrici*, ossia restano invariati come *stati*: solo gli *autovettori* si comportano in due modi diversi!

Vogliamo ora trovare l'espressione di P, cominciando dal caso semplice di una singola particella. Non ha importanza se la particella è o no dotata di spin, perché le (3–4) mostrano che comunque lo spin resta invariato: dunque P commuta con $\vec{s}$. Consideriamo un generico stato, descritto dal vettore $|s\rangle$, e scriviamo la funzione d'onda (rappresentazione di Schrödinger)

$$\psi(x, y, z) = \langle x, y, z \,|\, s \rangle.$$

Dalle (3–4) si vede che P manderà un autovettore di x, y, z con certi autovalori in un autovettore con gli autovalori cambiati di segno:

$$P|x, y, z\rangle = |-x, -y, -z\rangle\, e^{i\varphi(x,y,z)}$$

dove in partenza dobbiamo tener conto di un possibile fattore di fase. Si dimostra però facilmente che è possibile ridefinire $|x, y, z\rangle$ in modo da eliminare il fattore di fase.

Ciò posto, per lo stato trasformato da P avremo

$$\psi'(x, y, z) = \langle x, y, z \,|\, s' \rangle = \langle x, y, z \,|P|\, s \rangle = \langle -x, -y, -z \,|\, s \rangle = \psi(-x, -y, -z).$$

Se $|s\rangle$ è un autovettore pari di P abbiamo $|s'\rangle = |s\rangle$, quindi $\psi' = \psi$. Troviamo allora $\psi(x, y, z) = \psi(-x, -y, -z)$, ossia ψ è una funzione pari; viceversa autovettore dispari implica funzione d'onda dispari.

È noto d'altra parte che le autofunzioni del *modulo* del momento angolare orbitale hanno parità $(-)^l$ e sono dunque autofunzioni di P. Possiamo scrivere per gli operatori la stessa relazione che esiste fra gli autovalori:

$$P = (-)^L$$

dove si è indicato con L l'operatore "modulo del momento angolare orbitale" definito da:

$$L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = L(L+1)\,\hbar^2.$$

Se il sistema comprende n particelle, definiamo la simmetria in modo che le osservabili di ciascuna particella si trasformino ancora secondo le (3–4): ne segue

$$P = (-)^{L_1 + \cdots + L_n}. \tag{3–5}$$

Detto in altre parole: la parità dello stato è data dalla *somma dei moduli* dei momenti angolari orbitali, che ovviamente non coincide col modulo della somma!

In tutto quanto precede l'inversione spaziale è stata definita rispetto all'origine delle coordinate. Per i sistemi di più particelle esiste un'altra definizione di uso frequente: l'inversione *rispetto al centro di massa.* La differenza sta in questo: se descriviamo il sistema mediante le coordinate del centro di massa e le coordinate relative, solo quest'ultime vengono trasformate, e lo stesso accade per i momenti coniugati. Perciò anche nella (3–5) entrano solo i momenti angolari relativi al centro di massa.

Esempio: Nel caso di due particelle (problema dei due corpi) c'è un solo momento angolare relativo al c.d.m., e la (3–5) si riduce semplicemente a $P = (-)^l$.

Osservazione 1: Come si vede dalla (3–5), la parità è un numero quantico *moltiplicativo*, non additivo.

Osservazione 2: Se le particelle sono *identiche*, lo scambio delle particelle è un'operazione di simmetria che coincide con l'inversione spaziale rispetto al centro di massa per quanto riguarda le coordinate e i momenti, ma in più scambia gli spin. Ne segue che nel caso di bosoni di spin 0 sono consentiti solo gli stati pari; per i fermioni di spin 1/2 sono consentiti solo gli stati di singoletto pari e quelli di tripletto dispari, e così via.

La parità intrinseca

Quando un esperimento comporta creazione o distruzione di particelle si produce una situazione nuova, che vogliamo illustrare con un esempio. Consideriamo la cattura di pioni negativi in deuterio:

$$\pi^- + {}^2\mathrm{H} \to \mathrm{n} + \mathrm{n} \tag{3–6}$$

e studiamo separatamente gli stati iniziale e finale. Se la cattura avviene a energia sufficientemente bassa, solo la componente $l = 0$ dello stato iniziale del pione ha importanza. Quanto al deutone, il suo stato fondamentale è una sovrapposizione di $^3S_1$ e $^3D_1$. Ricordando che lo spin del pione è 0, lo stato complessivo del sistema è dunque 1^+, dove la notazione indica J^P.

Per lo stato finale dovremo pure avere $J = 1$, che può essere ottenuto da diverse combinazioni di L e di S: $^1P_1$, $^3S_1$, $^3P_1$, $^3D_1$. Ma trattandosi di due neutroni, come abbiamo visto, solo $^3P_1$ è permesso dal principio di Pauli, e questo stato è del tipo 1^-. Dovrebbe dunque essere proibito dalla conservazione della parità mentre la cattura avviene con la probabilità che si calcola supponendo che il processo sia permesso.

Dobbiamo dunque concludere che la distruzione di un π^- comporta un cambiamento di parità dello stato, che è quanto assumere che il π^- contribuisce con un fattore -1 alla parità complessiva del sistema, ossia che ha una *parità intrinseca* negativa. In una teoria di campo una particella come il pione sarà quindi descritta da un campo non già scalare (spin 0) bensì *pseudoscalare.* Va da sé che se invece di essere distrutto il pione venisse creato, si ragionerebbe allo stesso modo: basta pensare al processo inverso di (3–6):

$$\mathrm{n} + \mathrm{n} \to {}^2\mathrm{H} + \pi^-.$$

Passiamo ora al caso del π^0: qui possiamo ragionare sul decadimento, che è elettromagnetico (quello dei pioni carichi non è utilizzabile, perché debole). Il π^0 decade in due fotoni:

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma.$$

Nel riferimento di quiete del π^0 i fotoni hanno ovviamente impulsi opposti, ed energie uguali, di circa 70 MeV.

Cominciamo con l'osservare che una particella in quiete ha certamente momento angolare orbitale nullo; il vettore di stato è quindi pari rispetto a qualunque riflessione. Scelto l'asse z nella direzione di emissione dei fotoni, e l'asse x a piacere, consideriamo il comportamento del sistema per riflessioni rispetto al piano (y, z). I fotoni avranno uno stato di polarizzazione, rappresentato da un vettore ortogonale all'impulso: se entrambi i fotoni sono polarizzati nel piano (y, z) lo stato è pari per riflessioni, e lo stesso accade se entrambe le polarizzazioni sono ortogonali al piano. Se invece uno è parallelo e l'altro ortogonale, lo stato è dispari. Dunque studiando lo stato di polarizzazione dei fotoni emessi si ricava la parità dello stato finale.

L'esperimento consiste nell'analizzare la probabilità di decadimento in funzione dell'angolo tra i due vettori di polarizzazione: un massimo a vettori paralleli indica parità $+1$, un massimo a vettori ortogonali indica parità -1. I risultati corrispondono al secondo caso, e siamo quindi nella stessa situazione del π^-: anche il π^0 ha parità intrinseca negativa.

La parità del terzo membro della famiglia dei pioni non si presta a una verifica diretta, ma la stretta somiglianza di proprietà del π^+ con gli altri due (specie con il π^-, di cui è antiparticella) rende inevitabile assumere che la sua parità intrinseca sia ancora negativa.

La parità intrinseca dei fotoni

Poiché nel decadimento del π^0 intervengono dei fotoni, è naturale pensare alla loro parità intrinseca: però questa non ha influenza sull'analisi fatta, perché i fotoni sono due e il contributo (moltiplicativo, ricordiamo) alla parità è sempre $+1$. Occorre dunque prendere in considerazione processi in cui si crea o si distrugge un solo fotone; ma questi sono assai comuni al livello atomico, dove si sa che esistono infatti le *regole di selezione per parità*, a cominciare dalla *regola di Laporte* per le transizioni di dipolo elettrico, che impone un cambiamento di parità fra stato iniziale e stato finale.

Vista alla luce di quanto detto fin qui, la regola di Laporte lascia aperte due possibilità:

a) il fotone ha parità intrinseca positiva, e la sua funzione d'onda è dispari

b) il fotone ha parità negativa, ma la sua funzione d'onda è pari.

La scelta fra le due alternative si fa nel modo più semplice esaminando l'analogo classico del problema in esame. Supponiamo di avere un'antenna (dipolo) percorsa da corrente alternata di data frequenza. Se l'antenna è piccola rispetto alla lunghezza d'onda emessa, il campo elettrico della radiazione, per $r \gg \lambda$, ha un'espressione semplice: la direzione del campo è lungo i meridiani, nello stesso verso in tutti i punti dello spazio, e il suo modulo va come $\sin\vartheta$.

Ne segue che in punti diametralmente opposti rispetto all'antenna si ha lo stesso campo, in grandezza e direzione. Il quadrato del campo misura l'intensità dell'onda, che in termini quantistici darà la probabilità di osservare il fotone: è dunque ragionevole trattare il campo elettrico come funzione d'onda del fotone, e concludere che tale funzione *per un'emissione di dipolo elettrico* ha parità $+1$. Si realizza dunque l'alternativa *b*) e *i fotoni hanno parità intrinseca negativa.* Ragionando sulle regole di selezione di dipolo magnetico, quadrupolo elettrico, ecc. si arriva sempre alla stessa conclusione.

Nota 1: Trattare il campo elettrico come funzione d'onda dei fotoni è in realtà piuttosto semplicistico: in una teoria di campo quantizzata la questione di quale sia la funzione d'onda dei fotoni va discussa accuratamente. La causa della difficoltà è che i fotoni hanno massa nulla; ovviamente non possiamo affrontare qui il problema.

Nota 2: È ben noto che per le transizioni di dipolo elettrico esiste anche una regola di selezione sul momento angolare, che s'interpreta dicendo che il fotone ha momento angolare 1. Questo può sembrare in contrasto coi discorsi precedenti, secondo i quali $l = 1$ implica parità negativa. Occorre però tener presente che quando si dice "momento angolare 1" ci si riferisce a J, e il fotone ha anche uno spin 1 (sebbene in senso particolare, di nuovo a causa della massa nulla: infatti esistono due soli stati di polarizzazione, e non tre, il che è connesso, come è noto, alla trasversalità delle onde e.m.). Sarebbe improprio dire che un fotone di dipolo elettrico ha $l = 0$: infatti la distribuzione angolare non è isotropa. Però agli effetti della parità "tutto va come se…"

Il decadimento del K

Uno degli indizi di non conservazione della parità cui accennavamo sopra (il più semplice da descrivere) venne nei primi anni '50 dal decadimento di una delle particelle "strane" che allora si cominciavano a scoprire: il mesone K. Le particelle strane furono così chiamate perché mostravano una stranezza di comportamento: venivano prodotte (agli inizi in interazioni ad alta energia nei raggi cosmici) con frequenza relativamente alta, ma decadevano con vita media sproporzionatamente lunga.

La spiegazione che venne data, e che resta valida, fu che la produzione avvenisse tramite un'interazione forte, ma il decadimento forte fosse proibito da una nuova regola di selezione, per cui avveniva tramite interazione debole. La regola di selezione fu associata a un nuovo numero quantico, la *stranezza*, che doveva conservarsi nelle interazioni forti ma non nelle deboli. La regola di selezione sulla stranezza non proibiva la produzione di particelle strane, perché esse erano create in coppie di stranezza opposta; viceversa il decadimento era proibito perché richiedeva la scomparsa di una singola particella di stranezza non nulla e la creazione di più particelle di stranezza zero.

Una di queste particelle strane è il mesone K, che ha diversi modi di decadimento: ora c'interessano quelli in due o in tre pioni. Va detto che in un primo tempo si riteneva di aver a che fare con due distinte particelle: una che decadeva in due pioni, e che venne chiamata θ, e un'altra che decadeva in tre pioni, e prese il nome di τ. In seguito si vide che le due particelle avevano troppe cose in comune per essere considerate distinte: in particolare massa e modi di produzione. Si aveva dunque a che fare con un'unica particella, capace di decadere in due o in tre pioni.

Il problema era quello di determinare spin e parità intrinseca del K dai suoi modi di decadimento. Cominciamo con quello in due pioni, che è molto semplice: applicando le regole già viste si ha immediatamente che se lo spin è pari la parità è positiva, e viceversa. Il decadimento in tre pioni è più complicato, e il suo studio non può essere trattato in poche righe. Diamo perciò solo il risultato: dall'analisi delle distribuzioni angolari e in energia dei pioni emessi si vede che lo spin dev'essere zero. Di conseguenza la parità è negativa. Infatti abbiamo due momenti angolari orbitali da comporre, che debbono essere uguali per poter ottenere un risultante nullo: dunque $l_1 + l_2$ è pari, e restano solo le parità intrinseche di *tre* pioni.

Ecco la difficoltà: la parità del K risulta diversa a seconda del modo di decadimento che si considera. Partendo da questo fatto e da problemi analoghi relativi ad altre particelle strane, Lee e Yang nel 1956 esaminarono le prove sperimentali esistenti sulla conservazione della parità nelle interazioni deboli: conclusero che era sempre stata data per scontata, ma *senza prove sperimentali dirette*, e avanzarono proposte di possibili esperimenti. Il risultato di quello sul decadimento β è stato già descritto.

La parità intrinseca dei nucleoni e la superselezione della carica

Una volta accettato il concetto di parità intrinseca di una particella ci si può chiedere quale sia la parità intrinseca di un neutrone o di un protone: la questione sorge già nel processo (3–6), dove un protone si trasforma in un neutrone. Nell'analizzare quell'esperimento noi abbiamo supposto implicitamente che protone e neutrone abbiano la stessa parità intrinseca: è giusto?

Occorre osservare che le due particelle hanno carica diversa, il che implica che non possono semplicemente trasformarsi l'una nell'altra; inoltre essendo fermioni non possono neppure essere create o distrutte singolarmente. La differenza di carica ha in realtà un'implicazione ancora più profonda: non solo la carica elettrica si conserva, il che è quanto dire che nessuna hamiltoniana può avere elementi di matrice fra stati di carica diversa; ma in effetti lo stesso accade per tutte le osservabili. Per un qualsiasi sistema non esistono mai osservabili che abbiano elementi di matrice fra stati di carica diversa, ossia tutti gli stati fisicamente realizzabili sono autostati della carica elettrica (principio di *superselezione* della carica). Non possiamo qui esaminare se questo principio, che è sperimentalmente verificato, possa essere dedotto da altri, o debba essere assunto come postulato indipendente.

In conseguenza della superselezione della carica, la domanda circa il confronto fra le parità di protone e neutrone, o più in generale fra particelle con diversa carica (anche fra i tre pioni) non ha senso fisico. Ciò non toglie che possiamo *convenzionalmente* assegnare le parità di alcuni stati (uno per ogni autovalore della carica) e poi definire, questa volta con pieno significato fisico, la parità degli altri stati della stessa carica *rispetto a quello*.

Concludiamo osservando che la superselezione della carica non è l'unica esistente: lo stesso vale, per quello che ne sappiamo, per il numero barionico, e sembra anche per i numeri leptonici.