CAPITOLO 5

Rappresentazioni di un gruppo

Abbiamo già visto che in m.q. un'operazione di simmetria si traduce sempre (teorema di Wigner) in un operatore (unitario) sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ dei vettori di stato. Se abbiamo a che fare con un intero gruppo di simmetria, ad ogni elemento del gruppo dovrà corrispondere un operatore:

$$\forall g \in \mathcal{G} :\ \ g \mapsto U(g).$$

Dovremo però richiedere anche che il prodotto vada nel prodotto:

$$gh \mapsto U(g)\, U(h)$$

Nota: A rigore basterebbe la condizione più debole

$$gh \mapsto U(g)\, U(h)\, e^{i\varphi(g,h)}$$

ma si può dimostrare che per quasi tutti i gruppi d'interesse in fisica (l'unica eccezione importante è il gruppo di Galileo, di cui non ci occuperemo) si può sempre ridefinire la fase di $U(g)$ in modo da eliminare il fattore di fase esplicito.

È questo un caso particolare di *rappresentazione* di un gruppo, e il fatto che le r. giochino un ruolo così essenziale in m.q. ne giustifica uno studio approfondito. Partiremo da una definizione più generale di r., in modo da potervi includere anche casi interessanti che nascono da altre situazioni fisiche.

Sia dato uno spazio lineare $\mathcal{V}$ (che supporremo definito sul corpo $\mathcal{K}$, complesso o reale a seconda dei casi); ricordiamo che si chiama *automorfismo* di $\mathcal{V}$ ogni applicazione bigettiva α di $\mathcal{V}$ su se stesso, che conserva le combinazioni lineari:

$$\alpha :\ \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$
$$u, v \in \mathcal{V},\ a, b \in \mathcal{K} : \quad \alpha(au + bv) = a\,\alpha(u) + b\,\alpha(v).$$

L'insieme degli automorfismi di $\mathcal{V}$ è un gruppo sotto la legge di composizione naturale:

$$\alpha \circ \beta :\ u \mapsto \alpha(\beta(u))$$

e viene indicato con $\mathrm{Aut}\,\mathcal{V}$.

Ciò posto, si chiama *rappresentazione* di un gruppo $\mathcal{G}$ su $\mathcal{V}$ un omomorfismo ϱ di $\mathcal{G}$ in $\mathrm{Aut}\,\mathcal{V}$. In parole più semplici, ciò significa che ad ogni $g \in \mathcal{G}$ corrisponderà un automorfismo $\alpha = \varrho(g)$, con la condizione che sia sempre

$$\varrho(gh) = \varrho(g)\, \varrho(h).$$

Non occorre che elementi distinti di $\mathcal{G}$ abbiano r. distinte: se ciò accade, ossia se ϱ è iniettiva, si dice che la r. è *fedele.* Ovviamente una r. non fedele è dotata di nucleo non banale; per il teorema visto alla fine del cap. precedente, ciò è possibile solo se $\mathcal{G}$ non è semplice. Perciò le r. di un gruppo semplice sono tutte fedeli, a parte quella banale che mappa $\mathcal{G}$ nell'identità di $\operatorname{Aut}\mathcal{V}$.

La dimensione di $\mathcal{V}$ si chiama *dimensione della rappresentazione*: possiamo avere quindi r. a dimensione finita o infinita, a seconda di $\mathcal{V}$, ma ovviamente le r. finite sono di utilità più diretta.

Con questa terminologia l'esempio visto all'inizio si descrive parlando di "r. unitaria del gruppo di simmetria sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$."

Si può anche dare una definizione meno astratta di r., osservando che nello spazio lineare $\mathcal{V}$ si può scegliere una base $\{\mathbf{e}_i\}$; in tal caso ad ogni automorfismo di $\mathcal{V}$ corrisponde una *matrice invertibile.* Nel caso semplice di dimensione finita n, avremo a che fare con matrici $n \times n$ a determinante non nullo (le matrici avranno elementi del corpo $\mathcal{K}$: reali o complessi a seconda dei casi). Allora la r. di $\mathcal{G}$ su $\mathcal{V}$ si riduce a un insieme di matrici $D(g)$:

$$\varrho(g) : \mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{e}_k [D(g)]^k{}_i.$$

L'ordine degli indici è quello necessario perché valga

$$D(gh) = D(g)\,D(h).$$

Per le componenti di un vettore si ha: se $\mathbf{v} = v^i\,\mathbf{e}_i$, e se $\varrho(g)$ manda $\mathbf{v}$ in $\mathbf{v}' = v'^i\,\mathbf{e}_i$, allora

$$v'^i = [D(g)]^i{}_k\,v^k.$$

Esempi

Vediamo alcuni esempi di r. per i gruppi già conosciuti.

Esempio 1: Consideriamo SO(3): sappiamo che una rotazione in coordinate cartesiane è rappresentata da una matrice ortogonale 3×3 a determinante 1:

$$R\,R^{\mathrm{T}} = I, \qquad \det R = 1.$$

Ovviamente si ottiene così una r. reale di SO(3), di dimensione 3. Anzi, poiché sappiamo che *ogni* matrice così fatta corrisponde a una rotazione, e matrici distinte danno rotazioni distinte, la r. è fedele. Abbiamo già detto che si usa spesso questa r. come definizione di SO(3): la chiameremo la r. *fondamentale.*

Esempio 2: Consideriamo ora il gruppo SO(2), che possiamo vedere come s.g. di SO(3), formato dalle sole rotazioni attorno a z. Per indicare tale relazione lo indicheremo con $\mathrm{SO}(2)_z$. Si trovano in modo naturale tre r.:

- In primo luogo, se $\mathcal{G}_1 \le \mathcal{G}$ ogni r. ϱ di $\mathcal{G}$ dà anche una r. di $\mathcal{G}_1$: basta considerare la restrizione di ϱ a $\mathcal{G}_1$. Abbiamo quindi per $\mathrm{SO}(2)_z$ la r. costituita delle matrici
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5–1}$$
- Possiamo considerare invece le rotazioni nel solo piano (x, y), ossia la r. fondamentale di SO(2): avremo allora le matrici
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{5–2}$$
che definiscono una r. reale di dimensione 2.
- Infine, possiamo associare ad ogni rotazione il numero complesso $e^{-im\alpha}$ (con m intero): abbiamo così una r. complessa, di dimensione 1.

Esempio 3: È noto che i reali costituiscono gruppo sotto la legge di composizione definita dalla somma. In termini fisici, questo è il gruppo delle *traslazioni* in una dimensione, definito dalla trasformazione dell'osservabile x:
$$x \mapsto x' = x - a \quad (a \in \mathbb{R}).$$
Per questo gruppo $\mathbb{R}$ possiamo immaginare diverse r.:
- Una famiglia di r. unidimensionali complesse:
$$a \mapsto e^{-ika}$$
(si ha una diversa r. per ogni $k \in \mathbb{C}$). In particolare k può essere reale, ma allora la r. non è fedele.
- Due r. reali a dimensione 2:
$$a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}. \tag{5–3}$$
Si noterà che le matrici delle due r. sono tra loro *trasposte*. In qualche senso da precisare non sono diverse, visto che le si ottiene una dall'altra scambiando di posto le due righe e le due colonne. (Attenzione: questo non ha a che fare col fatto che sono trasposte!)
- Consideriamo come $\mathcal{V}$ uno spazio di funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, per es. continue, oppure L^2 (in entrambi i casi abbiamo uno spazio lineare). Definiamo la r. al modo seguente:
$$\varrho(a): \quad f \mapsto f',\ f'(x) = f(x - a).$$
Questa definizione equivale a traslare di a nel verso positivo il grafico della funzione f, ed è ovvio che si tratta di un automorfismo di $\mathcal{V}$. Inoltre la traslazione di $a + b$ si ottiene componendo le due traslazioni di a e di b (l'ordine non importa, perché le traslazioni commutano).

L'ultimo esempio è particolarmente importante per la m.q.: se $\mathcal{V}$ è lo spazio delle funzioni L^2, si sa che si tratta di uno spazio di Hilbert con la nota definizione di prodotto scalare, ed è chiaro che $\varrho(a)$ conserva i prodotti scalari. Abbiamo quindi a che fare con una r. *unitaria* del gruppo delle traslazioni.

Si può procedere allo stesso modo con SO(3): sia ora $\mathcal{V}$ lo spazio delle funzioni L^2 da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{C}$: per ogni elemento $g \in \mathrm{SO}(3)$ considero in primo luogo la matrice $R(g)$ di cui sopra, e poi definisco

$$\varrho(g): \quad \psi \mapsto \psi', \quad \psi'(\vec{r}) = \psi(R(g)^{-1}\,\vec{r}). \tag{5–4}$$

Occorre usare R^{-1}, e non R, per la ragione seguente. Calcoliamo l'effetto di $\varrho(h)$ su ψ':

$$\begin{aligned}\varrho(h): \quad \psi' \mapsto \psi'', \quad \psi''(\vec{r}) &= \psi'(R(h)^{-1}\,\vec{r}) = \psi(R(g)^{-1}R(h)^{-1}\,\vec{r}) \\ &= \psi\left([R(h)\,R(g)]^{-1}\,\vec{r}\right) = \psi(R(hg)^{-1}\,\vec{r}).\end{aligned}$$

In questo modo dunque si ha la composizione nel giusto ordine; se avessimo invece scritto $\psi(R(g)\,\vec{r})$ l'ordine sarebbe stato sbagliato.

Per chiarire ulteriormente la questione, osserviamo che le matrici (5–1) vanno intese come *trasformazioni attive degli stati*: la formula

$$x' = x\,\cos\alpha + y\,\sin\alpha$$

e le altre che si ricavano dalle (5–1) esprimono il modo di trasformarsi dei risultati delle misure di x, ecc. quando si ruota *lo stato* di un angolo α intorno all'asse z. Per questo motivo la (5–1) è l'inversa della (2–5). È quindi corretto interpretare la (5–4) come la legge di trasformazione delle funzioni d'onda.

Riduzione di rappresentazioni

Torniamo alla r. di SO(2) data dalla (5–1). La particolare forma delle matrici mostra che i vettori paralleli all'asse z restano invariati, e allo stesso tempo un vettore giacente nel piano (x, y) resta in quel piano. Entrambi gli insiemi di vettori sono *sottospazi* dello spazio di r., e il fenomeno osservato si esprime dicendo che essi sono *sottospazi invarianti* della r.

La definizione generale è la seguente: un s.s. (proprio) $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$ si dice *invariante* per la r. ϱ se $\forall g: \ \varrho(g)\,\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_1$. Quando una r. ammette un s.s.i. viene detta *riducibile*. È chiaro perché: se una r. è riducibile, essa ne "contiene" un'altra, "ridotta" al solo $\mathcal{V}_1$. Se viceversa non esistono s.s.i. la r. è *irriducibile*. Una r. unidimensionale è ovviamente irriducibile.

La riduzione di una r. si può descrivere anche in termini di matrici (consideriamo per semplicità il caso di r. a dimensione finita). Se $\mathcal{V}$ ha dimensione n e $\mathcal{V}_1$ ha dimensione n_1, prendiamo in $\mathcal{V}$ una base "adattata" a $\mathcal{V}_1$, ossia scelta in modo che i suoi primi n_1 vettori costituiscano anche una base di $\mathcal{V}_1$. Allora se $\mathcal{V}_1$ è s.s.i. per la r. ϱ, tutte le matrici $\varrho(g)$ in questa base hanno la forma

$$D(g) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \tag{5–5}$$

dove A e C sono matrici quadrate, risp. $n_1 \times n_1$ e $(n - n_1) \times (n - n_1)$, mentre B è $n_1 \times (n - n_1)$. È ovvio che cambiando l'ordine delle righe e delle colonne si può anche mettere le $D(g)$ nella forma

$$D(g) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & C \end{array}\right) \tag{5–6}$$

Le (5–3) danno un esempio semplice di entrambe le situazioni, con $n = 2$ e $n_1 = 1$.

Nell'esempio (5–1) abbiamo *due* s.s.i. $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$, tali che $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$ (la somma essendo intesa come l'insieme delle somme di tutte le possibili coppie di elementi, uno di $\mathcal{V}_1$ e uno di $\mathcal{V}_2$; si dice anche che $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ *generano* $\mathcal{V}$). Se questo accade diciamo che la r. è *completamente riducibile.* La r. (5–1) è dunque completamente riducibile: le r. in cui si riduce sono la (5–2) e la r. banale che manda ogni elemento del gruppo nell'automorfismo identità. Le due r. ottenute sono irriducibili: la seconda perché unidimensionale; la prima perché ogni vettore unitario del s.s. va in qualunque altro con una rotazione.

Quando una r. è completamente riducibile le (5–5), (5–6) si presentano nella forma più semplice

$$D(g) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

ossia le matrici sono *diagonali a blocchi.*

Non bisogna credere che una r.r. lo sia sempre completamente: un controesempio è dato da una qualunque delle (5–3).

Esercizio: Dimostrare che le r. (5–3) non sono completamente riducibili.

Esistono però due casi importanti di gruppi per i quali tutte le r.r. lo sono completamente: quelli *finiti* e quelli *compatti* (ne riparleremo). Il gruppo delle traslazioni non è né finito né compatto.

Rappresentazioni riducibili e irriducibili di SO(3)

Consideriamo ora la r. fondamentale di SO(3), che in termini di matrici scriveremo

$$v'^i = R^i{}_k \, v^k.$$

Si tratta ovviamente di una r.i., perché si può mandare ogni vettore unitario in qualunque altro con una rotazione. È però facile scoprire r.r.: pensiamo infatti ai tensori, la cui legge di trasformazione è

$$T'^{ij} = R^i{}_k \, R^j{}_l \, T^{kl}. \tag{5–7}$$

I tensori formano uno spazio di r. di SO(3), di dimensione 9.

È noto che la (5–7) conserva il carattere di simmetria di un tensore: un tensore simmetrico resta simmetrico, e lo stesso accade a un tensore antisimmetrico. È anche noto che ogni tensore può essere scritto come somma di una parte simmetrica e una antisimmetrica, il che vuol dire che i due tipi di tensori formano s.s. (risp. di dimensioni 6 e 3) che sono invarianti sotto SO(3) e generano l'intero spazio. Dunque la r. (5–7) di SO(3) è (completamente) riducibile in due r. di dimensioni 6 e 3.

Per di più, i tensori simmetrici non definiscono una r.i.: infatti la (5–7) lascia invariato il *tensore isotropo* δ^{ij}. Esiste dunque un altro s.s.i. (unidimensionale), e ogni tensore simmetrico può essere scritto come somma

$$T^{ij} = (T^{ij} - \tfrac{1}{3}\, T \, \delta^{ij}) + \tfrac{1}{3}\, T \, \delta^{ij}$$

dove T è la *traccia* del tensore. Abbiamo così effettuato un'altra decomposizione: un sottospazio a dimensione 5, formato dai tensori simmetrici a traccia nulla, e uno a dimensione 1, formato dai tensori isotropi.

Vedremo poi che i tre s.s.i. così trovati sono *minimi*, ossia che non contengono altri s.s.i. Ciò equivale a dire che la r. di SO(3) definita dai tensori di rango 2 si decompone in tre r.i., di dimensioni 1, 3 e 5.

Riduzione per un sottogruppo

Abbiano visto sopra come nel passaggio da SO(3) al suo s.g. $\mathrm{SO}(2)_z$ una r.i. possa ridursi. La cosa si capisce in generale, osservando che un s.s. di $\mathcal{V}$ può non essere invariante per l'intero gruppo $\mathcal{G}$, ma può esserlo per il s.g. $\mathcal{G}_1$, la cui r. contiene meno automorfismi. Dobbiamo dunque aspettarci che di regola una r.i. di un gruppo diventi riducibile passando a un suo s.g.

Questo fenomeno ha un immediato corrispettivo fisico: vedremo in seguito che l'invarianza per un gruppo $\mathcal{G}$ comporta degenerazione degli autovalori dell'hamiltoniana per tutti gli stati stazionari appartenenti a una stessa r.i. di $\mathcal{G}$. Se ora una perturbazione "rompe" l'invarianza $\mathcal{G}$, riducendola a un s.g. $\mathcal{G}_1$, e se la r. si riduce (si tenga presente che ciò non accade sempre) allora anche la degenerazione si può rompere, e l'unico autovalore può separarsi, al più in tanti autovalori distinti quante sono le r.i. di $\mathcal{G}_1$.

Diamo un altro esempio di quanto detto, considerando i due gruppi SO(3) ed O. È facile vedere che la r. fondamentale di SO(3) rimane irriducibile anche per O: infatti se si riducesse dovrebbe esistere un s.s.i. unidimensionale, ossia un vettore che non cambia direzione per nessuna rotazione di O. Abbiamo così verificato che non sempre una r. si riduce passando da un gruppo a un suo s.g.

Le cose vanno diversamente per i tensori simmetrici a traccia nulla (spazio di r. di SO(3) di dimensione 5). Infatti le tre componenti diagonali si mescolano soltanto tra loro per effetto di O, e lo stesso accade per quelle fuori diagonale; quindi esistono due s.s.i., di dimensioni 2 e 3, non ulteriormente decomponibili.

Un'applicazione: momento d'inerzia e costante dielettrica

La dinamica di un corpo rigido fa uso del concetto di *tensore d'inerzia*, che lega velocità angolare e momento angolare ed è un tensore simmetrico di rango 2. Anche la costante dielettrica, che connette i vettori $\vec{E}$ e $\vec{D}$, è un tensore simmetrico.

In un solido sferico il tensore d'inerzia rispetto al centro sarà invariante per SO(3), e sarà quindi un tensore isotropo. Ne segue che c'è un solo momento d'inerzia, come era ovvio. Analogamente, in un dielettrico isotropo (liquido, oppure solido amorfo, non cristallino) la costante dielettrica è un tensore isotropo, il che equivale a dire che le proprietà dielettriche sono espresse da un solo scalare.

Pensiamo ora a un corpo di forma cubica: quale sarà il suo tensore d'inerzia? Essendo un tensore simmetrico, sarà riducibile per SO(3) alla somma di una parte isotropa e di una a traccia nulla. Ma dovrà anche essere invariante per O: questo è certamente vero per la parte isotropa, mentre abbiamo visto che un tensore a traccia nulla non ha parte invariante per O, perché la r. di SO(3) si riduce in due, di dimensioni 2 e 3. Conclusione: *il tensore d'inerzia di un cubo è isotropo.* La stessa cosa vale per la costante dielettrica: *un cristallo del sistema cubico è elettricamente* (e quindi otticamente) *isotropo.* Per avere anisotropia bisogna dunque scendere a un qualche sottogruppo di O.

Esercizio: Trovare la più generale forma di tensore d'inerzia (e di costante dielettrica) per un corpo di simmetria D_4.