CAPITOLO 8

Somma diretta di rappresentazioni

Per affrontare altre applicazioni fisiche abbiamo bisogno di nuovi concetti e risultati: cominciamo dalla somma diretta di due r. Siano date, di un gruppo $\mathcal{G}$, due r.: ϱ_1 su $\mathcal{V}_1$ e ϱ_2 su $\mathcal{V}_2$. Esiste una r. ϱ di $\mathcal{G}$ su $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$, definita come segue: se $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ sarà in modo unico $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, con $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{V}_1$ e $\mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}_2$; poniamo

$$\varrho(g)\,\mathbf{v} = \varrho_1(g)\,\mathbf{v}_1 + \varrho_2(g)\,\mathbf{v}_2$$

Si chiama ϱ *somma diretta* di ϱ_1 e di ϱ_2, e si scrive $\varrho = \varrho_1 \oplus \varrho_2$.

In termini di matrici, se D_1 e D_2 sono le matrici delle due r. di partenza, in una base di $\mathcal{V}$ adattata a $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ avremo per $D = D_1 \oplus D_2$:

$$D(g) = \left(\begin{array}{c|c} D_1(g) & 0 \\ \hline 0 & D_2(g) \end{array}\right)$$

e si vede che D è completamente riducibile.

Dunque la riduzione completa di una r. equivale a trovare due r. di cui essa sia somma diretta. Dai teoremi visti al Cap. 6 segue che *una r. finita di un gruppo finito o compatto può sempre essere ridotta alla somma diretta di due o più r.i.*

Se infatti la r. data non è già irriducibile sarà completamente riducibile, e lo stesso si può dire per le due r. così ottenute. Poiché la dimensione è finita, il processo di riduzione deve avere termine. ∎

Nota: Ci si può chiedere se la riduzione sia unica: la risposta è affermativa. Vedremo più avanti la dimostrazione.

Prodotto diretto di gruppi

Dati due gruppi $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ si dice *prodotto diretto* $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ il gruppo così definito: è il prodotto cartesiano di $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$, con la legge di composizione $(g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2)$. Lasciamo al lettore la verifica che in tal modo si ottiene effettivamente una struttura di gruppo.

In materia di simmetrie gli esempi di prodotto diretto sono frequenti: si presentano tutte le volte che si definiscono simmetrie che agiscono su gradi di libertà indipendenti di un sistema.

Esempio 1: Abbiamo introdotto in precedenza il gruppo delle traslazioni in una dimensione: $x \mapsto x' = x - a$. In tre dimensioni possiamo separatamente definire traslazioni in x, y e z, ottenendo tre gruppi T_x, T_y, T_z; il gruppo delle traslazioni in tre dimensioni non è altro che $\mathrm{T} = \mathrm{T}_x \times \mathrm{T}_y \times \mathrm{T}_z$.

Esempio 2: Nel Cap. 2 è stata discussa la simmetria per rotazioni di una particella con spin. Si è visto che occorre definire tanto la legge di trasformazione delle coordinate (e conseguentemente dei momenti coniugati) quanto delle osservabili di spin. Approfondiamo ora la questione: non c'è niente di contraddittorio a definire due distinti gruppi di simmetria, uno che agisce sulle osservabili "orbitali" x, y, z, p_x, p_y, p_z e l'altro che agisce sulle osservabili di spin s_x, s_y, s_z. Abbiamo così due gruppi SO(3), che possiamo distinguere designandoli rispettivamente con $\mathrm{SO}(3)_{\mathrm{orb}}$ e con $\mathrm{SO}(3)_{\mathrm{spin}}$. Il prodotto diretto $\mathrm{SO}(3)_{\mathrm{orb}} \times \mathrm{SO}(3)_{\mathrm{spin}}$ contiene simmetrie combinate, nelle quali si ruotano i gradi di libertà orbitali e quelli di spin anche intorno ad assi diversi e di angoli diversi. Discuteremo più avanti se tale gruppo abbia o no interesse fisico.

Esempio 3: Consideriamo un atomo di He, trascurando per semplicità gli spin degli elettroni. Possiamo ruotare separatamente uno o l'altro dei due elettroni (più esattamente, le osservabili di uno o dell'altro elettrone), ottenendo due distinti gruppi SO(3), che possiamo distinguere con un indice: $\mathrm{SO}(3)_1$ e $\mathrm{SO}(3)_2$. Anche qui è lecito comporre le due rotazioni, fatte intorno ad assi distinti e di angoli diversi, ottenendo un gruppo $\mathrm{SO}(3)_1 \times \mathrm{SO}(3)_2$. Di nuovo, resta da capire se tale gruppo di simmetria abbia qualche utilità pratica.

Esempio 4: Negli esempi precedenti i gruppi di cui si faceva il prodotto diretto erano tra loro isomorfi; ma nella definizione ciò non è affatto richiesto. Ecco un esempio di prodotto diretto tra gruppi non isomorfi, che tra l'altro ha grande interesse fisico. Un sistema composto (ad es. un atomo, ma anche una molecola ecc.) viene spesso descritto mediante le osservabili del *centro di massa* più quelle *relative* al centro di massa. Possiamo definire una simmetria di traslazioni del centro di massa (gruppo T delle traslazioni in tre dimensioni, es. 1) e una simmetria di rotazioni attorno al centro di massa (gruppo SO(3)). Le due simmetrie agiscono su osservabili indipendenti, e possiamo costruirne il prodotto diretto $\mathrm{T} \times \mathrm{SO}(3)$: questo è il gruppo dei *movimenti rigidi* del sistema.

Enunciamo, con un cenno di dimostrazione, i due seguenti teoremi:

In $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ esistono due s.g.i. isomorfi a $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, che commutano fra loro e hanno in comune solo l'elemento neutro del gruppo.

Dim.: I due gruppi sono formati rispettivamente da $\{(g_1, e_2) \mid g_1 \in \mathcal{G}_1\}$ e da $\{(e_1, g_2) \mid g_2 \in \mathcal{G}_2\}$. ■

Viceversa: *se in $\mathcal{G}$ esistono due s.g.i. $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ tali che $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1\mathcal{G}_2$, e $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 = \{e\}$, allora $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ commutano, e $\mathcal{G}$ è isomorfo a $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$.*

Dim.: L'isomorfismo del teorema è quello che fa corrispondere l'elemento generico di $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$, che è (g_1, g_2), all'elemento $g_1 g_2$ di $\mathcal{G}$. Occorre e basta dimostrare che si tratta appunto di un isomorfismo. Per dimostrare che $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ commutano, si ragiona su di un elemento di $\mathcal{G}$ della forma $g_1 g_2\, g_1^{-1} g_2^{-1}$: si fa vedere che esso appartiene tanto a $\mathcal{G}_1$ quanto a $\mathcal{G}_2$, quindi coincide con e. ■

Come abbiamo visto, accade spesso di considerare il prodotto diretto di un gruppo per se stesso: $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_1$. In questo caso il primo teorema ci dice che ci sono in $\mathcal{G}$ due s.g.i. isomorfi a $\mathcal{G}_1$. Ma non basta: ce n'è anche un terzo, consistente di $\{(g_1, g_1) \mid g_1 \in \mathcal{G}_1\}$.

Negli esempi 2 e 3 questo terzo gruppo ha un significato fisico importante: stiamo eseguendo *la stessa* rotazione su *tutte* le osservabili del sistema, ossia una rotazione *rigida* del sistema stesso. Indicheremo tale gruppo con $\mathrm{SO}(3)_{\mathrm{rig}}$. In generale non c'è da aspettarsi invarianza per $\mathrm{SO}(3)_{\mathrm{orb}} \times \mathrm{SO}(3)_{\mathrm{spin}}$ nell'esempio 2, o per $\mathrm{SO}(3)_1 \times \mathrm{SO}(3)_2$ nell'esempio 3; ma in entrambi i casi ci sarà invarianza per $\mathrm{SO}(3)_{\mathrm{rig}}$.

Prendendo ispirazione da questi esempi, chiameremo tale s.g. di $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_1$ col nome di "s.g. rigido."

Prodotto diretto di rappresentazioni

Ricordiamo la definizione di *prodotto tensoriale* di due spazi vettoriali. Nei due spazi $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ scegliamo le basi $|1,i\rangle$, $|2,j\rangle$. Il prodotto tensoriale $\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2$ è lo spazio generato dalla base $|1,i\rangle\,|2,j\rangle$, costituita dalle coppie ordinate di vettori delle due basi.

Come il generico vettore $|1\rangle$ di $\mathcal{V}_1$ ha la forma $|1,i\rangle\,a^i$, e quello $|2\rangle$ di $\mathcal{V}_2$ ha la forma $|2,j\rangle\,b^j$, così un vettore di $\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2$ ha la forma $|1,i\rangle|2,j\rangle\,c^{ij}$. In particolare, si definisce il prodotto tensoriale di due vettori: $|1\rangle\,|2\rangle = |1,i\rangle|2,j\rangle\,a^i b^j$.

Nota 1: Abbiamo usato la notazione di Dirac — abituale per i fisici ma non per i matematici — che scrive la coppia in forma di "prodotto" dei due vettori. In effetti la cosa è sostanzialmente corretta, anche se c'è un abuso di notazione (v. nota seguente).

Nota 2: L'uso matematico è d'interporre il simbolo $\otimes$ fra i due vettori di cui si fa il prodotto tensoriale: in particolare, se i vettori sono elementi delle basi il prodotto tensoriale coincide con la semplice coppia ordinata. Se si sopprime, alla Dirac, il segno $\otimes$ e si scrive la coppia come un prodotto, si compie un giro vizioso, che usa il definito nella definizione. È questo l'abuso (innocuo) di notazione cui si alludeva sopra.

Nota 3: Occorrerebbe dimostrare che la definizione del prodotto tensoriale non dipende dalla scelta delle basi in $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$, nel senso che si ottengono prodotti isomorfi. Non ci sono difficoltà, ma tralasciamo di dare i dettagli.

È importante tener presente che non tutti i vettori di $\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2$ sono prodotti tensoriali un vettore di $\mathcal{V}_1$ e di uno di $\mathcal{V}_2$, almeno se entrambi questi spazi hanno più di una dimensione. Basta osservare che il rango della matrice $(a^i b^i)$ è sempre ≤ 1, mentre questo non è vero per una generica matrice (c^{ij}).

L'impiego più frequente in m.q. del prodotto tensoriale si ha quando un sistema consiste di due parti indipendenti: allora ciascuna delle due parti ha il "suo" spazio di Hilbert, e lo spazio di Hilbert del sistema complessivo è appunto il prodotto tensoriale. Si noti che dicendo "indipendenti" non intendiamo affatto che non ci siano interazioni (questo riguarda la dinamica del sistema, non la descrizione degli stati), ma solo che il sistema possa essere descritto come composto di due parti concettualmente separate. Gli esempi che abbiamo dato prima a proposito del prodotto diretto di gruppi si adattano anche al discorso attuale.

In queste condizioni di solito la classificazione degli stati verrà fatta mediante autovalori di un insieme completo di osservabili commutabili per ciascuna parte del sistema, e la base del prodotto tensoriale sarà definita assegnando tutti gli autovalori di ciascuno dei due insiemi di osservabili.

Esempio: Atomo di He: abbiamo due elettroni, per ciascuno dei quali possiamo usare la consueta base $|n\,l\,m\,m_s\rangle$. La base per l'intero sistema è quindi

$$|n_1\,l_1\,m_1\,m_{s1}\rangle\,|n_2\,l_2\,m_2\,m_{s2}\rangle,$$

che scriveremo più brevemente

$$|n_1\,l_1\,m_1\,m_{s1},\;n_2\,l_2\,m_2\,m_{s2}\rangle.$$

(Ovviamente non abbiamo considerato il principio di Pauli, che riduce lo spazio di Hilbert al sottospazio degli stati antisimmetrici.)

Nota 1: In questo esempio già lo spazio di Hilbert per il singolo elettrone è un prodotto tensoriale: $|n\,l\,m\rangle\,|m_s\rangle$.

Nota 2: La presenza dell'interazione coulombiana fra gli elettroni fa sì che i vettori $|n_1\,l_1\,m_1\,m_{s1},\;n_2\,l_2\,m_2\,m_{s2}\rangle$ non siano autovettori dell'hamiltoniana totale, ma questo non impedisce di usarli come base.

Possiamo ora definire il prodotto diretto delle r. di due gruppi: supponiamo definita in $\mathcal{V}_1$ una r. (anche riducibile) di un gruppo $\mathcal{G}_1$, e analogamente in $\mathcal{V}_2$ per il gruppo $\mathcal{G}_2$, e siano risp. $[D_1(g_1)]^{i'}{}_i$, $[D_2(g_2)]^{j'}{}_j$ le matrici delle r. in assegnate basi. Si dimostra che le matrici

$$[D(g_1,g_2)]^{i'j'}{}_{ij} = [D_1(g_1)]^{i'}{}_i\,[D_2(g_2)]^{j'}{}_j$$

danno una r. di $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ sullo spazio $\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2$, che indicheremo con $D_1 \otimes D_2$.

Si dimostra poi che:

– $D_1 \otimes D_2$ è unitaria se lo sono D_1 e D_2
– è irriducibile sse D_1 e D_2 sono irriducibili
– tutte le r.i. di $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ si ottengono in questo modo.

Dunque la ricerca delle r. di un prodotto diretto è ricondotta a quella dei fattori, il che semplifica in molti casi il problema.

Il problema di Clebsch–Gordan

Dato un gruppo $\mathcal{G}$, consideriamo ora una r. $D_1 \otimes D_2$ di $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$: sappiamo che se D_1 e D_2 sono irriducibili per $\mathcal{G}$, $D_1 \otimes D_2$ è irriducibile per $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$. Abbiamo osservato sopra che esiste in $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ un particolare s.g. isomorfo a $\mathcal{G}$, che abbiamo chiamato "rigido"; quando non ci siano pericoli di confusione, lo indicheremo semplicemente con $\mathcal{G}$. Come accade in generale per un s.g., la r. $D_1 \otimes D_2$ sarà in generale riducibile per $\mathcal{G}$: ci si chiede come si riduce. Questo è il *problema di Clebsch–Gordan*. Più esattamente il problema consiste di due parti:

– determinare quali sono le r.i. di $\mathcal{G}$ in cui $D_1 \otimes D_2$ si decompone
– trovare una base di $\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2$ nella quale $D_1 \otimes D_2$ assume la forma diagonale a blocchi.

La risposta alla seconda questione viene data mediante la matrice di trasformazione dalla base di partenza (prodotto tensoriale) alla nuova; gli elementi di questa matrice sono i *coefficienti di Clebsch–Gordan*.

L'esempio più noto di problema di Clebsch–Gordan è la *composizione dei momenti angolari*: il gruppo $\mathcal{G}$ è SO(3), come negli esempi 2 e 3 visti sopra. Per ora non possiamo spiegare esattamente perché si parla di composizione dei momenti angolari; accenniamo solo ai seguenti fatti:

– abbiamo visto al Cap. 2 la relazione fra rotazioni e momento angolare; in termini generali, la relazione è quella esistente, per un gruppo di Lie, fra il gruppo stesso e la sua *algebra di Lie* (generatori del gruppo)
– l'algebra di Lie di un prodotto diretto è la somma delle due algebre; il sottogruppo rigido ha come algebra di Lie una sottoalgebra, generata dalle corrispondenti somme di generatori.

Per risolvere il problema di Clebsch–Gordan esistono tecniche generali, applicabili ad alcune categorie speciali di gruppi; noi dedicheremo il prossimo capitolo a una di queste tecniche, basata sui *caratteri*.