E. Fabri *luglio 2001*

Il diametro apparente del Sole

Il problema

Si vuole studiare come influisce la deflessione gravitazionale sulla misura ottica del diametro angolare del Sole. Dovremo prendere in considerazione raggi di luce che partono tangenti al bordo del Sole e arrivano all'osservatore.

Per semplicità, prendo unità tali che sia $c = 1$, $G = 1$, $2M = 1$. L'unità di lunghezza è qundi il raggio di Schwarzschild del Sole, circa 3 km. Indicherò con $a = 2.36 \cdot 10^5$ il raggio del Sole, con $b = 5.06 \cdot 10^7$ la distanza della Terra.

Coordinate e metrica

Uso coordinate polari di Schwarzschild: t, r, ϑ, φ e assumo il Sole statico (non rotante) e a simmetria sferica. Allora la metrica esterna è quella di Schwarzschild, e posso ragionare nel piano equatoriale, ignorando la coordinata $\vartheta = \pi/2$. Nella base associata $\mathbf{e}_t$, $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ le componenti non nulle del tensore metrico sono

$$g_{tt} = \frac{r-1}{r} \qquad g_{rr} = -\frac{r}{r-1} \qquad g_{\varphi\varphi} = -r^2.$$

Geodetiche

Notiamo che i vettori $\mathbf{e}_t$, $\mathbf{e}_\varphi$ sono vettori di Killing; se quindi $\mathbf{u}$ è il vettore tangente a una geodetica, avremo due "costanti del moto":

$$u_t = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_t = g_{tt}\, u^t, \qquad u_\varphi = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\varphi = g_{\varphi\varphi}\, u^\varphi.$$

Per la luce il vettore $\mathbf{u}$ è di tipo luce: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$, ossia, in componenti:

$$g_{tt}\,(u^t)^2 + g_{rr}\,(u^r)^2 + g_{\varphi\varphi}\,(u^\varphi)^2 = 0. \tag{1}$$

Converrà introdurre la base ortonormale

$$\mathbf{e}_{\hat t} = \frac{1}{\sqrt{g_{tt}}}\,\mathbf{e}_t \qquad \mathbf{e}_{\hat r} = \frac{1}{\sqrt{-g_{rr}}}\,\mathbf{e}_r \qquad \mathbf{e}_{\hat\varphi} = \frac{1}{\sqrt{-g_{\varphi\varphi}}}\,\mathbf{e}_\varphi$$

nella quale la (1) si scrive

$$\left(u^{\hat t}\right)^2 = \left(u^{\hat r}\right)^2 + \left(u^{\hat\varphi}\right)^2. \tag{2}$$

Questa ci dice che $u^{\hat t}$ coincide col modulo della parte spaziale di $\mathbf{u}$.

Nella stessa base, le costanti del moto si scrivono:

$$u_t = \sqrt{g_{tt}}\, u^{\hat{t}} \qquad u_\varphi = -\sqrt{-g_{\varphi\varphi}}\, u^{\hat{\varphi}}. \tag{3}$$

Calcolo dell'angolo

I raggi di luce che interessano sono la proiezione spaziale di geodetiche nulle il cui vettore tangente per $r = a$ ha conponente radiale nulla. L'angolo α (semidiametro apparente del Sole) è l'angolo fra la direzione radiale e la proiezione spaziale di $\mathbf{u}$. La (2) mostra che

$$\sin\alpha = u^{\hat{\varphi}}/u^{\hat{t}}$$

e usando le (3):

$$\frac{u_\varphi}{u_t} = -\sqrt{-\frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{tt}}}\,\sin\alpha$$

che è dunque costante lungo la geodetica.

Al bordo del Sole ($r = a$) $\alpha = \pi/2$; sostituendo le espressioni per le componenti del tensore metrico si trova quindi

$$-\frac{u_\varphi}{u_t} = \sqrt{\frac{a^3}{a-1}} = \sqrt{\frac{b^3}{b-1}}\,\sin\alpha$$

e infine

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{a^3(b-1)}{b^3(a-1)}}.$$

Il valore euclideo è $\sin\alpha = a/b$ e si vede che la variazione relativa è circa $1/(2a) \simeq 2\cdot 10^{-6}$.