Richiami teoria degli errori

- Il risultato di una misura è una variabile casuale, distribuita secondo una funzione p(x).
- La funzione p solitamente ha una forma a campana, ovvero ha un massimo più o meno pronunciato vicino alla media.
- I casi più comuni sono quelli in cui p è gaussiana:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- oppure uniforme in un intervallo:

$$p(x) = 1/\Delta \quad \mu - \Delta/2 < x < \mu + \Delta/2;\ p(x) = 0 \quad \text{al di fuori dell'intervallo}$$

- Il caso gaussiano è di grande importanza teorica, a causa del teorema del limite centrale

La distribuzione normale o gaussiana

- La distribuzione normale è la più utile, in quanto si dimostra (teorema del limite centrale) che la somma di N variabili casuali ha una distribuzione che tende alla gaussiana per N-> infinito.
- La gaussiana è definita da due soli parametri: μ e σ.
- Il primo parametro è la media della distribuzione, il secondo la sua deviazone standard.
- Se una variabile x è distribuita normalmente, allora circa il 68% dei valori di x saranno distribuiti entro una deviazione standard dalla media, il 95.5% entro due deviazioni standard e il 99.7% entro tre deviazioni standard.

Alcune ipotesi….

- Supponiamo che la grandezza "vera" che vogliamo misurare sia uguale alla media della distribuzione incognita.
- Se la distribuzione fosse gaussiana, e se avessimo trovato un valore x, allora potremmo concludere che la media "vera" nel 68% dei casi dista meno di una deviazione standard dal valore trovato.
- Per dare un'idea ragionevole del valore "vero" della quantità cercata, abbiamo bisogno allora di stimare entrambi questi parametri della curva….

La misura e la sua incertezza

- Per condensare l'informazione di p(x) si riporta comunemente il risultato nella forma:

$$x = x_0 \pm s$$

- Il risultato x0 è una stima della media μ della distribuzione e s un parametro che stima la larghezza della distribuzione, ed è detta *incertezza*.
- L'uso più comune, consigliato anche dal consorzio per gli standard ISO, è quello di utilizzare come incertezza s una stima della deviazione standard σ della distribuzione p(x). A volte si trovano però altre definizioni.....

- Si confondono spesso gli *errori* (differenze tra le misure e il valor medio) con le *incertezze*

Come si stima la media della distribuzione?

- Se si ha una sola misura, quella è la miglior stima disponibile della media.
- Se si hanno più misure effettuate nelle stesse identiche condizioni sperimentali, allora la media delle misure sarà la migliore stima possibile.
- Se si hanno più misure con incertezze diverse, allora è possibile migliorare la stima pesando ogni misura con l'inverso dell'incertezza al quadrato (vedremo poi.....)

Come si stimano le incertezze?

- Esistono due modi per stimare le incertezze:
  - dai dati stessi (A)
  - a priori, in base alle caratteristiche degli strumenti adoperati o eventualmente tramite un insieme di misure realizzato appositamente (B)
- Nei molti casi in cui entrambi i metodi sono applicabili, è utile fare un confronto per capire quanto bene conosciamo il nostro apparecchio, e per identificare sorgenti di errore sconosciute.
- La stima dell'incertezza è ovviamente affetta da errore, e quindi bisognerebbe stimare l'incertezza sull'incertezza. Di solito si accontenta di stimare le incertezze entro il 20%-30%.
- Per riportare un'incertezza, una cifra sola è poca e due sono troppe: utilizzare due cifre nei calcoli intermedi, e arrotondare ad una sola cifra nel risultato finale (ma attenzione a quando si arrotonda 0.14 con 0.1....)

Primo metodo

- Se si ha a disposizione una sola misura diretta, l'incertezza dipenderà dalla precisione strumentale e da eventuali altri fattori di disturbo.
- Vedremo in seguito come valutare caso per caso la precisione strumentale.
- Nel caso di misura indiretta, quando cioè il risultato dipende da altre misure tramite una funzione f, si adopera la formula per la propagazione degli errori:

$$y = f(x_1 \ldots x_N)$$

$$\sigma_y^2 = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_i \right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_1^2 + \ldots\ldots\ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_N} \right)^2 \sigma_N^2$$

- Se gli errori NON sono indipendenti, le cose si complicano.....

Un caso particolare

- Se la funzione f è un prodotto di potenze, le formule si semplificano:

$$y = x_1^a x_2^b x_3^c \qquad \frac{\sigma_y^2}{y^2} = \left(a\frac{\sigma_1}{x_1}\right)^2 + \left(b\frac{\sigma_2}{x_2}\right)^2 + \left(c\frac{\sigma_3}{x_3}\right)^2$$

- Ovvero: le incertezze percentuali si sommano quadraticamente, pesate con l'esponente.
- Ad esempio: si debba misurare la densità di un materiale da cui è stato ricavato un disco di spessore h e raggio R. $d = \frac{M}{\pi R^2 h}$
- Si trova: $M = 1.15 \pm 0.01\ Kg,\ R = 20.5 \pm 0.2\ cm, h = 0.95 \pm 0.01$
- Le incertezze su M, R ed h sono entrambi dell' 1%, ma R è elevato al quadrato, e quindi va moltiplicato per 2. L'incertezza percentuale su d sarà quindi del $\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}\,\% = 2.5\%$. Quindi $d = 8.9 \pm 0.2\ g / cm^3$

Qualche osservazione

- La misura della quantità che contribuisce di più all'errore è quella che limita la precisione finale: in tal caso, è inutile spendere tempo e denaro per migliorare le altre misure, e conviene concentrarsi su quella.
- Se l'incertezza dovuta ad una misura è molto inferiore alle altre, è lecito trascurarla, se si ha ben chiaro quello che si sta facendo.....

Ve lo dico una volta per tutte….

- Le incertezze derivanti da misure diverse ed indipendenti NON si sommano linearmente, bensì si sommano in quadratura!

Esempio 1 : uguali incertezze

- Si supponga di avere effettuato N misure nelle stesse identiche condizioni, ottenendo una serie di risultati x_n
- Allora, la migliore stima della media sarà la media stessa

$$\mu \cong \bar{x} = \frac{\sum\limits_{n=1,N} x_n}{N}$$

- La devizione standard delle misure sarà una stima dell'incertezza con cui è stata effettuata ogni singola misura

Questo risultato va confrontato con la stima indipendente dell'incertezza

$$\sigma_{x_n} \cong s_x = \sqrt{\frac{\sum\limits_{n=1,N} (x_n - \bar{x})^2}{N-1}}$$

- La deviazione standard della media, stimata dividendo per $N^{1/2}$ le misure, sarà una stima dell'errore sulla media: $\sigma \cong \frac{\sigma_n}{\sqrt{N}} \cong \frac{s_n}{\sqrt{N}}$

Esempio 2: misure con differenti incertezze

- Stavolta si effettuino N misure con impostazioni diverse
- Per ogni misura x_n , si ha a disposizione una stima dell'incertezza σ_n
- Allora, la stima più precisa della media si ottiene tramite la media pesata:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{n=1,N} x_n w_n}{\sum_{n=1,N} w_n} \qquad w_n = \frac{1}{\sigma_n^2}$$

- La stima della devizione standard sulla media si ottiene da:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum w_n}} = \frac{1}{\sqrt{\sum 1/\sigma_n^2}}$$

- N.B: Se le incertezze sono uguali, le formule diventano uguali a quelle precedenti!!!!

Errori sistematici….

- A volte la media della distribuzione non coincide con la quantità "vera", ma se ne discosta di una certa quantità Δ: si parla in questo caso di errore sistematico.
- Errori sistematici possono essere dovuti ad una taratura difettosa di uno strumento, o a effetti fuori del controllo dello sperimentatore.
- Si dovrebbe cercare di stimare al meglio la quantità Δ e correggere il risultato in base al valore stimato; a volte però questo non è possibile: in questi casi bisognerebbe perlomeno avere un'idea dell'ordine di grandezza della possibile correzione: in questo caso si parla di incertezza sistematica. L'incertezza sistematica non andrebbe sommata alle incertezze di natura statistica, ma andrebbe tenuta distinta.

Test del χ^2

- Il χ^2 è definito come:

$$\chi^2 = \sum_{n=1,N} \left(\frac{x_n - \bar{x}}{\sigma_n} \right)^2$$

- E' una variabile casuale (dipende da N numeri casuali)
- La densità di probabilità è calcolabile, e dipende dal numero di variabili casuali che che contribuiscono alla somma (numero di gradi di libertà, N_{gdl} o ν) . $P(\chi^2, \nu)$
- Se la media è funzione dei dati, allora ν =N-1
- Il valor medio del χ^2 è uguale al numero di gradi di libertà.

Come si usa il χ^2

- Intuitivamente, se il χ^2 è molto maggiore di N-1, vuol dire che i dati sono più distanti dalla media di quanto previsto dalle incertezze: è un cattivo segno, può voler dire che le misure non si riferiscono alla stessa quantità (ad esempio, la grandezza oggetto di misura varia nel tempo)
- Ma anche se il risultato è molto minore di N-1 la situazione è sospetta: infatti è probabile che le incertezze siano stimate in eccesso, oppure che le misure siano correlate....

Livello di confidenza

- Dato un insieme di N misure, e il χ^2 della loro media, definiamo livello di confidenza la quantità

$$LC = \int_{\chi^2}^{\infty} P(t, N-1)\,dt$$

- Il livello di confidenza ci dice essenzialmente qual è la probabilità di ottenere un valore di χ^2 più alto di quello osservato..
- Valori di LC minori di 0.05 o maggiori di 0.95 indicano che probabilmente esiste qualche problema con le misure:
  - O le misure non sono compatibili (LC<0.5)
  - O le misure sono correlate (LC>0.95)
  - O le incertezze sono eccessivamente grandi (LC > 0.95)
  - O le incertezze sono eccessivamente piccole (LC<0.5)

Test del χ^2

- Il test del χ^2 permette di confrontare la distribuzione dei dati con le incertezze previste
- Supponiamo di avere un insieme di misure distribuite in modo gaussiano: allora gli errori, definiti come $e_n=x_n-m$, dove m è il valore medio della distribuzione, sono distribuiti in modo gaussiano con media zero.
- Gli errori normalizzati , definiti come $r_n=e_n/s_n$ sono invece distribuiti in modo gaussiano con media 0 e deviazione standard 1.
- Allora, ci si aspetta intuitivamente che r_n^2 sia in media 1...
- Ma la media vera e la deviazione standard vera non sono conosciute....
- sostituisco la media con la sua stima e la deviazione standard con le incertezze attese in base alle misure...