Impedenza meccanica

- Si consideri un corpo cui venga applicata una forza esterna F sinusoidale in un punto dato. Se l'oggetto ha proprietà lineari, il punto si muoverà nella stessa direzione di F con la stessa frequenza.
- Si può definire l'impedenza meccanica come il rapporto tra la forza applicata e la velocità, in notazione complessa:

$$Z_m = \frac{F}{v}$$

- Ad esempio, per un punto materiale libero di massa m:

$$Z_m = \frac{ma}{v} = \frac{j\omega mv}{v} = j\omega m$$

- L'impedenza è di tipo induttivo!

Effetto delle forze...

- Se applico una forza ad un corpo soggetto ad un attrito di tipo fluido:

$$ma = F - \gamma v \rightarrow (j\omega m + \gamma)v = F$$

- Quindi l'impedenza meccanica dovuta al termine aggiuntivo è di tipo "resistivo": $Z_m = \gamma$
- Infine una massa collegata all'estremo di una molla:

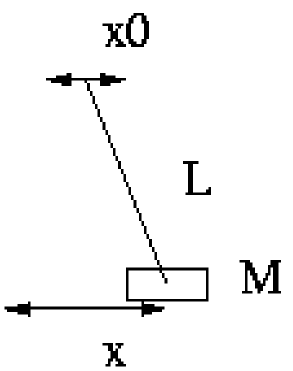
$$ma = F - kx \quad \rightarrow \quad \left(j\omega m + \frac{k}{j\omega}\right)v = F$$

- ha una impedenza di tipo capacitivo: $Z_m = \dfrac{k}{j\omega}$

- E' possibile estendere il concetto di impedenza a qualunque sistema lineare (impedenza acustica, elettromagnetica, etc.)

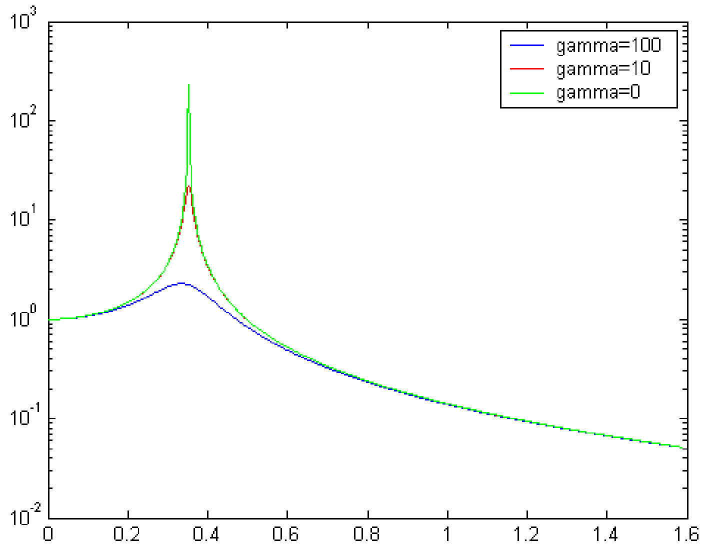
Un tipo particolare di filtro....

- E' possibile isolare un oggetto dalle vibrazioni del terreno sospendendolo come un pendolo:



$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - \frac{mg}{l}(x - x_0)$$

$$\tilde{x} = \frac{\frac{g}{l}}{\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right) + \frac{j\gamma}{m}\omega}\tilde{x}_0$$



  - Il modulo della funzione di risposta vale 1 per frequenze minori della frequenza di risonanza, e decresce come $1/\omega^2$ per frequenze maggiori.
  - In corrispondenza della risonanza la funzione di trasferimento vale circa $\frac{m}{\gamma}\sqrt{\frac{g}{l}}$

Il superattenuatore.....

- Per migliorare ulteriormente le prestazioni di un isolatore di questo tipo è possibile porre più pendoli in cascata: la funzione di risposta per frequenze maggiori della più alta frequenza di risonanza decresce come $1/\omega^{2N}$..

Un dispositivo di questo tipo garantisce l'isolamento dalle vibrazioni sismiche nell'interferometro VIRGO, l'antenna gravitazionale in costruzione a Cascina

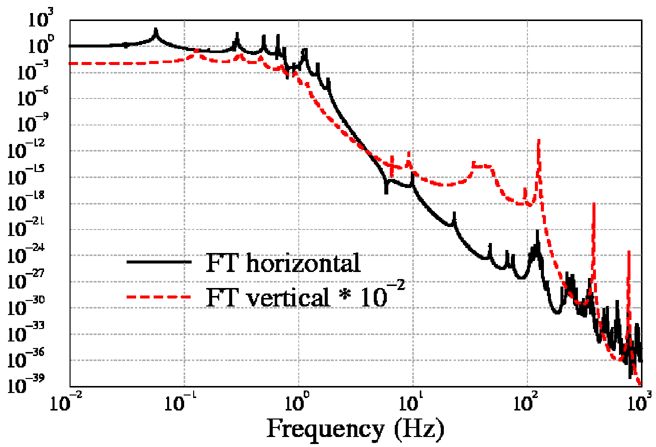
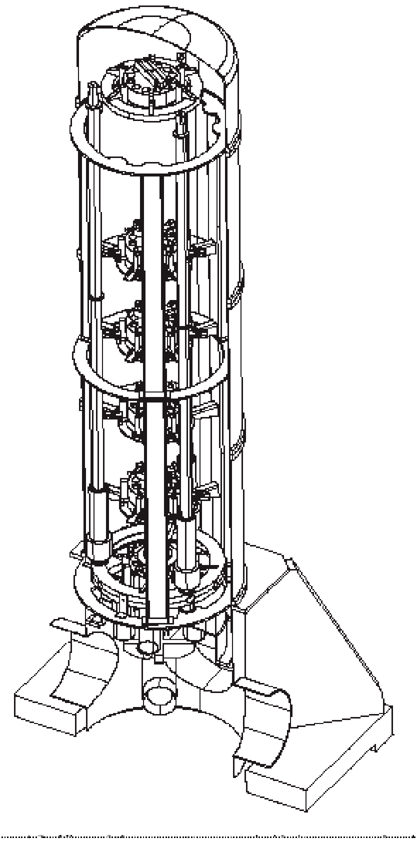


Figure II.2: The Virgo superattenuator performance: transfer functions (TF) predicted by the simulation for the attenuation of vertical and horizontal motions.



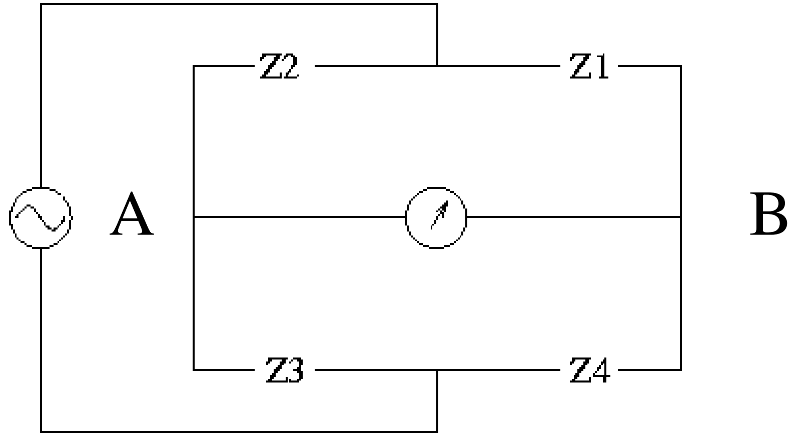
Virgo

- Virgo è un interferometro del tipo Michelson Morley destinato a rivelare la presenza di onde gravitazionali:

- Due specchi vengono sospesi tramite dei superattenuatori alla distanza di 3 km dal laboratorio. Un laser misura in continuazione la differenza di distanza dei due specchi. l'arrivo di un'onda gravitazionale avvicina uno specchio ed allontana l'altro: questo fenomeno viene osservato come differenza di fase tra i due fasci del laser.

Circuiti a ponte

- Un circuito a ponte è costituito da quattro impedenze disposte nel modo seguente:



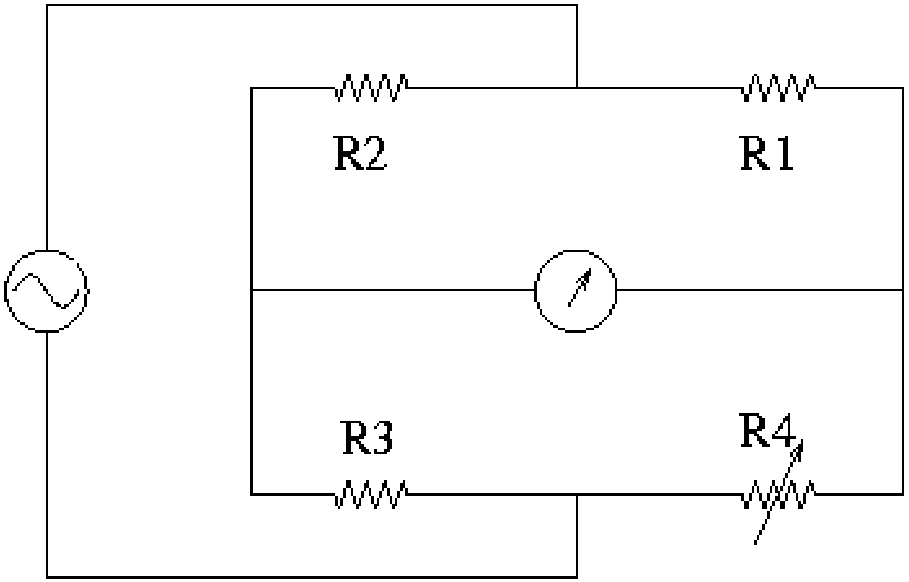
  - Il ponte si dice in equilibrio se la differenza di potenziale tra i punti A e B è nulla, così come la corrente che scorre nello strumento.
  - Perché questa condizione risulti verificata, deve risultare:

$$\frac{Z_3}{Z_2+Z_4}=\frac{Z_4}{Z_1+Z_2}\Rightarrow\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{Z_4}{Z_3}\Rightarrow\frac{Z_1}{Z_4}=\frac{Z_2}{Z_3}\Rightarrow Z_1Z_3=Z_2Z_1$$

  - La condizione precedente può essere soddisfatta da un solo valore di ω, o da tutti i valori. Nel secondo caso, difficile da realizzare esattamente nella pratica, ma approssimabile facilmente, il ponte risulta in equilibrio indipendentemente dalla forma della tensione applicata.

Ponte di Wheatstone

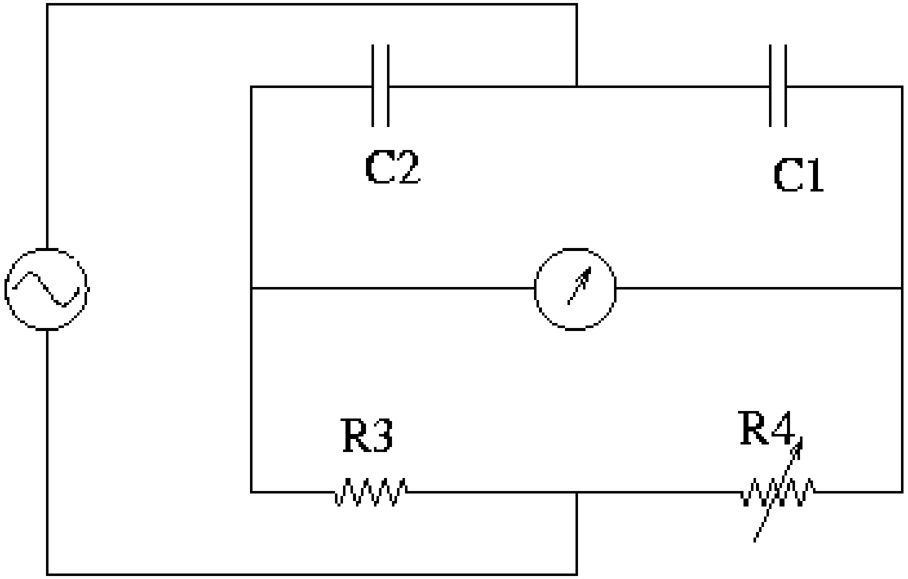
- Il ponte di Wheatstone è formato da sole resistenze: può essere utilizzato per misurare una resistenza incognita. Può venire alimentato in corrente continua o alternata.



- Il ponte è in equilibrio quando $R_3 = R_4 \dfrac{R_2}{R_1}$

Ponte di De Sauty

- Il ponte di De Sauty viene utilizzato invece per effettuare misure di capacità



- La capacità C_2 si suppone nota. Si varia la resistenza R_4 finché lo strumento misura zero. La capacità si ottiene tramite la formula:

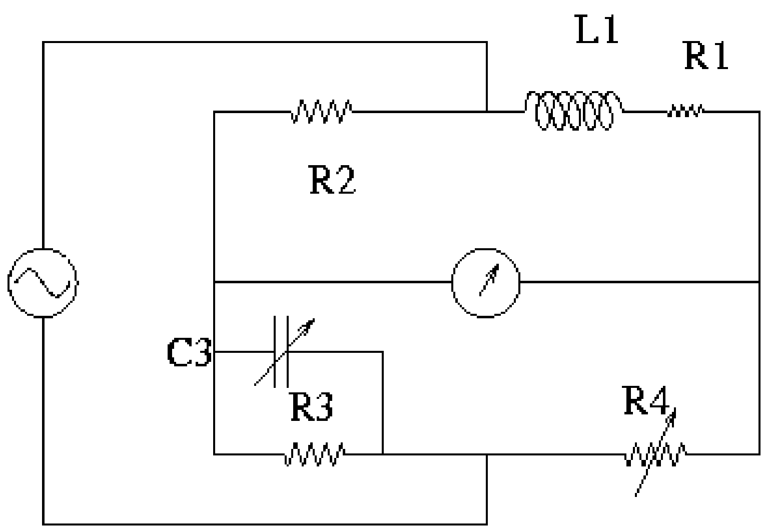
$$C_1 = C_2 \frac{R_3}{R_4}$$

Ponte di Maxwell

- Il ponte di Maxwell viene utilizzato per la misura delle induttanze, ed è il ponte di uso più comune:

$$R_2\left(\frac{1}{R_3}+j\omega C\right)=\frac{R_1+j\omega L}{R_4}$$

$$\Rightarrow \quad R_1=\frac{R_2R_4}{R_3}, \quad L=R_2R_4C$$



- Le condizioni sono:
  – Lo schema insolito è dovuto alla presenza della ineliminabile parte reale dell'impedenza dell'induttanza dovuta alla resistenza interna del filo.
  – Per regolare il ponte dapprima lo si alimenta in continua, e si regola la resistenza R_4 finché il ponte risulta in equilibrio.
  – A questo punto, si passa all'alimentazione in alternata, e si regola il condensatore variabile fino a raggiungere nuovamente l'equilibrio.

Circuiti integratori e derivatori

- Il passa basso e il passa alto in particolari condizioni possono servire da circuiti integratori e derivatori:

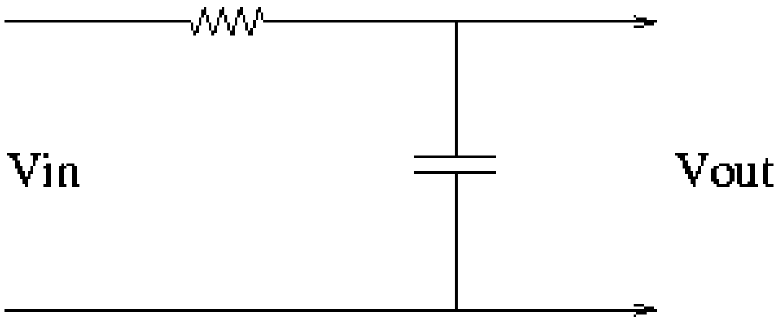
$$V_{out} = \frac{1}{1+j\omega RC} V_{in} \underset{\omega RC>>1}{\cong} \frac{1}{j\omega RC} V_{in} = \frac{1}{RC} \int V_{in}$$

$$V_{out} = \frac{j\omega RC}{1+j\omega RC} V_{in} \underset{\omega RC<<1}{\cong} j\omega RC V_{in} = RC \frac{dV_{in}}{dt}$$

- Riassumendo:
  - Il filtro passa basso, su un segnale contenente soprattutto frequenze più alte della sua frequenza di taglio, funziona da integratore.
  - Il filtro passa alto, su un segnale contenente soprattutto frequenze più basse della frequenza di taglio, serve da derivatore.
  - In entrambi i casi, a causa del fatttore ωRC, il segnale in uscita risulta attenuato rispetto a quello in ingresso.

Un modo alternativo

- Si possono trattare i circuiti derivatore e integratore in modo alternativo, senza utilizzare il concetto di impedenza. Si possono scrivere ad esempio le equazioni dell'integratore:



$$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = V_{in} \ , \quad V_{out} = V_C = \frac{q}{C}$$

$$\Downarrow$$

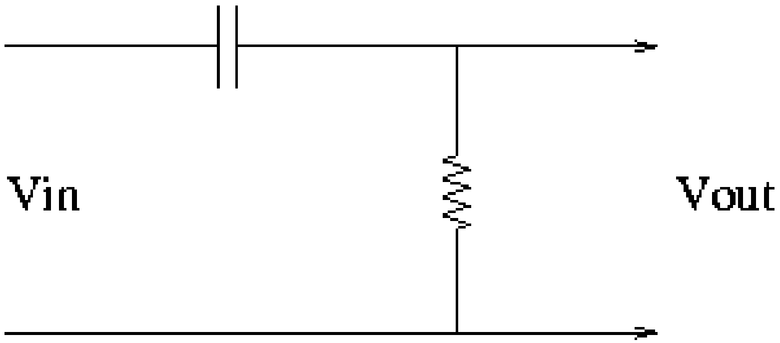
$$V_{out} + RC\frac{dV_{out}}{dt} = V_{in}$$

- Se la tensione in uscita risulta fortemente attenuata rispetto a quella in ingresso, si ha:

$$V_{out} << V_{in} \quad \Rightarrow \quad RC\frac{dV_{out}}{dt} = V_{in} \quad \Rightarrow \quad V_{out} = \frac{1}{RC}\int V_{in}(t)dt$$

Filtro derivatore

- Analogamente si procede col filtro derivatore: la condizione di funzionamento è sempre la stessa, ovvero che il segnale in uscita risulti molto attenuato rispetto all'ingresso:



$$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = V_{in} \;, \quad V_{out} = V_R = Ri$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{RC}\int V_{out}(t)dt + V_{out} = V_{in}$$

$$V_{out} << V_{in} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{RC}\int V_{out}(t)dt = V_{in} \quad \Rightarrow \quad V_{out} = RC\frac{dV_{in}}{dt}$$