

Richiami sul campo magnetico

- Un filo percorso da corrente genera intorno a sè un campo magnetico le cui linee di forza sono anelli che girano intorno al filo.

La direzione del campo magnetico segue la regola della mano destra.



La forza di Lorentz

- Una carica che si muove in un campo magnetico risente una forza F (forza di Lorentz) data da :

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

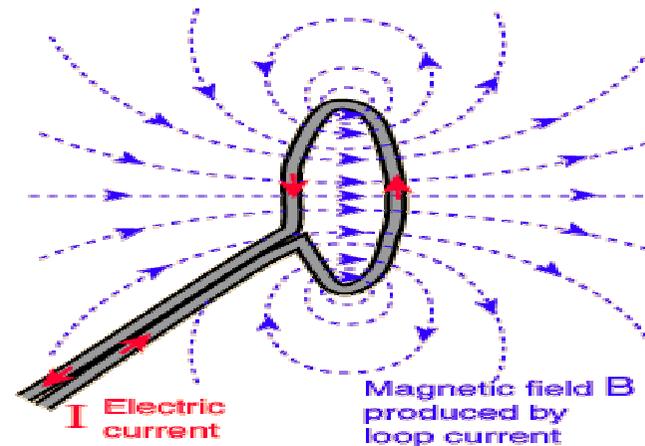
- Anche un filo percorso da corrente, essendo composto da cariche in movimento, subisce una forza dovuta al campo magnetico.

$$\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Esempi

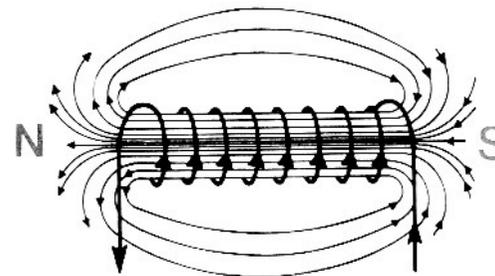
Spira circolare di raggio R percorsa da corrente. Sull'asse, a distanza z dal centro, il campo vale:

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{2IR}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$



Solenoide di lunghezza h composto da N spire affiancate. Dentro il solenoide il campo è pressoché uniforme e vale:

$$B = \mu_0 I \frac{N}{h}$$



Cos'è la f.e.m.?

- La forza elettromotrice di un generatore è definita come il lavoro effettuato per portare una unità di carica da un estremo all'altro di un circuito.
- Nel caso di una pila, la f.e.m è uguale alla differenza di potenziale ai suoi capi.
- Spesso i concetti di differenza di potenziale e f.e.m. si confondono, in quanto i valori numerici coincidono in molti casi.
- Nel caso in cui solo i campi elettrici entrino in gioco, la f.e.m. è uguale all'integrale del campo elettrico nel circuito.
- Nel caso in cui i circuiti si muovano all'interno di un campo elettromagnetico, allora anche la forza di Lorentz entra nel conteggio.
- La f.e.m. si può definire anche quando i campi non sono conservativi.

La legge di Faraday

- In un circuito immerso in un campo magnetico si produce una f.e.m. pari alla derivata rispetto al tempo del flusso del campo magnetico attraverso il circuito stesso:

$$f.e.m. = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$$

- La variazione del flusso può essere causata dal movimento della spira in un campo non omogeneo, dal movimento delle sorgenti del campo, o infine da una dipendenza rispetto al tempo delle correnti che producono il campo magnetico.

Esempio

- Una spira metallica piana, di area A ricavata da un filo di resistenza r si trova immersa in un campo magnetico B uniforme.
- Il campo forma con la normale alla spira un angolo θ . Il campo inoltre varia secondo la regola $B=B_0\cos(2\pi f t)$
- Il flusso attraverso la spira vale allora: $\Phi(t) = B_0 A \cos(2\pi f t)$
- La f.e.m. vale quindi: $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = 2\pi f B_0 A \sin(2\pi f t)$
- La corrente indotta infine vale: $i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{2\pi f B_0 A}{R} \sin(2\pi f t)$

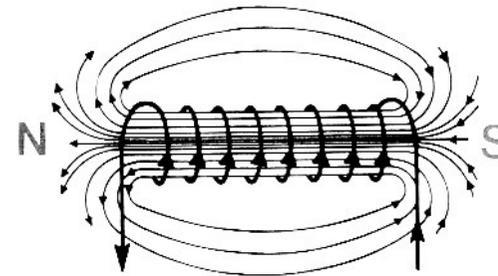
Autoinduzione

- Si consideri una semplice spira percorsa da una corrente i variabile nel tempo: La corrente produce un campo magnetico, e quindi un flusso di campo all'interno della spira.
- Ai capi della spira si produce allora una f.e.m. che si oppone alla variazione della corrente: se, ad esempio, la corrente diminuisce in modulo, la f.e.m. prodotta tende a farla aumentare, se invece aumenta, tende a farla diminuire.
- La f.e.m. è proporzionale alla derivata del campo B . Questo è proporzionale alla corrente che scorre nella spira. Si ha in definitiva una relazione del tipo:
$$f.e.m. = -L \frac{di(t)}{dt}$$
- La costante L si chiama induttanza della spira. Una formula analoga vale per circuiti formati da più spire. L dipende solo dalla geometria del circuito.

Esempio

- Un solenoide è costituito da N spire avvolte strettamente intorno ad un cilindro di raggio R e altezza h .
- Nell'approssimazione in cui $h \gg R$, il campo magnetico all'interno del solenoide, quando questo è percorso da una corrente i , è dato dalla formula:

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{h}$$



- Il flusso di B attraverso il solenoide sarà N volte quello attraverso la singola spira, e quindi:

$$\Phi(B) = N\mu_0 \frac{Ni}{h} \pi R^2$$

- La f.e.m. autoindotta risulta allora:

$$f.e.m. = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -\mu_0 \frac{N^2}{h} \pi R^2 \frac{di}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

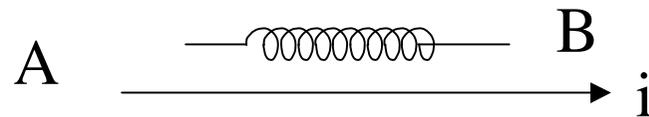
$$L = \mu_0 \frac{N^2}{h} \pi R^2$$

Unità di misura

- Nel sistema MKS il campo magnetico si misura in Tesla.
- Il flusso si misura in Weber, corrispondenti ad 1 Tesla per metro quadro.
- L'induttanza si misura allora in Weber/Ampere, unità di misura cui si dà il nome di Henry, simbolo H.
- Nella pratica, l'unità più utilizzata è il mH: le induttanze utilizzate nei circuiti, acquistabili commercialmente, hanno induttanze di qualche centinaio di mH. Gli avvolgimenti presenti nei motori e nei trasformatori hanno spesso induttanze superiori.
- Per aumentare l'induttanza, si usa avvolgere la bobina intorno ad un nucleo di metallo: in questo caso l'induttanza viene ad aumentare di un fattore μ_r , una costante tipica del metallo utilizzato, detta permeabilità magnetica relativa, che può valere anche $10^3 - 10^4$

Elemento induttivo in un circuito

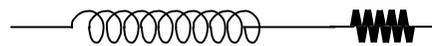
- Una bobina, una spira od anche un pezzo di filo eccessivamente lungo in un circuito costituiscono quello che si dice elemento induttivo, o induttore.
- Il simbolo di un induttore è il seguente:



- La caratteristica tensione corrente di un induttore, in base alla legge di Faraday, è data da:

$$V_{AB} = -L \frac{di(t)}{dt}$$

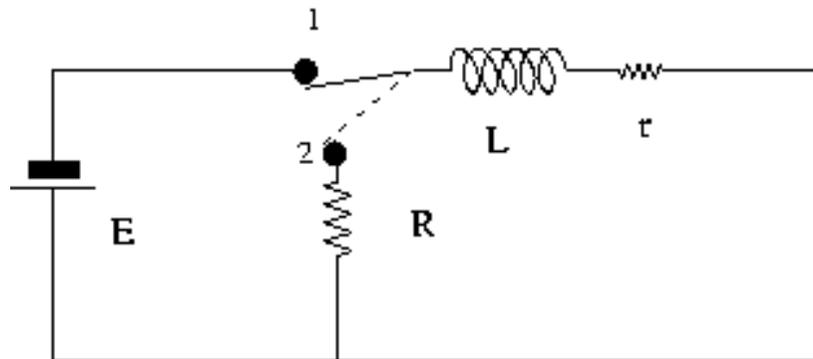
- Quasi sempre, però, conviene porre in evidenza la resistenza interna del filo che costituisce l'induttanza: in questo caso il simbolo si modifica:



$$V_{AB} = -L \frac{di(t)}{dt} - ri$$

Circuiti RL

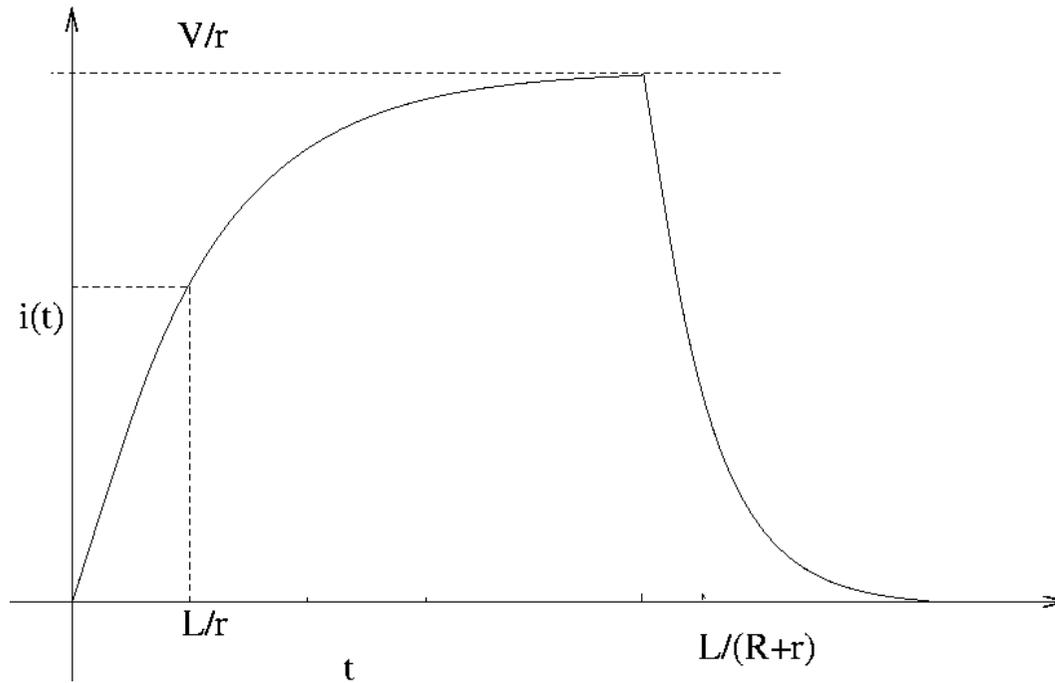
- Si consideri il circuito seguente, l'analogo della carica del condensatore:



- Quando l'interruttore si trova collegato alla batteria, l'equazione della maglia dà: $V - ri - L \frac{di}{dt} = 0$
- da cui: $i = \frac{V}{r} (1 - e^{-\frac{t}{L/r}})$
- Quando l'interruttore viene portato nella posizione 2 si ha invece:

$$i = \frac{V}{r} e^{-\frac{t}{L/(r+R)}}$$

Grafico della corrente



Extracorrente ed extratensione

- Come si può vedere, anche dopo la sconnessione del generatore, la corrente continua a scorrere nel circuito. La tensione ai capi dell'induttanza e della resistenza R è data da $V= Ri$. Se R è molto grande (ovvero, se l'interruttore anziché chiudersi su un carico viene lasciato aperto) la corrente scende molto rapidamente, e la tensione assume valori molto grandi, al punto da poter danneggiare il circuito.
- Si parla allora di extracorrenti ed extratensioni di apertura. Analogamente, la differenza tra la corrente a regime e quella reale si dice extracorrente di chiusura.

Energia immagazzinata

- La potenza fornita da un induttore è data da:

$$W = Vi = -L \frac{di}{dt} i = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$$

- Si può osservare che:

- Se la corrente aumenta in modulo, W è negativa: l'induttore assorbe energia
- Se la corrente diminuisce in modulo, W è positiva: l'induttore fornisce energia
- La potenza è un differenziale esatto.

- Riesce naturale identificare l'energia immagazzinata in un induttore con la quantità:

$$U = \frac{1}{2} Li^2$$

- Dal punto di vista energetico, l'induttore è quindi un serbatoio di energia, associata alla corrente che vi scorre (in analogia con il condensatore, in cui l'energia è associata alla carica immagazzinata).

Circuiti RLC

- Si consideri il circuito seguente:



- Le equazioni della maglia danno:

$$\frac{q}{C} - ri - L \frac{di}{dt} = \frac{q}{C} - r \frac{dq}{dt} - L \frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

- la soluzione è un'oscillazione smorzata:

$$q = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(2\pi f t)$$

$$\tau = \frac{2L}{r} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{2L}\right)^2}$$