

I numeri complessi

- Cose da ricordare:

$$z = a + jb = |z|e^{j\alpha} \quad \bar{z} = a - jb = |z|e^{-j\alpha}$$

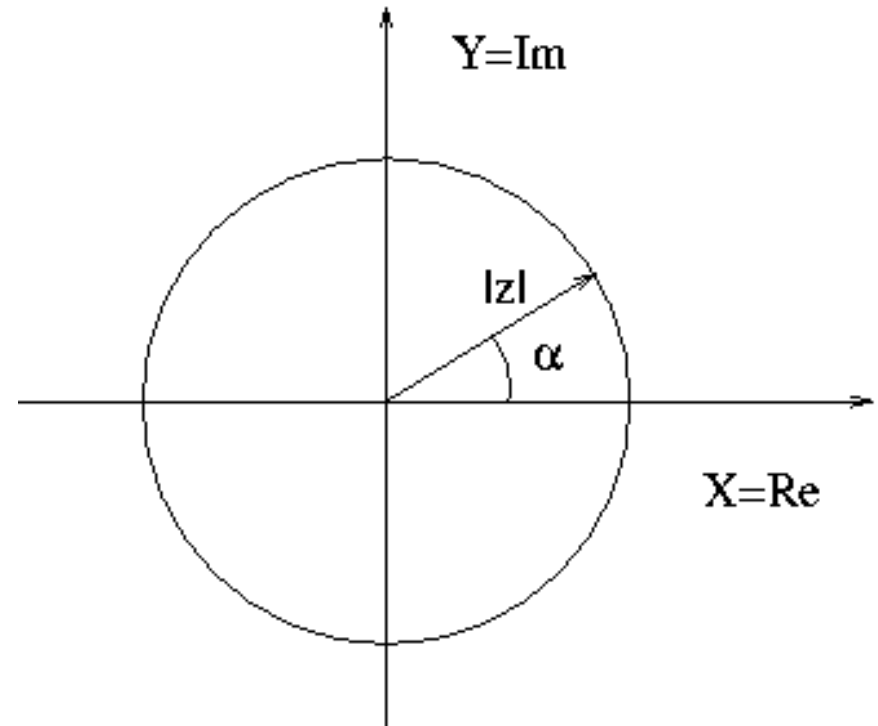
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \operatorname{tg} \alpha = b / a$$

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2 \quad z^{-1} = \frac{1}{|z|} e^{-j\alpha}$$

Rappresentazione grafica

- Un numero complesso si può rappresentare come un vettore nel piano xy.
- La componente x del vettore è uguale alla parte reale, la componente y a quella immaginaria.
- In questo modo la lunghezza del vettore è proporzionale al modulo
- l'angolo formato dal vettore con l'asse x è uguale alla fase.



Fasori

- Un fasore è un numero complesso della forma:

$$V = \tilde{V}e^{j\omega t} = V_0 e^{\phi} e^{j\omega t}$$

- Il numero $\tilde{V}$ è un numero complesso, con modulo V_0 e fase ϕ
- L'angolo formato con l'asse reale è pari a : $\phi + \omega t$ e quindi aumenta linearmente col tempo: il vettore V ruota in senso antiorario nel piano complesso.
- La parte reale di V è pari a:

$$\text{Re}(V) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$

- Se moltiplico un fasore per un numero complesso z trovo un nuovo fasore, che ruota con la stessa velocità, sfasato rispetto a V di un angolo pari alla fase di z .

Derivate e integrali

- La derivata di un fasore V è uguale a:

$$\frac{dV}{dt} = j\omega V = \omega V e^{j\pi/2}$$

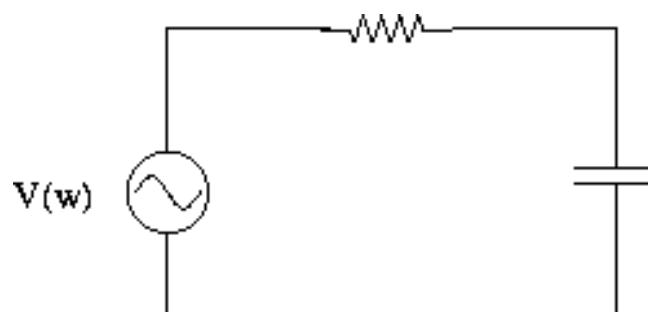
- Ovvero: per calcolare la derivata di un fasore si moltiplica per $j\omega$, ottenendo un nuovo fasore sfasato di $\pi/2$ rispetto a quello originario.
- Analogamente si calcola l'integrale come inverso della derivata:

$$\int V dt = \frac{V}{j\omega} = -j \frac{V}{\omega}$$

- Per ottenere l'integrale si divide per $j\omega$, ovvero si divide per ω e si sfasa di $-\pi/2$ rispetto a V .

Cominciamo da un esempio

- Si consideri il circuito in figura:



- L'equazione del circuito è:

$$V_0 \cos(\omega t) = R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q$$

- Sappiamo che la soluzione più generale di questa equazione è data dalla somma di una soluzione particolare più una soluzione dell'equazione omogenea.

Il transiente

- Abbiamo già risolto l'equazione omogenea:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0 \quad q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

- Il parametro q_0 dipende dalle condizioni iniziali.
- Si può notare come la soluzione dell'equazione omogenea va a zero rapidamente a causa dell'andamento esponenziale decrescente: costituisce quello che nel linguaggio dell'elettronica si chiama un *transiente*

La soluzione a regime

- La soluzione particolare può essere quella che si ottiene lasciando il sistema in funzionamento per molto tempo: per questo è detta anche soluzione a regime. Per ottenerla, si può cercare ad esempio una soluzione oscillante con la stessa frequenza f :

$$q(t) = Q_0 \cos(2\pi f t + \phi) = Q_0 [\cos(2\pi f t) \cos \phi - \sin(2\pi f t) \sin \phi]$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -2\pi f Q_0 [\sin(2\pi f t) \cos \phi + \cos(2\pi f t) \sin \phi]$$

- sostituendo, ed eguagliando i termini in seno e coseno, si trova:

$$\tan(\alpha) = -2\pi f RC$$

$$Q_0 = \frac{CV_0}{\sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}}$$

- Si nota che:
 - La soluzione a regime non dipende dalle condizioni iniziali
 - La mole di conti da effettuare risulta notevole anche per un problema semplice.

Una via alternativa...

- Si scriva V e q nella forma:

$$V(t) = \text{Re}(V_0 e^{j\omega t}), \quad q(t) = \text{Re}(\tilde{Q}_0 e^{j\omega t})$$

- Sostituendo nell'equazione del circuito si ha:

$$j\omega R \tilde{Q} e^{j\omega t} + \frac{\tilde{Q}}{C} e^{j\omega t} = V_0 e^{j\omega t}$$

$$\tilde{Q} = \frac{C}{1 + j\omega RC} V_0$$

- ed infine, separando modulo e fase:

$$Q_0 = |\tilde{Q}| = \frac{C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} V_0 \quad \tan(\phi) = \frac{\text{Im}(\tilde{Q})}{\text{Re}(\tilde{Q})} = -\omega RC$$

Impedenza

- In generale, dato un circuito contenente elementi lineari, come resistenze, condensatori, impedenze, se si applica ad esso una tensione V sinusoidale di frequenza f , la corrente che vi scorre ha le seguenti proprietà:
 - E' anch'essa sinusoidale di frequenza f .
 - Risulta in generale sfasata rispetto alla tensione di un angolo ϕ che dipende dalla frequenza.
 - L'ampiezza della corrente è proporzionale all'ampiezza della tensione, e il rapporto dipende dalla frequenza.

- Si definisce impedenza del circuito la quantità: $Z = \frac{V_0}{I_0} e^{j\phi}$
- Nella rappresentazione complessa:

$$V = \tilde{V} e^{j\omega t} \quad I = \tilde{I} e^{j\omega t} \quad V = ZI \quad Z = \frac{\tilde{V}}{\tilde{I}}$$

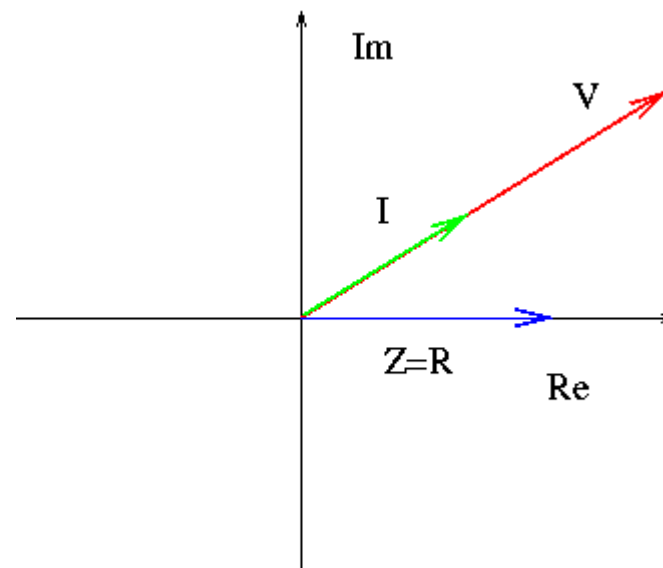
- L'impedenza è una grandezza complessa. Il modulo si misura in Ohm e la fase in gradi o radianti.

Resistenza

- Nel caso della resistenza, lo sfasamento è zero, e l'impedenza è un numero reale.

$$V = RI \quad \tilde{V} = R\tilde{I} \quad Z = R$$

- Si possono rappresentare le relazioni di fase in un diagramma: i vettori I e V ruotano rimanendo paralleli, mentre il vettore Z è fisso.
- Si tratta di una rappresentazione arbitraria, in quanto I , V e Z hanno dimensioni diverse.

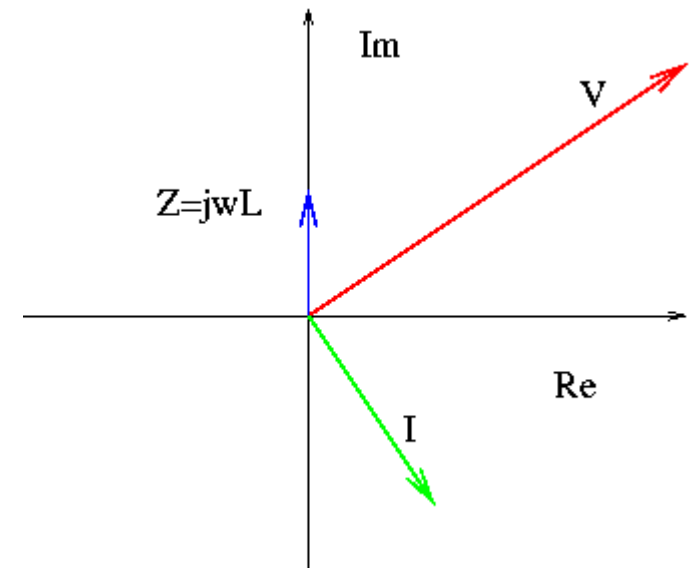


Induttanza

- Nel caso dell'induttanza ideale, l'impedenza è immaginaria.

$$V = L \frac{dI}{dt} \quad \tilde{V} = j\omega L \tilde{I} \quad Z = j\omega L$$

- Il modulo cresce linearmente con la frequenza, mentre lo sfasamento è fisso: la corrente è in RITARDO rispetto alla tensione di 90 gradi.

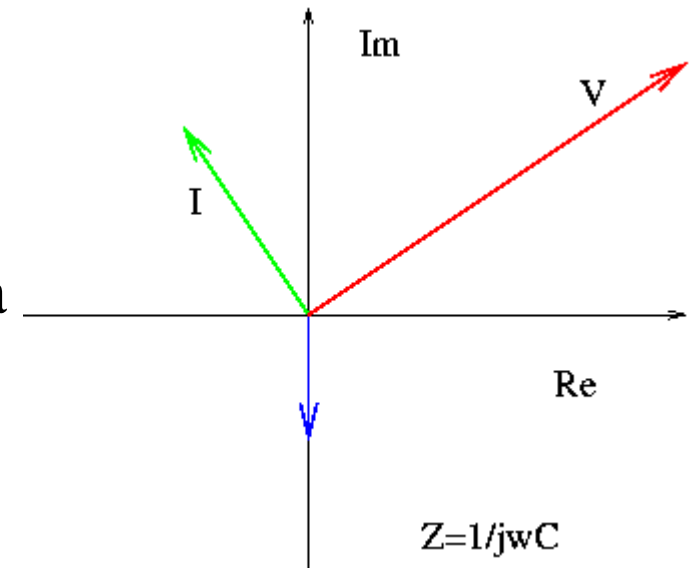


Capacità

- Anche nel caso del condensatore, l'impedenza è puramente immaginaria.

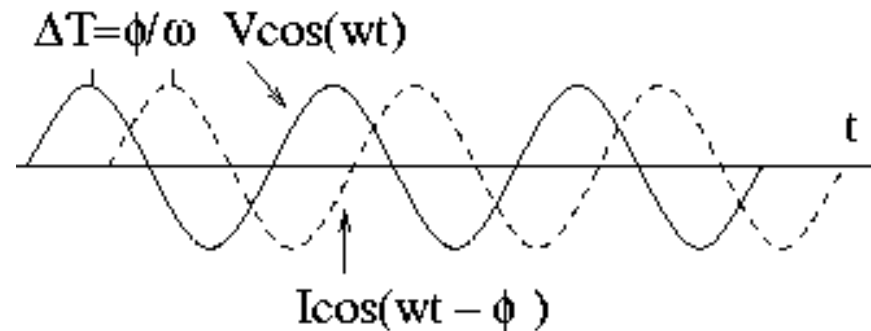
$$V = \frac{Q}{C} = \frac{\int Idt}{C} \quad \tilde{V} = \frac{\tilde{I}}{j\omega C} \quad Z = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

- Stavolta il modulo decresce con la frequenza mentre la corrente è in ANTICIPO sulla tensione di 90 gradi.



Lo sfasamento

- Due sinusoidi sfasate presentano il seguente aspetto:



- In questo esempio, la tensione è in **anticipo** rispetto alla corrente, ovvero la corrente è in **ritardo** rispetto alla tensione. Una senoide in ritardo presenta uno sfasamento negativo.
- La distanza temporale tra le due sinusoidi è legata allo sfasamento dalla formula:

$$\Delta T = \phi / \omega \quad \phi = \omega \Delta T = 2\pi \frac{\Delta T}{T}$$

Combinazione di impedenze

- E' facile verificare che:
 - Impedenze in serie di sommano:

$$Z_{tot} = Z_1 + Z_2$$

- L'inverso dell'impedenza equivalente a due impedenze in parallelo è uguale alla somma degli inversi delle singole impedenze:

$$\frac{1}{Z_{tot}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

- Tutto questo ovviamente nel caso in cui non esistano effetti di accoppiamento tra elementi del circuito, cosa quasi mai vera quando nel circuito sono presenti due induttanze vicine.
- Nel caso delle resistenze e dei condensatori queste formule portano ai risultati già noti.

Esempio

- Nel caso dell'induttanza reale, dotata di una sua resistenza, si ha:

$$Z = j\omega L + r$$

$$|Z| = \sqrt{(\omega L)^2 + r^2}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\omega L}{r}$$

- Il modulo dell'impedenza non si azzerava mai, ma ha un valore minimo.
 - Lo sfasamento cresce con la frequenza.

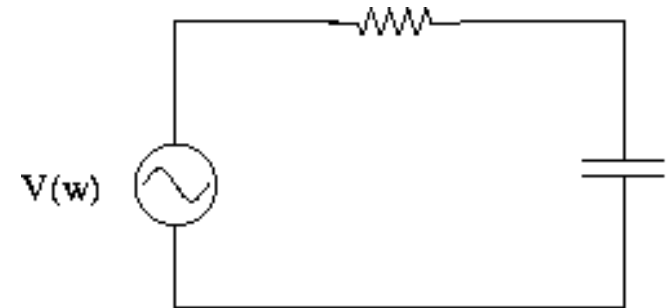
- La frequenza critica è data da:

$$f_c = \frac{r}{2\pi L}$$

- Per $f < f_c$ prevale il comportamento resistivo
- per $f > f_c$ prevale il comportamento induttivo.
- Nel nostro caso, f_c è di circa 10 Hz.

Somma di tensioni

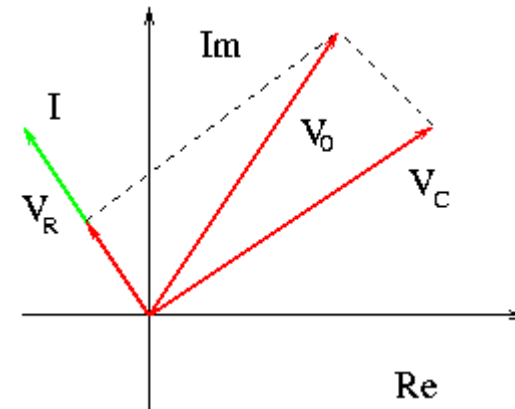
- Torniamo al circuito proposto all'inizio:



- La corrente è la stessa nella resistenza e nel condensatore.
- La tensione ai capi della resistenza è in fase con la corrente.
- La tensione ai capi del condensatore è un quarto di periodo in ritardo rispetto alla corrente e quindi anche rispetto alla tensione ai capi della resistenza.
- La tensione V_0 sarà la somma vettoriale di V_R e V_C

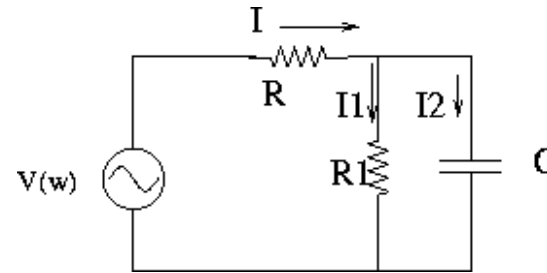
- Deve valere la relazione:

$$V_0^2 = V_R^2 + V_C^2$$



Somma di correnti

- Un altro circuito è il seguente:



- Stavolta la tensione ai capi della resistenza R_1 e del condensatore è la stessa.
 - La tensione e la corrente in R_1 hanno la stessa fase.
 - La corrente in C è un quarto di periodo in anticipo rispetto alla tensione.
 - La corrente I è la somma vettoriale di I_1 e I_2 .
- Si ha:

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2$$

