Serie di Fourier

Se x(t) è periodica con periodo T e frequenza f=1/T, posso scriverla nella forma:

$$x(t) = \sum_{k=0,\infty} A_k \cos\left(2\pi f_k t + \varphi_k\right), \qquad f_k = k f_1 = k\frac{1}{T}$$

Cioè: ogni segnale periodico di periodo T si può scrivere come somma di una sinusoide di frequenza 1/T (***frequenza fondamentale***) più infinite sinusoidi di frequenza pari ad un multiplo intero della fondamentale (frequenze armoniche superiori), ognuna con una propria ampiezza e fase.
La frequenza f_k=kf=k/T si dice k-esima armonica.

Forma alternativa

Risulta più comodo scrivere la formula di Fourier nella forma:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k sen\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

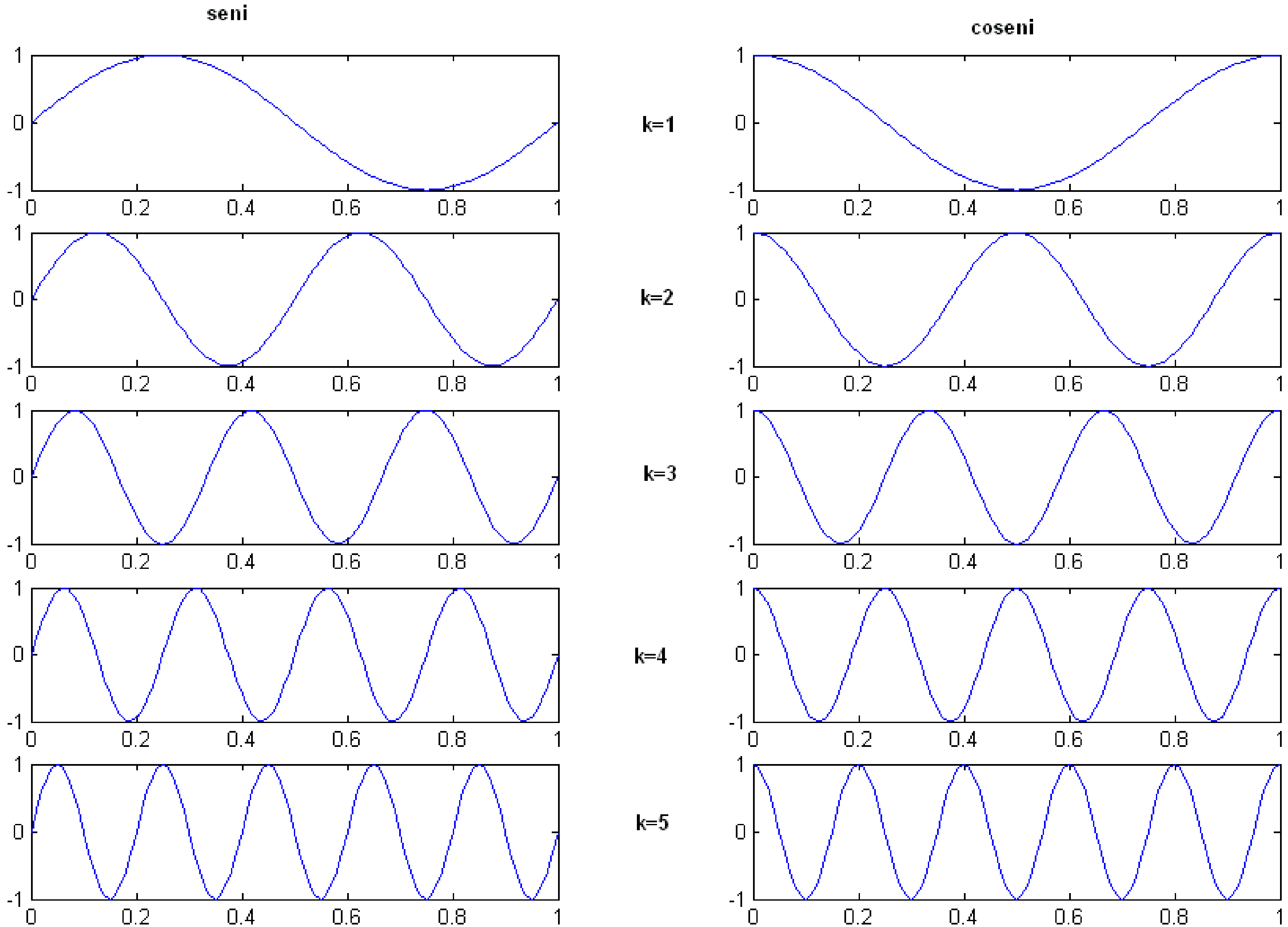
I coefficienti si possono calcolare una volta conosciuta la funzione:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{t=0}^{T} x(t)\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)dt \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_{t=0}^{T} x(t)sen\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)dt$$

Ampiezze a fase di ogni singola armonica si calcolano a partire dai coefficenti:

$$A_k = \sqrt{\left(a_k^2 + b_k^2\right)} \quad \tan\varphi_k = \frac{a_k}{b_k}$$

Le funzioni base



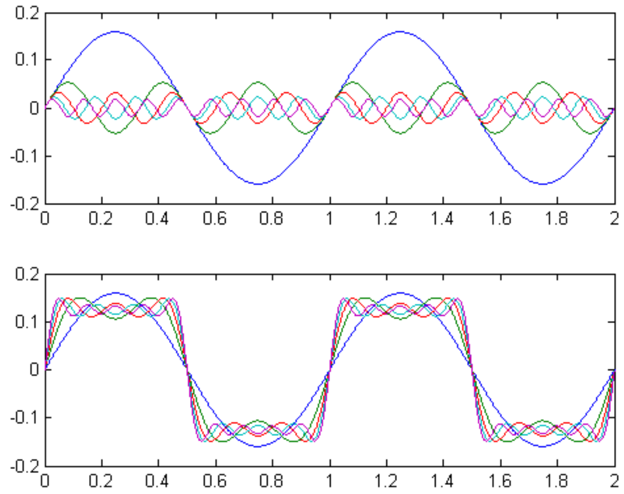
Esempio: l'onda quadra

- L'onda quadra, definita come +A tra 0 e T/2, e -A tra T/2 e 0, contiene solo armoniche dispari, e solamente termini proporzionali al seno.
  - N.B. cambiando l'origine delle coordinate, intervengono anche i termini proporzionali al coseno, ma non appaiono mai le armoniche pari.

$$a_k = 0;$$

$$b_k = 0 \quad k\ pari; \quad b_k = \frac{A}{2\pi k} \quad k\ dispari$$

Prime 5 componenti non nulle dello sviluppo dell'onda triangolare e loro somma



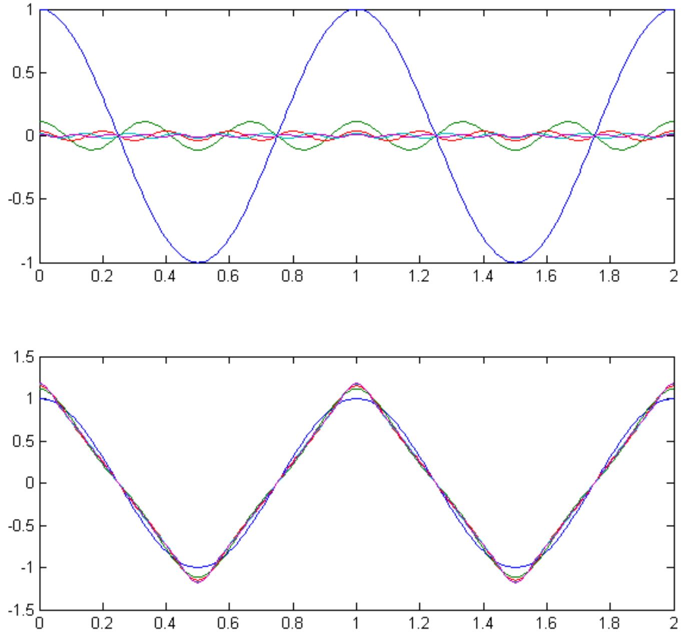
L'onda triangolare

- L'onda triangolare si può ottenere integrando l'onda quadra termine a termine. Ogni termine in seno si trasforma in un termine in coseno, e l'ampiezza decresce come $1/k^2$.

$$a_k = 0 \quad per\ k\ pari; \quad a_k = \frac{A}{(2\pi k)^2} \quad k\ dispari$$

$$b_k = 0;$$

Prime 5 componenti non nulle dello sviluppo dell'onda triangolare e loro somma



Segnali non periodici

- Nel caso dei segnali non periodici è possibile estendere il concetto di ***serie di Fourier*** a quello di ***trasformata di Fourier***
- La trasformata di Fourier contiene tutte le frequenze tra 0 ed infinito, e non solo la fondamentale e le armoniche.
- Di solito, in segnali qualsiasi:
  – le basse frequenze corrispondono a lente variazioni del segnale (componenti continue, derive lente, perdite di calibrazione, etc)
  – le alte frequenze corrispondono a variazioni rapide del segnale (sbalzi improvvisi, disturbi, interferenze, etc).
- Ovviamente il concetto di alto e basso dipende dalle frequenze tipiche di un segnale: ad esempio 20Hz-20kHz per un'orchestra sinfonica, 500-5000Hz per la voce umana, da qualche centinaio di kHz a qualche centinaio di MHz per un segnale radio, fino al GHz per un segnale televisivo, intorno a 1.8 GHz per un GSM.

Filtro

- Un filtro è una "scatola nera" con un ingresso ed una uscita: quando all'ingresso viene inviata una tensione $V_{in}(t)$ in uscita si ritrova una tensione $V_{out}(t)$. V_{out} si dice anche "*risposta*" del filtro all'ingresso V_{in}.
- Esistono filtri di tipo diverso, attivi (richiedono una alimentazione esterna), passivi, lineari, non lineari, stazionari (le proprietà non dipendono dal tempo) non stazionari.
- Noi studieremo i filtri:
  - passivi: saranno formati solamente da condensatori, induttanze e resistenze
  - lineari: raddoppiando il segnale in ingresso, la risposta raddoppia
  - stazionari: le caratteristiche non dipendono dal tempo.

Filtri lineari stazionari

- Un filtro lineare stazionario, possiede una proprietà molto importante: se l'ingresso è una sinusoide, l'uscita è una sinusoide la cui ampiezza e sfasamento dipendono dalla frequenza.

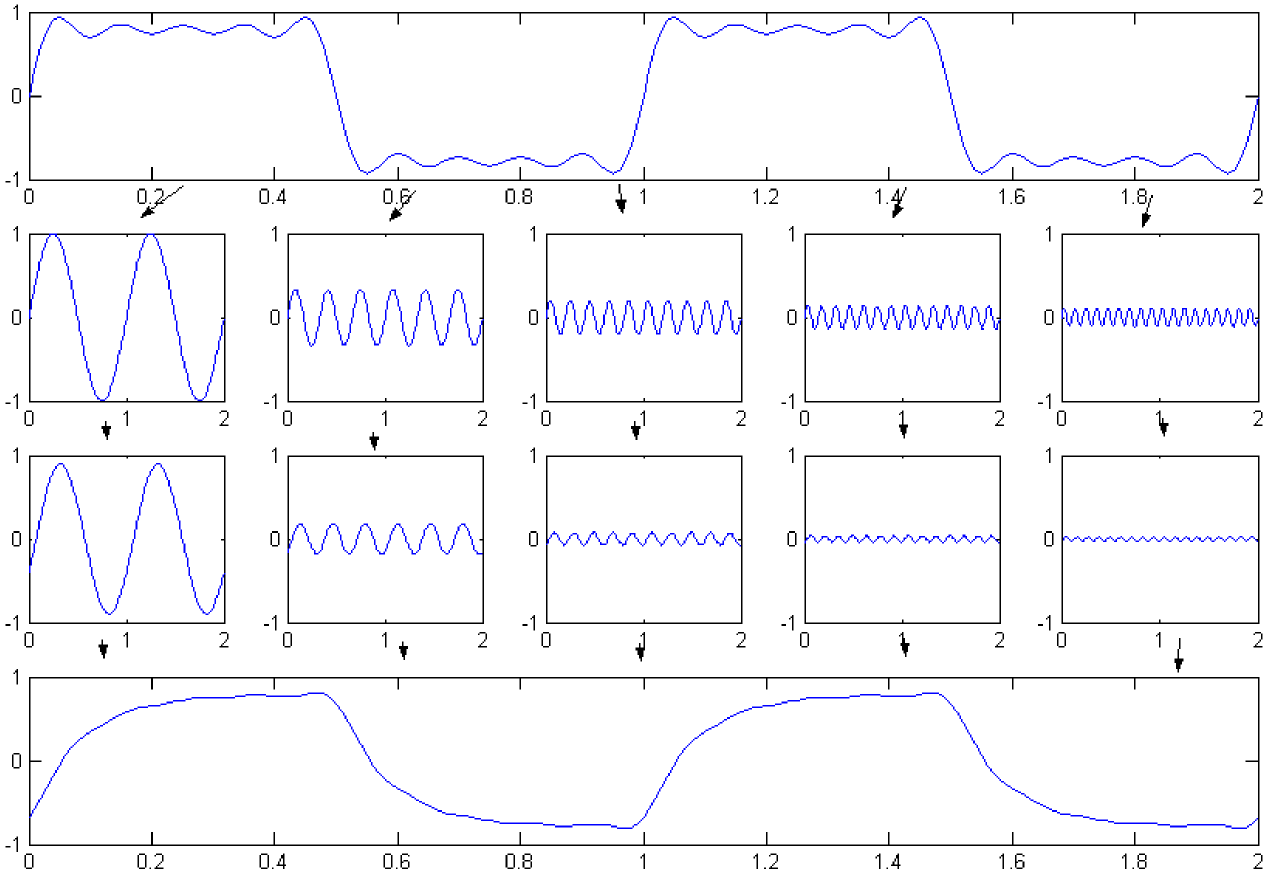
$$V_{in} = V_0 \cos \omega t \rightarrow V_{out} = A(\omega) V_0 \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

- Possiamo allora descrivere il comportamento del filtro tramite due funzioni, una che dia il rapporto V_{out}/V_{in} in funzione della frequenza, ed una che dia lo sfasamento.
- In alternativa, è possibile utilizzare un'unica funzione complessa il cui modulo sia uguale al rapporto tra i moduli e la cui fase sia uguale alo sfasamento: questa funzione si chiama *funzione di risposta* o anche *funzione di trasferimento*.

$$V_{in} = V_0 e^{j\omega t} \rightarrow V_{out} = A(\omega) V_0 e^{j\omega t + \varphi(\omega)} = T(\omega) V_0 e^{j\omega t} = T(\omega) V_{in}$$

Scomposizione e ricomposizione

- Per calcolare la risposta ad un segnale periodico:
  - Si scompone il segnale nelle sue componenti
  - si calcola la risposta ad ogni componente
  - Si sommano i risultati ottenuti



Cos'è il Decibel?

- Il decibel, scritto dB, è una unità di misura molto particolare, ma molto utile nel caso in cui si debba esprimere una grandezza positiva che varia su molti ordini di grandezza.
- La definizione di Decibel presenta alcune ambiguità che possono confondere nei primi tempi.
  - Per grandezze come potenza, energia, intensità, il valore in decibel si ottiene moltiplicando per **10** il logaritmo in base 10 della grandezza di interesse, misurato in una unità di riferimento opportuna:

$$W_{dB} = 10 \log_{10} \frac{W}{W_{rif}}$$

  - Per grandezze come tensione o corrente, il valore in decibel si ottiene moltiplicando per **20** il logaritmo in base 10

$$V_{dB} = 20 \log_{10} \frac{V}{V_{rif}}$$

Ancora sul Decibel...

- Il Decibel non ha significato assoluto, a meno che non sia definita per convenzione l'unità di riferimento. Per le potenze acustiche, ad esempio, si considera un valore di riferimento di 10^{-12} Watt.
- Quando si vuole specificare una grandezza di riferimento, a volte si utilizzano simboli come dBmW (Decibel riferiti ad 1 milliwatt), dBmA (riferiti ad un mA), etc.
- Tuttavia, la differenza tra due grandezze misurate in dB ha un valore assoluto, in quanto non dipende dall'unità di misura ma solo dal rapporto tra le grandezze in esame: ad esempio, se si misurano due potenze in dB, una differenza di n dB vuol dire che una delle due è $10^{n/10}$ volte più grande dell'altra.

Modulo della risposta di un filtro

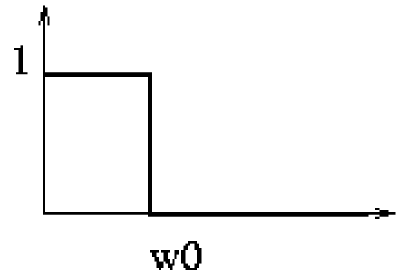
- Il Decibel viene anche adoperato per misurare la risposta di un filtro.
- In questo caso, la definizione è

$$T_{dB} = 10\log_{10}|T|^2 = 20\log_{10}|T|$$

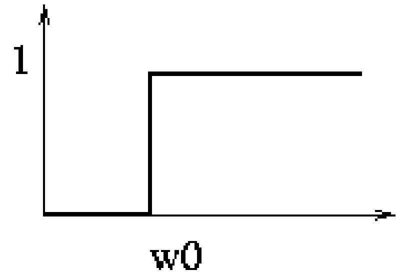
- La definizione è consistente con quelle precedentemente date per tensioni e correnti. Si nota subito che:
  - Se la tensione in uscita è attenuata di un fattore 10, questo corrisponde a -20dB. Questo corrisponde ad una diminuzione in potenza di un fattore 100.
  - Se la tensione in uscita è dimezzata, allora T corrisponde a -6dB
  - Se la potenza in uscita è dimezzata, allora T corrisponde a -3dB.

Filtri ideali

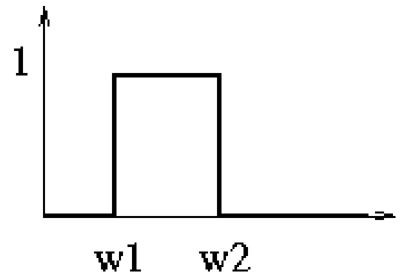
- Passa basso:



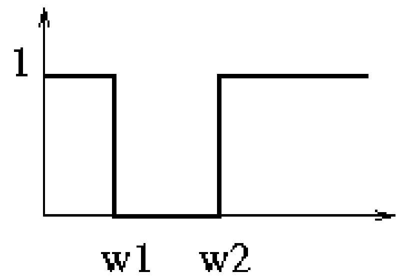
- Passa alto:



- Passa banda (band pass):

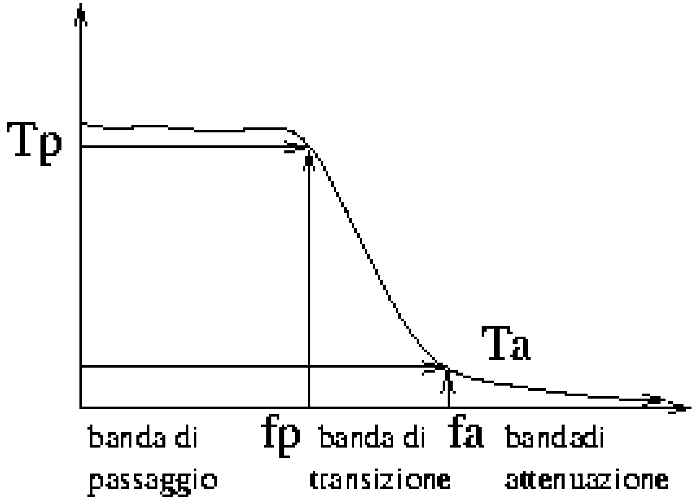


- Blocca banda (band stop):



Filtri reali

- Passa basso:



- Per disegnare un filtro passa basso bisogna individuare 4 parametri:
  - L'estremo superiore della banda di passaggio f_p e il valore minimo del modulo della funzione di trasferimento nella banda di passaggio (T_p).
  - L'estremo inferiore della banda di attenuazione fa e il valore massimo del modulo della funzione di trasferimento per $f>f_a$ (T_a).
  - In modo analogo si procede per definire un filtro passa alto e con piccole modifiche gli altri tipi di filtri.

Fase

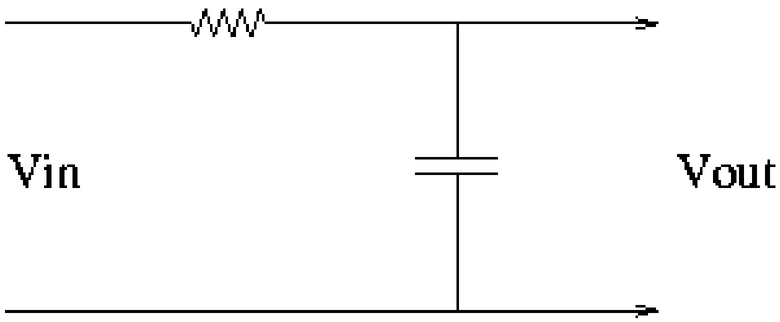
- Nei filtri ideali, si chiede che la fase corrisponda ad un ritardo uguale per tutte le frequenze:

$$V_{out}e^{j\omega t} = V_{in}\left|T\right|e^{j\omega(t-\tau)} = \left|T\right|e^{-j\omega\tau}V_{in}e^{j\omega t}$$

- Una fase del tipo $\varphi = \omega\tau$ è detta fase lineare, in quanto varia linearmente con la frequenza.
- Nei filtri reali, ci si accontenta che la fase sia approssimativamente lineare nella sola banda di passaggio.

Filtro passa basso

- Tramite un condensatore ed una resistenza si può costruire il più semplice filtro passa basso.

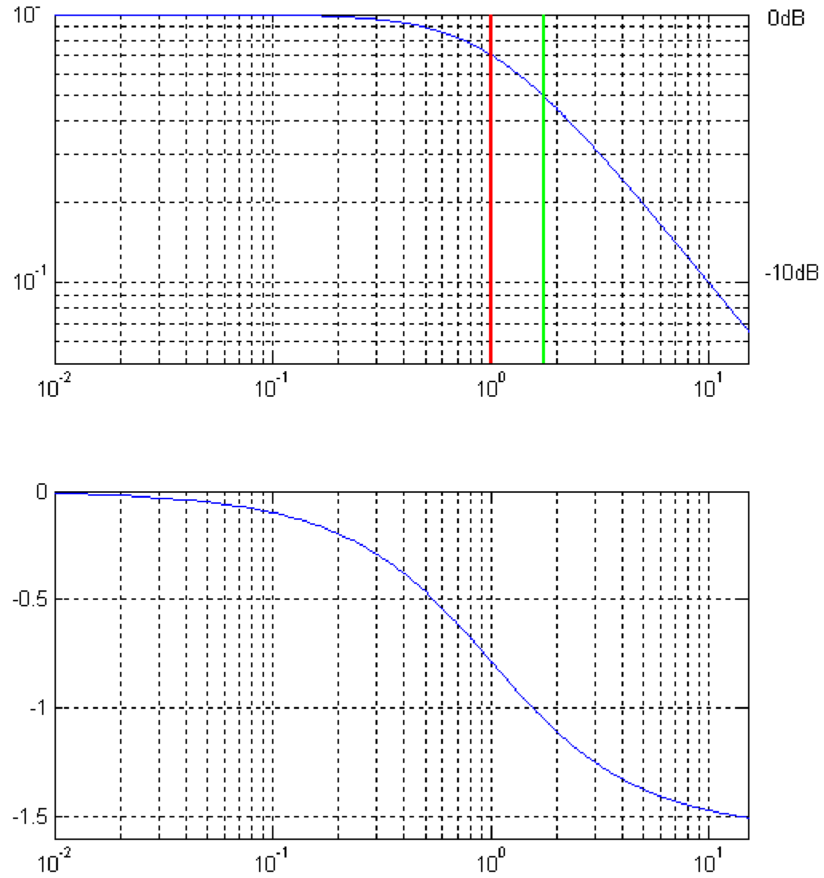


- La funzione di risposta è:

$$V_{out} = V_{in} \frac{1}{1 + j\omega RC} \qquad |T| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \qquad \tan\varphi = -\omega RC$$

Risposta del filtro passa basso

- In corrispondenza della frequenza $f_0 = \dfrac{1}{2\pi RC}$ la tensione in uscita vale $1/\sqrt{2}$ volte la frequenza in ingresso: questa frequenza è detta *frequenza di taglio.*



Spesso si usa la frequenza $f_{1/2}$, ovvero la frequenza per cui l'uscita è attenuata della metà: questa vale

$$f_{1/2} = \sqrt{3} f_0 = \sqrt{3} / 2\pi RC$$

Comportamento ad alte frequenze

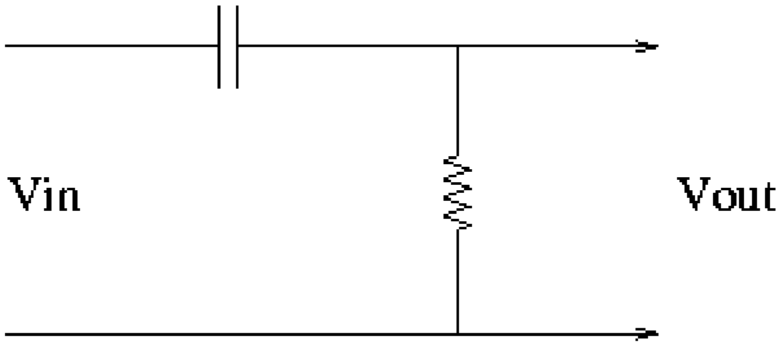
- per ω>RC, risulta che la funzione di trasferimento T è circa 1/(ω RC). In Decibel, si ha:

$$T_{dB} = 20\log_{10} T = -20\log_{10}(2\pi RCf)$$
$$T_{dB}(f_1) - T_{dB}(f_2) = -20\log_{10}(f_1 / f_2)$$

- In sintesi: nel passare da una frequenza f ad una k volte più grande, la risposta diminuisce di $20\log_{10}$(k) dB. Se k=2, la risposta diminuisce di circa 6dB: si dice che il filtro ad un polo garantisce una attenuazione di **6dB per ottava**, o anche (più raramente) di 20 dB per decade.

Filtro passa alto

- Analogamente scambiando R e C tra di loro si ottiene il filtro passa alto:

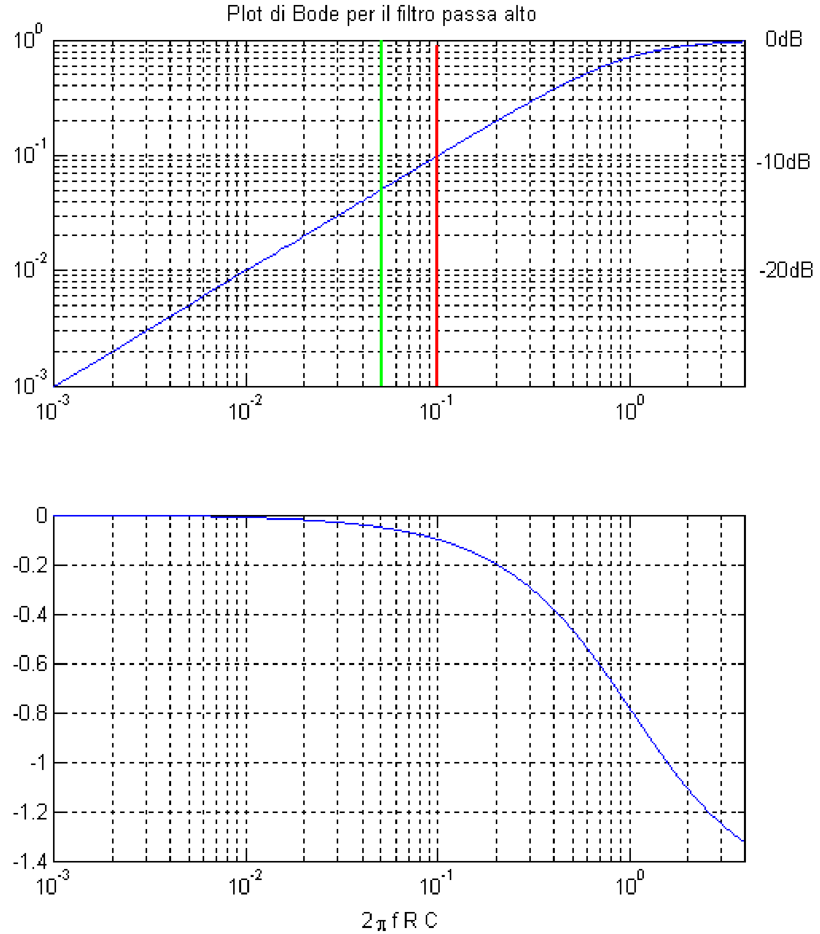


- La funzione di risposta è:

$$V_{out} = V_{in} \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \qquad |T| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \qquad \tan\varphi = -\frac{1}{\omega RC}$$

Risposta del filtro passa alto

- In corrispondenza di $f_0 = \dfrac{1}{2\pi RC}$ l'ampiezza in uscita vale $1/\sqrt{2}$ quella in ingresso, ovvero si ha una attenuazione di 3 dB. Lo sfasamento vale 45 gradi

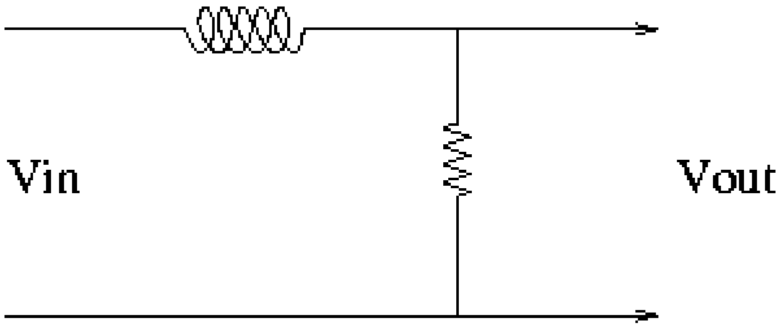


Spesso si usa la frequenza $f_{1/2}$, ovvero la frequenza per cui l'uscita è attenuata della metà: questa vale

$$f_{1/2} = f_0/\sqrt{3} = 1/\sqrt{3}(2\pi RC)$$

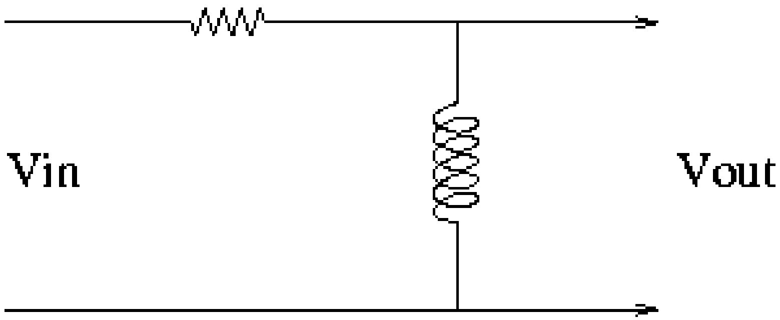
Filtri RL

- Un filtro passa basso è realizzabile anche tramite un'induttanza



$$V_{out} = V_{in} \frac{1}{1 + \frac{j\omega L}{R}}$$

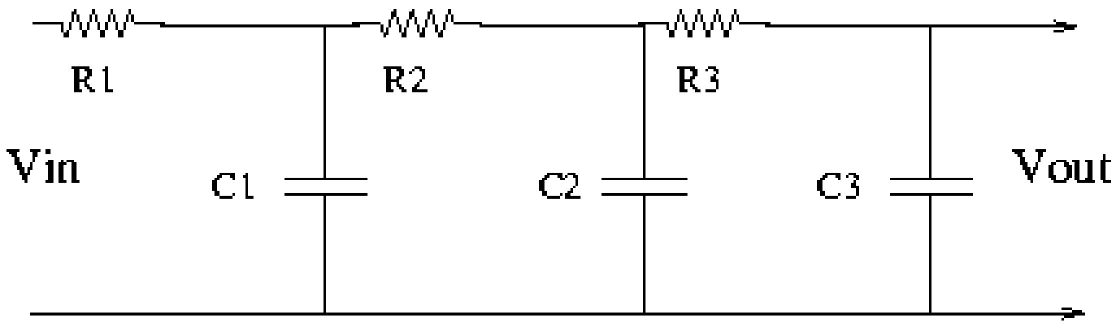
- Così come è realizzabile un passa alto:



$$V_{out} = V_{in} \frac{\frac{j\omega L}{R}}{1 + \frac{j\omega L}{R}}$$

Filtri a più poli

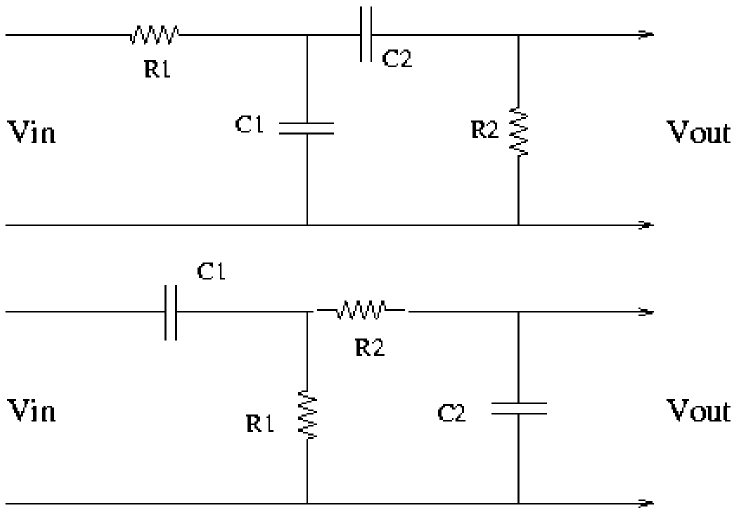
- Il filtro RC o RL è detto filtro ad un polo.
- Ponendo in cascata più filtri con lo stesso valore di RC, si ottengono filtri a più poli, che garantiscono una migliore attenuazione:



- Per adattare l'impedenza deve essere R1<R2<R3...
- Ogni filtro successivo aggiunge una ulteriore attenuazione di 6dB per ottava.

Filtri passa-banda

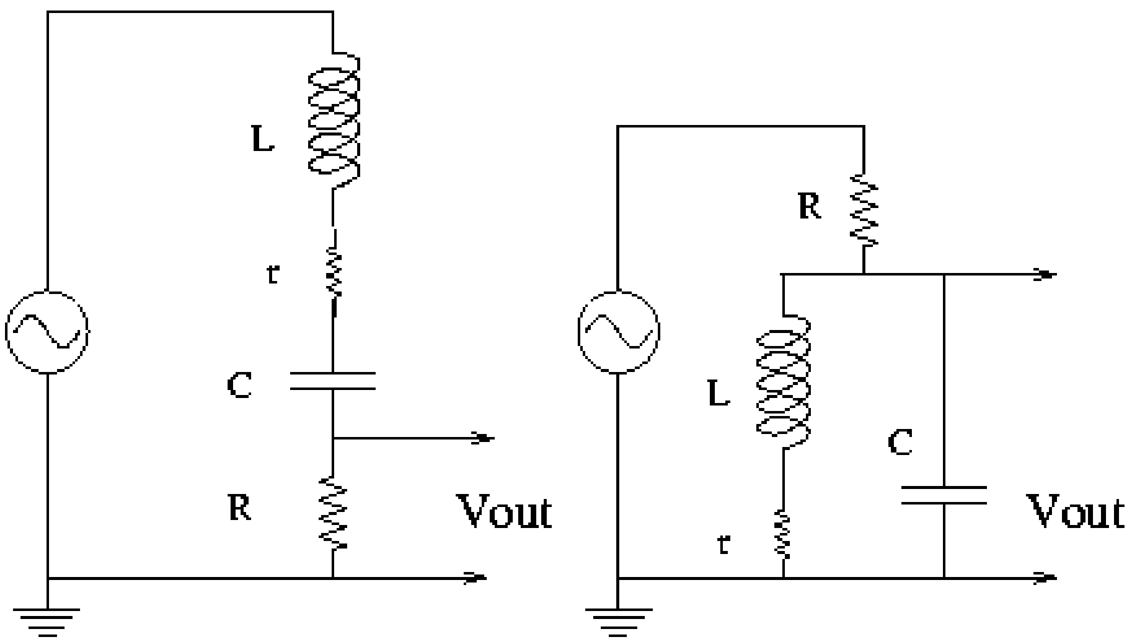
- Un filtro passa banda si può realizzare ponendo in cascata un filtro passa alto ed un filtro passa basso.



  - La frequenza di taglio del filtro passa alto deve essere minore di quella del filtro passa basso: R1C1< R2C2
  - L'ordine non è importante, ma bisogna stare attenti ad adattare l'impedenza: R1<R2

Filtri passa-banda risonanti

- Quando si è interessati ad un intervallo molto stretto di frequenze, si possono adoperare i filtri risonanti: filtri di questo tipo si trovano ad esempio nei circuiti sintonizzatori delle vecchie radio.



Filtri blocca banda (band stop)

- Un filtro blocca banda è ottenibile ponendo in parallelo un filtro passa alto ed un filtro passa basso. Il circuito risultante risulta comunque di qualità scadente.
- Risultati migliori si ottengono con i filtri antirisonanti che garantiscono una banda molto stretta.