Capitolo 1

Incertezze nelle misure fisiche

Il risultato di una misura fisica viene spesso espresso nella forma:

$$x = x_0 \pm \sigma_x$$

dove x_0e $\sigma_x$sono due valori numerici.

La quantità x_0 è la migliore stima ottenuta della quantità misurata, mentre σ_xè una grandezza che quantifica l'incertezza sul valore di x_0. Il risultato della misura è sempre una variabile casuale, distribuita secondo una funzione $f(x)$, mentre il valore di σ_xè una misura della dispersione delle misure intorno al "valore vero".

[1]

Bisogna tenere chiara la differenza tra "errore" e "incertezza": l'errore infatti è la differenza tra il valore vero e quello ottenuto dall'operazione di misura: pertanto il suo valore è sconosciuto. Nel linguaggio parlato, si tende a confondere i due termini, e quindi si parla di $\sigma_x$come de "l'errore sulla misura": nello scrivere è sempre meglio tener chiara la distinzione tra i due concetti.

L'errore $e = x - x_v$è una variabile casuale, distribuita secondo una distribuzione di probabilità $f(e)$ che ha la stessa forma della distribuzione dei risultati della misura, traslata del valore x_v. Nel seguito, supporremo questa distribuzione simmetrica

[1] Intendiamo come "valore vero" quello che risulta dalla definizione della quantità che si intende misurare. Ovviamente una definizione non può essere infinitamente accurata, per cui in realtà il concetto il "valore vero" porta con sè un certo grado di indeterminazione. Ipotizzeremo però per semplicità che questa risulti sempre trascurabile rispetto all'incertezza associata alla misura: questa condizione infatti risulta facilmente verificata nella maggior parte dei casi di uso pratico, anche se spesso non è vera in misure di fisica di frontiera. In queste condizioni, è possibile parlare di "valore vero" come se questo fosse univocamente definito.

e a media zero[2]: definiremo come incertezza pertanto una qualsiasi quantità che quantifichi la larghezza di questa distribuzione. La scelta migliore per σ_x (quella consigliata dall'ufficio internazionale per gli standard ISO, e quella adoperata dalla maggior parte delle pubblicazioni scientifiche) è la stima della deviazione standard della distribuzione: $\sigma_x = \sqrt{\left\langle (x - x_v)^2 \right\rangle} = \sqrt{\langle e^2 \rangle}$[3].

In alcuni casi, che dipendono essenzialmente dalle convenzioni utilizzate da chi riporta il risultato, può capitare di trovare riportata come incertezza la massima variazione possibile del valore di x_0, oppure la semilarghezza dell'intervallo centrato intorno ad $x_0$in cui cade una determinata percentuale (solitamente il 68$\%$ o il 95$\%$) dei possibili risultati della misura. Nel seguito assumeremo implicitamente che stiamo adoperando la prima definizione.

La funzione $f(x)$ sarà tipicamente una curva a campana, quasi sempre approssimabile con una gaussiana, anche se risultano frequenti i casi in cui la distribuzione è uniforme, poissoniana o binomiale. Ricordiamo che la funzione gaussiana è una curva a due parametri, pertanto dare la media e la deviazione standard equivale a definirla completamente: nei rari casi in cui l'approssimazione con una gaussiana non risulti soddisfacente, è necessario ricorrere ad una descrizione più accurata della distribuzione, eventualmente introducendo altri parametri.

1.1 Ricette per la determinazione delle incertezze

L'unica ricetta per la determinazione delle incertezze è che ... non esistono ricette. Ogni prescrizione risulta subordinata all'esperienza, alla capacità critica e all'abilità dello sperimentatore.

Nello stimare un errore, uno sperimentatore mette in gioco la propria credibilità: pubblicare incertezze troppo grandi permette di dormire sonni tranquilli, ma produce risultati inutilizzabili; d'altro canto, pubblicare incertezze troppo piccole

[2]Si tratta di restrizioni che coprono la maggior parte dei casi di utilità pratica: ovviamente, però, qualora fosse presente un errore sistematico non corretto l'ipotesi di media zero potrebbe venire a cadere. Supporremo però che il bravo sperimentatore corregga sempre gli errori sistematici, e che l'eventuale correzione avvenga a volte per eccesso, altre per difetto, per cui l'eventuale residuo di errore rimasto dopo la correzione sia comunque a media zero. La simmetria della distribuzione è invece un'ipotesi semplificativa che consente di non appesantire i ragionamenti che seguono: si tratta di una ipotesi che non viene quasi mai realizzata esattamente nella pratica, ma quasi sempre con buona approssimazione. Nei rari casi di distribuzione fortemente asimmetrica sarà possibile una generalizzazione dei concetti che verranno esposti.

[3]nel seguito indicheremo con il simbolo delle parentesi triangolari la media effettuata sulla distribuzione, chiamata anche media della popolazione, mentre la sopralineatura indicherà la media campionaria, ovvero la media effettuata sui dati effettivamente a disposizione.

espone al rischio di una continua e sistematica smentita da parte degli sperimentatori successivi (è anche vero che i Nobel si prendono col secondo metodo.....).

Prendiamo il caso più comune: la lettura di una scala graduata. Ad esempio, un righello diviso in mm. Una regola comune, è quella di approssimare la lettura alla tacca più vicina, prendendo come incertezza mezza divisione, ovvero 0.5 mm[4]. Possiamo individuare facilmente dei casi in cui questa regola fallisce: ad esempio, nella misura di grandezze mal definite, come ad esempio la lunghezza di un pezzo di stoffa (che si allunga o accorcia se non viene distesa con cura), o la distanza tra due oggetti estesi e di forma irregolare. In questi casi per determinare l'incertezza, conviene ricorrere alla propria esperienza, o effettuare diverse misure. Ma la regoletta dà cattivi risultati anche nel caso di condizioni ottimali: se infatti ci troviamo a lavorare con ottima illuminazione, con oggetti molto ben definiti, e senza errori di parallasse, allora possiamo azzardare anche una lettura al decimo di millimetro: però l'ultima cifra risulterà sempre un po' ballerina, e difficilmente otterremo una precisione migliore di due decimi di millimetro.

Da questo si può capire come nella stima di una incertezza un po' di soggettività risulti inevitabile: questo fatto però non deve essere fonte di ansia e di apprensione. La pratica dimostra infatti come una buona stima di σsia difficile da ottenere: nella maggior parte dei casi, si rimarrà entro un fattore 2 dal valore reale. Sarà bene porsi però come obiettivo quello di raggiungere una precisione tra il 10 e il 20%, un valore ragionevole per evitare di inseguire incertezze evasive ed ininfluenti ottenendo allo stesso tempo un risultato utilizzabile.

Sorge sempre il problema di quante cifre decimali utilizzare nel riportare un errore: purtroppo una è troppo poco, e due sono troppe[5]. Diciamo che nel risultato finale una cifra è accettabile, e due sono meglio; nei risultati intermedi conviene portarsi dietro sempre almeno un paio di cifre per evitare di accumulare una eccessiva imprecisione.

Se da una parte è vero che non esistono ricette che consentono una determinazione delle incertezze, è pur vero che esistono delle regole che permettono di evitare errori grossolani, ed esistono anche una serie di casi di facile trattazione che consentono di tracciare una strada lungo la quale muoversi nei vari casi particolari che si presentano allo sperimentatore.

Il consorzio per gli standard ISO divide i metodi per valutare le incertezze in due classi, che vengono comunemente indicate come "di tipo A" e di "tipo B". I metodi di tipo A sono quelli che consentono una stima con metodi statistici applicati ai dati stessi. I metodi di tipo B sono invece quelli che derivano da altri dati, che

[4] questo è in realtà l'errore massimo: la deviazione standard delle misure sarà uguale all'intervallo diviso la radice quadrata di 12: vedi il paragrafo relativo agli strumenti digitali.

[5] lo stesso accade con le donne e i cocktail.

possono essere un insieme di misure indipendenti, o specifiche fornite dal costruttore degli strumenti, o incertezze desunte dalla proprietà dei materiali in esame. A volte una stessa incertezza può essere determinata con metodi di tipo A o B indipendentemente: in questi casi, una eventuale discrepanza può risultare molto utile per individuare possibili problemi o altre fonti di errore. Nel seguito, verrano mostrate alcune delle tecniche di tipo A per la valutazione delle incertezze.

1.2 Verifica di un risultato sperimentale

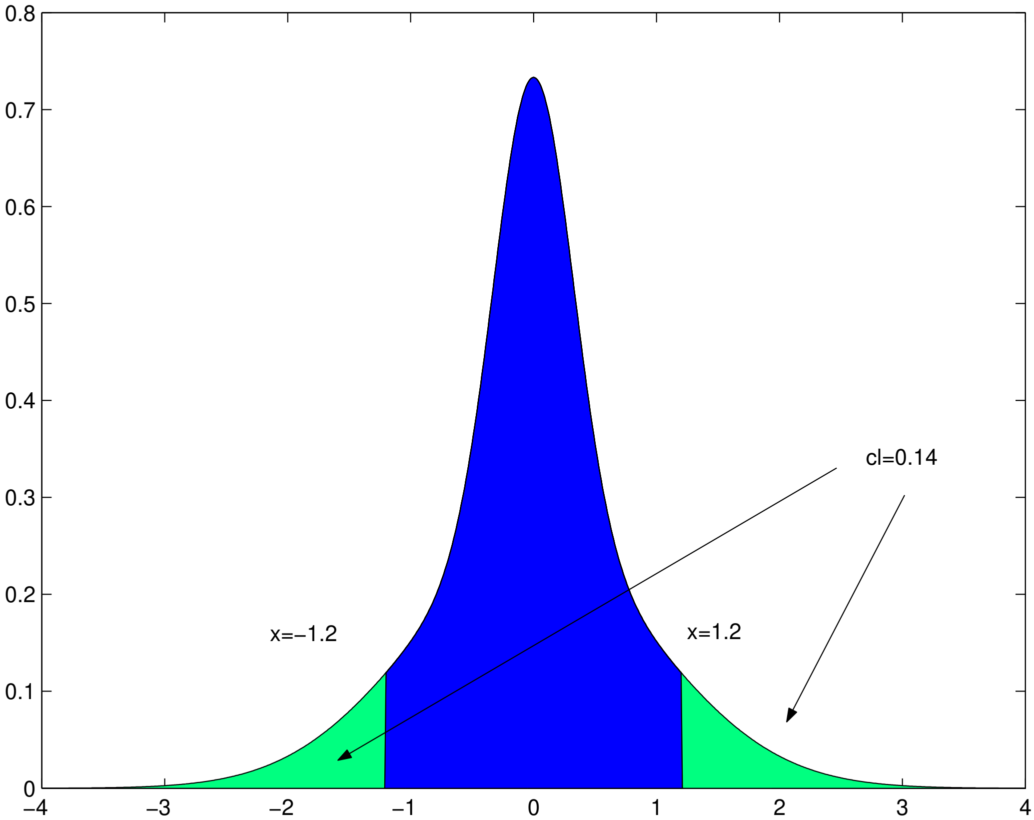
A volte capita di dover confrontare il risultato di una misura con un valore conosciuto a priori, o da una teoria o da una misura più precisa. Il primo caso, ad esempio, si ha quando si vuole verificare l'esattezza di un modello o di una teoria che effettua una predizione molto precisa su una qualche quantità fisica. Il secondo caso è invece molto frequente quando si dispone di uno strumento molto accurato e molto costoso in un unico esemplare (a volte in prestito!) e si vuole verificare l'accuratezza di uno strumento meno costoso o più maneggevole.

Supponiamo quindi di avere effettuato la misura e di avere ottenuto un certo risultato x_0 con deviazione standard σ, mentre il risultato atteso era x_a. La domanda che ci si pone è se la differenza tra il risultato osservato e quello atteso è significativa, ovvero se è indice di una discrepanza tra i due numeri, o se è invece frutto di una semplice fluttuazione statistica. Di solito a questa domanda si cerca di rispondere effettuando un test sulla cosiddetta ipotesi zero: ovvero l'ipotesi che la differenza tra il risultato ottenuto e quello osservato siano dovuti esclusivamente alle fluttuazioni casuali. Bisogna quindi calcolare una quantità p, compresa tra 0 ed 1, e decidere un valore di soglia p_s tale che se $p > p_s$ l'ipotesi viene accettata, altrimenti viene rigettata. Un valore comune per p_s è il 5%, ma è possibile utilizzare anche l'1% o il 10%. Il valore della variabile p può essere calcolato ricorrendo a metodi diversi: il più comune è quello di calcolare la probabilità di ottenere un risultato peggiore di quello osservato, ovvero la probabilità di osservare un valore x che dista da $x_a$più di quanto non disti x_o, ovvero, se la distribuzione di probabilità attesa in base al valore x_a è $f(x; x_a)$, la quantità:

$$p(x_0) = P\left(|x - x_a| > |x_0 - x_a|\right) = \int_{-\infty}^{x_a-|x_a-x_0|} f(x;x_a)dx + \int_{x_a+|x_a-x_0|}^{\infty} f(x;x_a)dx$$

Questa formula, apparentemente complicata, corrisponde nella realtà al calcolo delle due aree mostrate in figura:

Figura 1.1: Esempio di calcolo di p: si supponga di avere uno strumento che effettua delle misure con distribuzione ben conosciuta (non necessariamente gaussiana, ma per semplicità la supporremo simmetrica), e di voler misurare una certa quantità che una data teoria prevede essere uguale a 7. Allora la distribuzione attesa delle misure sarà come quella mostrata in figura. Supponiamo adesso di effettuare la misura, e di trovare il valore 8.20, che dista 1.20 rispetto al valore atteso. La probabilità di ottenere un valore ad una distanza maggiore dal valore previsto risulterà allora uguale all'area evidenziata in verde, nel nostro caso uguale a 0.14.



Nel caso in cui la distribuzione attesa sia uniforme tra $x_a - \Delta/2$e $x_a + \Delta/2$(caso molto frequente, come vedremo, nel caso di strumenti digitali), la variabile p assume la forma:

$$p = 1 - \frac{2\,|x_0 - x_a|}{\Delta} = 1 - \sqrt{12}\frac{2\,|x_0 - x_a|}{\sigma}$$

Un'altro caso importante è quello in cui la funzione $f(x)$ sia gaussiana con media x_a: in tal caso, di solito si preferisce lavorare con la quantità definita come

$$u = \frac{x_0 - x_a}{\sigma}$$

detta residuo standardizzato (o *pull*, in inglese), che è una quantità distribuita in modo gaussiano con media zero e deviazione standard pari ad 1.

In figura1.2 a) viene mostrato p in funzione di $|u|$: si vede che livelli di significatività del 5% corrispondono a $|u| > 1.96$, ovvero ad una differenza tra il valore osservato e quello atteso di circa due deviazioni standard; livelli di significatività dell'1% corrispondo invece a circa 2.5 deviazioni standard di distanza dalla media. Una distanza di 1 deviazione standard corrisponde invece ad un livello di significatività del 32%.

Un modo alternativo, che si potrà estendere a casi più complessi, consiste nell'utilizzare la variabile

$$\chi^2 = \frac{(x_0 - x_a)^2}{\sigma^2}$$

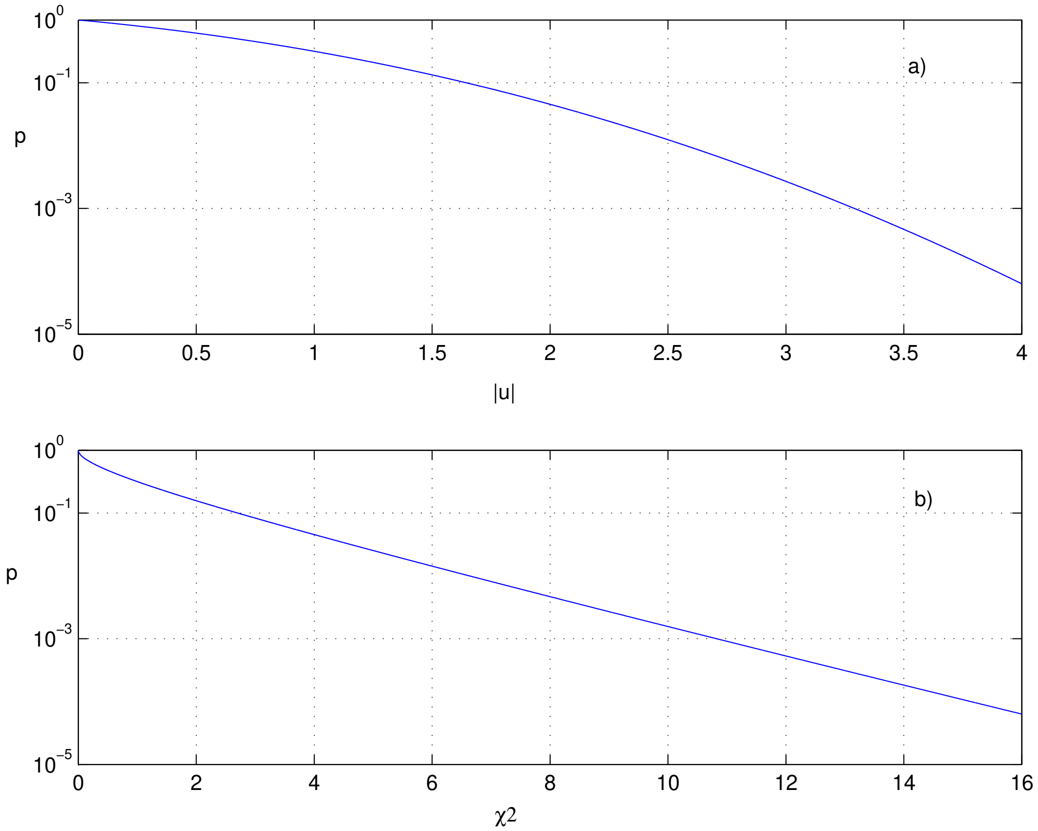
Quest'ultima quantità (si pronuncia chi-quadro, e si utilizza sempre elevata al quadrato) risulta distribuita secondo la funzione:

$$f(\chi^2, 1) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\chi^2}}e^{-\chi^2/2}$$

(Il numero 1 messo tra parentesi sta ad indicare che lavoriamo con una sola misura, o grado di libertà: vedremo più in là perché questa precisazione è necessaria)

L'integrale della funzione tra il valore osservato di χ^2e infinito dà il valore di p dell'ipotesi: in figura1.2 (b è mostrato il grafico di questo integrale. Quindi, ad esempio, una misura che si trova a due deviazioni standard di distanza dalla media ipotizzata ha un χ^2 uguale a 4, e dal grafico si deduce correttamente una significatività per l'ipotesi pari al 5%.

Figura 1.2: Valore di p in funzione del residuo standardizzato $|u|$ (a) e del χ^2(b).



Facciamo un'esempio: il cosiddetto modello standard delle interazioni deboli prevede che la forza con cui il bosone W interagisce con il leptone μsia uguale a quella con cui interagisce col leptone τ.

Il rapporto tra le due forze era stato misurato tramite esperimenti complicati, e risultava nel 1992 pari a 0.970 ± 0.012. Come si vede, la differenza rispetto ad 1 è pari a 2.5 deviazioni standard, che corrisponde ad un valore di χ^2di 6.25. Leggendo le tabelle, si trova un livello di significatività dell'ipotesi che la differenza sia di origine statistica pari all'1.2%. Si tratta di un valore basso, ma non conclusivo: infatti questo test non è l'unico cui sia stato sottoposto il modello standard, e gli altri risultavano invece in buon accordo con la teoria. In casi come questi, in cui un unico test produce risultati negativi, si preferisce solitamente attendere ulteriori dati prima di proclamare una discrepanza tra il modello e i dati. Infatti misure più precise portarono anni dopo ad un rapporto tra le forze pari a 1.002 ± 0.025: stavolta la differenza rispetto ad 1 è uguale a 0.08 deviazioni standard, e l'ipotesi ha un valore di p pari a 0.94: nessuno ormai considera più questo risultato come una difficoltà della teoria.

1.2.1 Probabilità del "valore vero" e intervallo di confidenza

Supponiamo di avere effettuato una misura, e di avere trovato il valore $x_0 \pm \sigma$. Vogliamo capire cosa possiamo dire sul "valore vero" $x_v$della grandezza misurata. il teorema di Bayes, in una delle sue tante forme dice che:

$$P(x_v|x) = P(x|x_v)f(x_v)$$

Questa espressione dice che la probabilità che il valore vero della grandezza fisica misurata sia x_V, una volta osservato x è uguale alla probabilità che aveva x_v prima di effettuare la misura moltiplicata per la probabilità che il valore vero $x_v$produca la misura osservata x_v. [6]

Il primo problema è capire qual'è la forma di $f(x_v)$: non ha molto senso, quello che si dice spesso, che tutte le ipotesi hanno la stessa probabilità prima della misura. Ad esempio, se pesandomi la mattina sulla bilancia leggo 10 Kg, penso

[6] Parlare di "probabilità di un valore vero" crea spesso dei problemi a molti fisici (se il valore è vero, la sua probabilità è 1!). La cosa si risolve naturalmente utilizzando una definizione soggettiva di probabilità, secondo la quale la probabilità di un evento è il grado di fiducia che poniamo nel fatto che questo sia vero. Molti fisici sono disturbati dall'idea di una probabilità non oggettiva, e per questo preferiscono la definizione frequentista di probabilità (per cui la probabilità è il numero di casi favorevoli diviso quelli possibili): ma a questo punto la definizione di intervallo di confidenza richiede dei ragionamenti molto involuti. Per questo motivo, preferiamo adoperare in questo paragrafo dei concetti bayesani.

immediatamente che la bilancia sia rotta. Nella maggior parte dei casi pratici però esiste un largo intervallo in cui tutte le ipotesi sono equiprobabili: ad esempio, un qualunque valore tra 72 Kg e 78 Kg potrebbe risultare un ragionevole risultato della pesata. D'altro canto la funzione $P(x, x_v)$, che non è altro che la distribuzione di probabilità di x con valore "vero" x_v(si pensi, per fissare le idee, ad una gaussiana centrata intorno a x_v) si azzera rapidamente in un intervallo di qualche σ: quindi, se in questo intervallo la probabilità "a priori" di $x_v$rimane costante, il suo valore esatto non ha molta importanza, e si può scrivere semplicemente:

$$P(x_v|x) \propto P(x|x_v)$$

Ovvero, la probabilità dell'ipotesi che la grandezza misurata abbia il valore x_vè proporzionale alla probabilità che il valore $x_v$produca la misura x. La costante di proporzionalità può essere calcolata imponendo che l'integrale su $x_v$risulti uguale ad 1.

Quindi la distribuzione di probabilità del valore vero è ottenibile scambiando x con x_v nella distribuzione di probabilità dei possibili risultati della misura. [7]

Se quindi, ci aspettiamo che il risultato di una misura sia distribuito gaussianamente con larghezza σ intorno al "valore vero", allora una volta effettuata la misura e ottenuto il valore x possiamo concludere che la distribuzione della probabilità del "valore vero" è distribuita gaussianamente intorno a x

A volte, soprattutto nel caso di misure distribuite in modo non gaussiano, si preferisce riportare i cosiddetti intervalli di confidenza: si tratta di intervalli costruiti in modo tale che la probabilità che il valore vero cada all'interno di essi è uguale ad un certo valore specificato c, detto livello di confidenza.

Ad esempio, se abbiamo trovato che il valore vero è distribuito secondo $f(x_v, x_0)$ (simmetrica intorno a x_0), l'intervallo di confidenza a livello c sarà definito dall'equazione[8]:

$$\int_{x_o-\Delta_c}^{x_0+\Delta_c} f(x_v, x_0)dx_v = c$$

[7] Nel caso in cui, come avevamo ipotizzato, la distribuzione di probabilità sia simmetrica intorno al valor medio, allora le due distribuzioni hanno la stessa forma, ma sono centrate rispetto ad x_ve ad x rispettivamente. Se la distribuzione è asimmetrica, allora risulterà invertita specularmente.

[8] Se la distribuzione è asimmetrica, allora anche l'intervallo di confidenza sarà asimmetrico: si utilizza allora l'intervallo $[x_0 - \Delta_c^-, x_0 + \Delta_c^+]$ con $\Delta_c^\pm$definite da:

$$\int_{x_0-\Delta_c^-}^{x_0} f(x_v, x_0)dx_v = \frac{c}{2}, \quad \int_{x_0}^{x_0+\Delta_c^+} f(x_v, x_0)dx_v = \frac{c}{2},$$

Ad esempio, se f è gaussiana di larghezza σ, sappiamo che il suo l'integrale nell'intervallo $[x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]$ è pari circa a 0.68: potremo dire allora che il valore vero giace in quell'intervallo al 68% di livello di confidenza; l'intervallo al 95% sarà invece $[x_0 - 2\sigma, x_0 + 2\sigma]$. Dire pertanto che il risultato di una misura gaussiana è $x_0 \pm \sigma$ equivale pertanto a dare l'intervallo di confidenza al 68%.

1.3 Metodi di trattamento delle incertezze sperimentali

1.3.1 Contributi all'errore provenienti da sorgenti diverse

L'errore in una misura può essere dovuto a diverse cause, e l'incertezza finale da attribuire al risultato deriva dalla corretta combinazione di essi. Supponiamo di avere una determinata misura in cui il risultato finale risulta influenzato da N effetti, e ciascuno contribuisce con un errore e_i. Allora, l'errore totale sarà:$e = \sum_{i=1}^{N} e_i$

$$\sigma^2 = < e^2 > = \left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} e_i \right)^2 \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \langle e_i e_k \rangle = \sum_{k=1}^{N} \langle e_i^2 \rangle = \sum_{k=1}^{N} \sigma_i^2 \tag{1.1}$$

Questa è la formula detta somma quadratica degli errori: ovvero, nel combinare errori diversi, si sommano le varianze, e non le deviazioni standard. È stata ricavata supponendo che $< e_i e_j >= 0$, ipotesi ragionevole che corrisponde ad errori scorrelati (vedi oltre).

A volte, nel riportare l'incertezza di una misura, è bene identificare e separare le varie sorgenti di errore, allo scopo di determinare se e quali è possibile eliminare o ridurre con opportuni accorgimenti.

Facciamo un esempio: supponiamo di effettuare la misura di una lunghezza tramite un comune righello di plastica. Le tipiche sorgenti di errore sono:

- Precisione nella lettura dei decimi di mm: tipicamente, dell'ordine di 2 decimi di mm.

- Errore di parallasse: può essere stimato muovendo leggermente la testa: un valore tipico è di circa 2 decimi di mm.

- Errore nel posizionamento dello zero del righello: può essere stimato muovendo leggermente il righello avanti ed indietro. Tipicamente sarà minore dell'errore di lettura, e quindi supporremo 0.1 mm.
- Errore di calibrazione del righello: può essere verificato confrontando il righello con un'altro di metallo più preciso: sarà dell'ordine di 0.5 mm su 20 cm, ovvero dell'ordine dello 0.25%

In queste condizioni, l'errore nella misura di una lunghezza dell'ordine del cm sarà circa:

$$\sigma = \sqrt{0.2^2 + 0.2^2 + 0.1^2 + 0.025^2} = \sqrt{0.04 + 0.04 + 0.01 + 0.000625} = 0.30$$

Esaminando il risultato si vede come l'errore sulla calibrazione sia il più piccolo, e quindi ininfluente: è inutile procurarsi un righello più costoso per una misura migliore. L'errore di zero è sempre più piccolo di quello di lettura, e possiamo quindi dimenticarcene. Gli errori più grandi sono quelli dovuti alla precisione di lettura e all'errore di parallasse: ma mentre sul primo si può far poco, il secondo si può ridurre a zero se si riesce ad avvicinare il più possibile la scala di lettura all'oggetto da misurare.

Supponendo quindi di riuscire a migliorare l'allineamento, possiamo quindi ipotizzare di riuscire a ridurre l'incertezza di misura fino a raggiungere la risoluzione dovuta al solo errore di lettura.

In coda, notiamo come, nel caso in cui l'errore derivi da molte cause indipendenti che contribuiscono con lo stesso ordine di grandezza, allora per il teorema del limite centrale la distribuzione finale degli errori sarà con buona approssimazione gaussiana; nel caso in cui invece un solo errore domini sugli altri, allora la distribuzione finale rifletterà la distribuzione dell'errore dominante.

1.3.2 Propagazione degli errori

Se desidero calcolare una quantità fisica y a partire da una quantità misurata $x = x_0 \pm \sigma_x$ tramite la relazione: $y = Y(x)$, allora, nell'ipotesi in cui la funzione Y risulti lineare in un intervallo di ampiezza di qualche $\sigma_x$intorno a x_0, allora anche y risulterà distribuita secondo la stessa legge di x, ma con media $y_0 = Y(x_0)$ e varianza $\sigma_y = \left|\frac{dY}{dx}\right| \sigma_x$.

Attenzione a questo punto: le ipotesi non risultano mai banalmente verificate. Un caso frequente risulta essere quello in cui ci si trova in prossimità di un minimo della funzione Y, ad esempio se $x = 0.1 \pm 0.3$, $y = x^2$. In questo caso, una applicazione cieca della formula sopra porterebbe a $y = 0.01 \pm 0.06$, risultato chiaramente assurdo in quanto y è per definizione sempre positivo; inoltre se si calcola il valor medio di y senza adoperare alcuna approssimazione, si trova:$y_0 =< y >=< x^2 >=< x^2 - x_0^2 > +x_0^2 = x_0^2 + \sigma_x^2 = 0.01 + 0.09 = 0.1$, e quindi il valor medio di y risulta molto più grande del quadrato del valor medio di x [9]!

1.3.3 Somma degli errori:

Un caso molto frequente è quello in cui la quantità da calcolare y dipende da più variabili misurate $x_i = x_{0i} \pm \sigma_i$ tramite una funzione a più variabili: $y = Y(x_1, ..., x_N)$.

In questo caso, sempre nel caso in cui siano state verificate le ipotesi di linearità della funzione Y, allora y è distribuita intorno al valor medio $\overline{y} = y_0 = Y(x_{01}, ..., x_{0N})$, con deviazione standard data dalla formula:

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{dY}{dx_i} \right)^2 \sigma_i^2 \tag{1.2}$$

Questo risultato, cui ci si riferisce comunemente come somma quadratica degli errori, è il modo corretto di calcolare la deviazione standard su una grandezza derivata y, nel caso in cui gli errori su x siano indipendenti. Il valore assoluto della derivata $\left| \frac{dY}{dx_i} \right|$ è detta sensibilità di y rispetto alla variabile x_i; Se tutte le sensibilità sono uguali ad 1, allora l'equazione1.2 si riduce alla formula 1.1.

Attenzione: in generale le variabili x_i avranno distribuzioni di tipo diverso tra di loro e la variabile y avrà quindi una distribuzione molto complessa. Tuttavia, a causa del teorema del limite centrale, se il numero di variabili a disposizione è

[9] Può essere utile dare un parametro quantitativo per verificare le ipotesi. L'idea è che il termine quadratico dello sviluppo di Taylor della funzione Y deve risultare minore del termine lineare in un intervallo di larghezza circa $3\sigma_x$intorno al valore di x_0, e quindi:

$$\frac{1}{2} \left| \frac{d^2Y}{dx^2}(x_0) \right| (3\sigma_X)^2 << \left| \frac{dY}{dx}(x_0) \right| 3\sigma_x$$

da cui, approssimando i fattori numerici,

$$\left| \frac{d^2Y}{dx^2}(x_0) \right| \sigma_X / \left| \frac{dY}{dx}(x_0) \right| << 1$$

Si verifica immediatamente che nell'esempio proposto questo non è vero.

sufficientemente grande, quest'ultima distribuzione potrà essere ben approssimata da una gaussiana.

Un caso importante si ha quando la funzione Y è del tipo:

$y = (x_1)^{n_1} \cdot (x_2)^{n_2} \cdot ... \cdot (x_N)^{n_N}$

In questo caso, si ha una versione semplificata della formula di cui sopra:

$$\left(\frac{\sigma_y}{y_0}\right)^2 = \Sigma_{i=1}^N \left(n_i \frac{\sigma_i}{x_{0i}}\right)^2 \tag{1.3}$$

Ovvero: qualora la dipendenza è una legge di potenza, allora gli errori percentuali sulle x_i, pesati con i corrispondenti esponenti, si sommano quadraticamente per dare l'errore percentuale su y.

Esempi pratici: Supponiamo $y = x_1 + x_2$.

Si avrà quindi $\sigma_y = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

Poniamo ad esempio $x_1 = 200 \pm 10$, $x_2 = 30 \pm 2$.

Applicando le formule, si ha $y = 230 \pm 10$.

Come si, vede, è solo l'errore più grande che conta: il contributo dell'errore più piccolo influenza il risultato finale solamente per il 2%.

Questo ci offre una prima indicazione pratica: nell'effettuare un primo calcolo degli errori, è possibile trascurare quelli più piccoli, finché questi restano inferiori a circa 2/3 del più grande.

Una seconda informazione pratica, di maggiore importanza è che nella somma di due errori, il valore esatto del più piccolo è meno importante, purché rimanga inferiore a circa 2/3 del più grande. Quindi nell'esempio considerato possiamo concentrare i nostri sforzi (e i nostri soldi, e il tempo a disposizione) per ottenere un valore accurato di x_1e σ_1, mentre possiamo accontentarci di una determinazione grossolana di x_2e σ_2.

Un altro esempio: Sia $y = x_1 x_2^3$,con $x_1 = 12.04 \pm 0.36$, e $x_2 = 1.01 \pm 0.03$.

Stavolta, potrebbe apparire a prima vista che l'errore più grosso sia quello relativo ad x_1: in realtà, si vede subito che percentualmente gli errori su $x_1$ed $x_2$sono uguali (al 3% circa). Inoltre, nella formula, x_2è elevato al cubo, per cui l'errore percentuale influisce tre volte sull'errore di y: si ha infatti:

$$\frac{\sigma_y}{y} = \sqrt{(0.03)^2 + (3 \times 0.03)^2} = 0.03 \cdot \sqrt{(1+9)} \simeq 0.09$$

Quindi in questo caso le nostre attenzioni vanno indirizzate verso una determinazione ottimale di x_2e di σ_2 (en passant, possiamo notare come la formula proposta non sia un semplice esercizio teorico: infatti è quella che utilizzeremmo per calcolare la massa di un cubo di lato $x_2$composto di materiale con densità x_1).

1.3.4 Confronto tra due misure.

Supponiamo di effettuare due misure della stessa quantità, con due diversi apparati sperimentali, su due campioni diversi, o in condizioni sperimentali leggermente diverse, ottenendo i risultati:

$$x_1 \pm \sigma_1 \quad x_2 \pm \sigma_2$$

Vogliamo capire se in basi ai due risultati possiamo dire che le due quantità fisiche hanno lo stesso valore.

L'idea di base è che se le due variabili x_1 ed x_2 appartengono a due diverse distribuzioni, ma con la stessa media, allora il valor medio della differenza $x_1 - x_2$deve risultare uguale a zero. Inoltre la deviazione standard della differenza si deve poter ottenere come somma quadratica delle deviazioni standard delle due variabili, secondo la formula 1.2.

Nel seguito supporremo inoltre che le due misure siano distribuite in modo gaussiano intorno alla media: allora anche la differenza sarà distribuita secondo una gaussiana. Mettendo insieme tutte queste osservazioni, giungiamo alla conclusione che, definita Δ la differenza tra le due misure, nell'ipotesi in cui esse derivino da una stesso valore "vero", allora questa è una variabile distribuita gaussianamente con media zero e deviazione standard

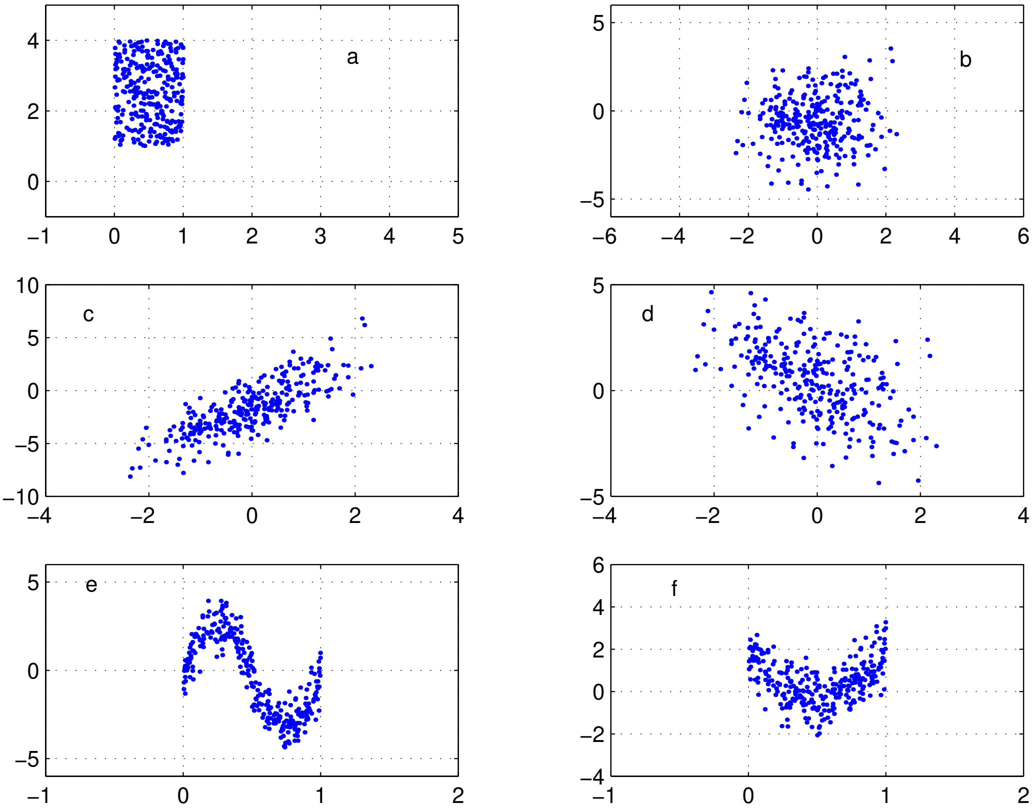
$$\sigma_\Delta = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

A questo punto è possibile testare l'"ipotesi zero" utilizzando i metodi esposti nel paragrafo 1.2.

1.3.5 Misure correlate

Per una definizione probabilistica del concetto di correlazione tra due variabili casuali rimandiamo ai testi specialistici: in questo testo siamo interessati soltanto ad una definizione pratica. Intuitivamente dire che due variabili casuali sono correlate vuol dire che il valore osservato di una delle due variabili dipende, almeno

Figura 1.3: Esempi di scatter plot: nei plot a) e b) le variabili sono scorrelate; in b) esiste una correlazione lineare positiva, in d) la correlazione è lineare e negativa. I casi e) ed f) corrispondono a correlazioni non lineari.



in senso statistico, dal valore osservato dell'altra. Per determinare se esiste una qualche relazione tra i risultati di una serie di coppie di misure x_1e $x_2$di due grandezze fisiche X_1ed X_2possiamo effettuare il cosiddetto "scatter plot": si tratta di un grafico per ogni coppia di misure viene riportato un punto in corrispondenza dell' ascissa x_1e dell'ordinata x_2. Se le coppie di misure sono scorrelate, i punti si distribuiranno secondo un cerchio, od un quadrato, oppure un'ellisse con gli assi maggiori paralleli agli assi cartesiani, o rettangoli con i lati paralleli agli assi. Se invece le misure sono correlate, allora i punti si disporranno secondo una ellisse inclinata rispetto agli assi, o intorno ad una linea. Diciamo che se la figura che si forma nello scatter plot ha due assi di simmetria, e questi assi di simmetria sono orientati parallelamente agli assi, le variabili sono scorrelate. Un esempio si può trovare in figura 1.3.

I risultati di due misure possono però essere correlati o perché sono correlate le grandezze fisiche misurate, oppure perché sono correlati gli errori di misura. Nel caso di correlazione tra due grandezze fisiche, esiste una qualche legge fisica che lega necessariamente le grandezze X_1e X_2: ad esempio, la lunghezza ed il periodo di un pendolo, l'altezza di caduta di un grave e il tempo di caduta. Nel caso di correlazioni tra errori invece quello che accade è che effettuando due misure di due quantità indipendenti allora l'errore effettuato su di una delle misure è in qualche modo legato all'errore che si effettua nella seconda misura. Il caso più semplice e più comune è l'errore di zero di uno strumento: questo risulta identico in tutte le misure effettuate con lo stesso strumento, a meno che questo non venga ritarato ogni volta. Si riconosce in questo esempio la caratteristica specifica degli errori sistematici: infatti il problema di correlazione tra le misure è strettamente legato a quello del corretto trattamento degli errori sistematici.

La correlazione tra due errori di misura può spesso risultare difficile da distinguere rispetto alla correlazione fisica, e può risultare una delle fonti di errore sistematico può sottile e difficile da valutare ed eliminare.

Facciamo un esempio pratico: vogliamo costruire un oggetto riunendo due pezzi assieme. Pesiamo il primo pezzo tramite una bilancia e troviamo 931.5 ± 1.4 g, dove l'errore di 1.4 g è dovuto in eguale misura all'errore di lettura (1 g) e all'errore di taratura (1 g). Misuriamo nello stemmo modo il secondo pezzo, e troviamo 1015.5 ± 1.4g. Quale sarà la massa totale dell'oggetto? La risposta ottenuta sommando le due misure con le ricette di cui sopra dà come risultato: 1947.0 ± 2.0g. Ma questo metodo è sbagliato! Infatti l'errore di taratura andrà nello stesso verso per entrambi gli oggetti, e quindi sarà pari a 2 g, ai quali andranno aggiunti (stavolta in quadratura) i due errori di misura di 1 g ciascuno. Il risultato corretto sarà quindi $m = 1947.0 \pm \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = 1947.0 \pm 2.4$g. Se la differenza è piccola, nel caso della somma di due sole misure, può diventare enorme quando si sommano molte misure contemporaneamente.

Un'altro esempio: si supponga stavolta di voler misurare il seno di un'angolo, misurando l'ipotenusa e il cateto di un triangolo cui l'angolo appartiene. L'ipotenusa risulta uguale a 102.5 ± 0.3mm, di cui 0.2mm sono costituiti dall'errore di lettura, e 0.2mm da quello di calibrazione del righello; Il cateto risulta invece 62.5 ± 0.3mm.

Applicando le formule senza pensare, si trova:$\sin\theta = 0.6098 \pm 0.0034$. Ma anche stavolta la correlazione tra le misure riserva delle sorprese, anche se più piacevoli: infatti, l'errore di calibrazione si cancella esattamente nell'effettuare il rapporto tra i due lati, e quindi non bisogna tenerne conto nel calcolo dell'incertezza.

Il risultato finale sarà quindi: $\sin\theta = 0.6098 \pm 0.0023$.

Fino ad adesso, abbiamo considerato la correlazione tra due misure omogenee, come due pesi o due lunghezze: però bisogna ricordare che anche due misure completamente differenti possono avere errori correlati: ad esempio, se si misura la lunghezza e la resistenza di un cilindretto di rame alla temperatura di 300°K, bisogna tenere conto che nel caso in cui la temperatura non sia stata determinata accuratamente una sua deviazione da quella nominale porterebbe ad una variazione sia della lunghezza che della resistenza del campione, e le variazioni sarebbero entrambe positive per aumenti della temperatura.

Date due variabili casuali x_1 e x_2, una quantità utilizzata per valutare l'entità della correlazione è il cosiddetto coefficente di correlazione lineare, definito come $r = \frac{\langle (x_1 - \langle x_1 \rangle)(x_2 - \langle x_2 \rangle) \rangle}{\sigma_1 \sigma_2}$, che, nel caso in cui le variabili casuali siano due errori $e_1$ed e_2, a media zero, si scrive nella forma di più immediata lettura: $r = \frac{\langle e_1 e_2 \rangle}{\sigma_1 \sigma_2}$. Questa quantità è compresa tra -1 $+1$: $r = 1$ significa correlazione perfetta, ovvero $e_1 - = e_2$, mentre $r = -1$ significa anticorrelazione perfetta, ovvero $e_1 = -e_2$. Correlazione zero significa che le due grandezze non sono correlate linearmente[10]

Un valore positivo della correlazione significa che ad un dato valore di $e_1$corrisponde un valor medio di e_2 dello stesso segno, mentre correlazione negativa corrisponde ad un segno opposto.

Quindi, se si effettuano due misure di due quantità $x_1$ed x_2 la probabilità di ottenere un certo valore per $x_2$dipende dal valore ottenuto per x_1.

È possibile attribuire un significato fisico al rapporto di correlazione: infatti, si supponga di prendere tutte le misure in cui l'errore $e_1$sia esattamente uguale alla deviazione standard σ_1. Allora, prendendo la media su questo campione ridotto di misure, si avrebbe:$r = \frac{<e_2>}{\sigma_2}$,da cui $< e_2 >= r\sigma_2$. Ovvero, un errore di 1 deviazione standard nella misura di $x_1$porta ad un errore medio di r deviazioni standard nella misura di x_2. La relazione è simmetrica, per cui è vero anche l'inverso.

Per determinare la propagazione degli errori nel caso più semplice, in cui una grandezza y dipende solamente da due grandezze $x_1$ed $x_2$correlate, si può procedere nel modo seguente: si esprime dapprima l'errore su y rispetto agli errori su $x_1$ed x_2,in approssimazione lineare:

$$e_y = \frac{dY}{dx_1} e_1 + \frac{dY}{dx_2} e_2$$

Calcolando la deviazione standard, si ottiene:

[10]ma potrebbero essere correlate non linearmente! Questo è un caso che raramente si verifica nella pratica, ma che va tenuto sempre presente perché non è irrealistico, e ogni tanto può capitare. Un esempio è il caso di due variabili casuali $e_1 = \cos\phi$, $e_2 = \sin\phi$, dove ϕ è una variabile casuale distribuita uniformemente nell'intervallo $[0, 2\pi]$: è evidente che le due variabili sono legate dalla relazione $e_1^2 + e_2^2 = 1$, eppure il coefficente di correlazione lineare risulta uguale a zero. Nel linguaggio comune, si tende a sopprimere l'aggettivo lineare e si parla semplicemente di coefficente di correlazione.

$$\sigma_y^2 = \left\langle \left(\frac{dY}{dx_1} e_1 + \frac{dY}{dx_2} e_2 \right)^2 \right\rangle = \left(\frac{dY}{dx_1} \right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{dY}{dx_2} \right)^2 \sigma_2^2 + r \frac{dY}{dx_1} \frac{dY}{dx_2} \sigma_1 \sigma_2 \tag{1.4}$$

Il termine aggiuntivo può essere positivo o negativo, a seconda del segno di r e del segno delle derivate, ma in ogni caso (si può verificare facilmente) l'espressione complessiva risulterà positiva.

Purtroppo, determinare il coefficente di correlazione non è mai un compito semplice, e spesso di preferisce valutare il suo ordine di grandezza tramite semplici stime: del resto, a meno che non risulti pericolosamente vicino ad 1, il suo valore esatto risulta spesso poco importante.

1.4 Combinazione di più misure

1.4.1 Serie di misure con uguali incertezze

Supponiamo di avere effettuato una serie di misure della stessa quantità incognita, e di avere ottenuto una serie di valori. Supponiamo che le misure siano state ottenute tutte nelle stesse identiche condizioni, e di sapere che la distribuzione delle misure sia la stessa per tutte, con media μe deviazione standard σ. Allora:

- una stima di μsi ottiene prendendo la media semplice delle misure :

$$\mu \simeq \overline{x} = \frac{\sum_i x_1}{N} \tag{1.5}$$

- una stima di σsi ottiene prendendo la deviazione standard delle misure:

$$\sigma \simeq s = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}{N-1}} \tag{1.6}$$

- la media semplice delle misure $\overline{x}$ è una variabile casuale, che risulta distribuita con la stessa media μe deviazione standard $\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$: una stima di $\sigma_{\overline{x}}$a partire dai dati sarà quindi la quantità

$$\sigma_{\overline{x}} \simeq s_{\overline{x}} = \frac{s}{\sqrt{N}} \tag{1.7}$$

- Anche la stima di σsoffre ovviamente di una incertezza. Nel caso in cui le misure siano gaussiane, l'errore percentuale è approssimabile con la formula:

$$\frac{\sigma_s}{s} = \frac{1}{\sqrt{2(N-1)}} \tag{1.8}$$

Si noti che, anche nel caso in cui le misure x_i non siano distribuite in modo gaussiano, a causa del teorema del limite centrale la distribuzione della media $\overline{x}$ sarà approssimabile con una gaussiana tanto meglio quanto più è grande il valore di N.

Si supponga di misurare più volte una stessa grandezza fisica X, nelle stesse identiche condizioni sperimentali, ottenendo una serie di valori x_i. Si supponga di non avere alcuna stima dell'errore sperimentale, o di averne una approssimativa e non affidabile. In questo caso, il miglior valore della quantità misurata si ottiene effettuando la media semplice delle misure, mentre l'errore su ogni singola misura sarà ottenuto dalla deviazione standard delle misure; l'errore sulla media si otterrà dividendo quest'ultimo risultato per la radice quadrata del numero di misure.

Primo esempio Si supponga di effettuare 10 misure della stessa quantità e di ottenere le misure riportare in tabella:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.98	0.72	1.34	0.90	1.18	1.37	1.02	1.01	0.81	0.83

Si verifica rapidamente come la media di queste misure risulta essere uguale a 1.016, con una deviazione standard di 0.22, quest'ultima calcolata con una incertezza del 24% .

Possiamo quindi assumere che la risoluzione della singola misura sia intorno a 0.2: sarebbe bene confrontare questo dato con quello che sappiamo sull'apparato sperimentale, per evitare di ottenere dati sballati o incoerenti. Se la risoluzione di 0.2 appare ragionevole, possiamo quindi calcolare il valore dell'errore sulla media dividendo per la radice quadrata del numero di misure, cioè 10, e arrotondare il risultato tenendo conto dell'errore: si ottiene infine

$\overline{x} = 1.02 \pm 0.07$

Secondo esempio Stavolta si effettua la misura con un apparato ben conosciuto di risoluzione nota pari a 0.2, ottenendo le misure:

1	2	3
1.02	0.78	1.38

La media è 1.06 e la deviazione standard è pari a 0.30, con una incertezza di circa il 50%.

Come si vede, il valore della deviazione standard stimato dai dati coincide con quello della risoluzione entro l'incertezza. Solamente che stavolta, in base alle nostre conoscenze, l'incertezza stimata a priori risulta più affidabile di quella ottenuta calcolando la deviazione standard di sole 3 misure! Quindi una stima migliore del risultato si ottiene utilizzando la risoluzione nota dell'apparato, e dividendo per la radice quadrata di 3:

$\overline{x} = 1.06 \pm 0.11$

Ingenuamente si potrebbe pensare di aumentare il numero di misure in modo da ottenere una stima migliore sia dell'errore che del risultato finale: si ricordi però che ogni misura costa sia tempo che soldi, e a volte passare da 3 a 6 dati per ottenere un misero aumento di un fattore $1/\sqrt{2}$ nella precisione della conoscenza dell'errore o può risultare improponibile (si pensi ad esempio ai dati ottenuti dall'esplosione di una supernova, o ad una reazione prodotta in media una volta in un mese di tempo di funzionamento di un acceleratore).

Terzo esempio Stavolta si effettuino le misure tramite uno strumento digitale, che produce in uscita un numero composto da tre cifre, ottenendo dieci volte lo stesso risultato:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12

Una applicazione stupida delle formule porterebbe a concludere che la migliore stima del valore misurato è $x = 0.12 \pm 0$. Ovviamente si tratta di un risultato paradossale: il motivo sta nel fatto che l'arrotondamento delle misure imposto dal numero limitato di cifre a disposizione risulta più grande di qualsiasi altro effetto casuale che possa andare a disturbare la misura. Casi come questo richiedono un trattamento particolare, che sarà discusso in un prossimo capitolo. Per ora, ci limitiamo a notare come nell'esempio proposto la prima cifra risulti sempre uguale a zero: per migliorare la risoluzione del risultato basterebbe cambiare, se possibile, la scala di misura dello strumento.

1.4.2 Strumenti a lettura discreta

Gli strumenti a lettura discreta, i più comuni dei quali sono quelli digitali, non forniscono in uscita una scala graduata, bensì un display con un certo numero di cifre significative (solitamente tre), che approssimano il valore misurato al più vicino esprimibile tramite le cifre a disposizione. L'operazione di approssimazione, essendo una operazione non lineare, introduce tutta una serie di difficoltà di cui è bene essere coscienti.

Vediamo un esempio: si supponga di avere un display a N cifre, senza virgola (questo per fissare le idee). Allora la minima differenza tra due misure sarà di 1 unità, mentre il massimo valore leggibile sul display sarà quello ottenibile quando tutte le cifre sono 9 (questo è detto valore di fondo scala, e sarà indicato con x_{fs}), cioè $10^N - 1$: potremo dire allora che lo strumento possiede una precisione intrinseca di circa $1/10^N$: per tre cifre significative, ad esempio, si ha una parte su mille. Questa ovviamente è la precisione ottenuta quando lo strumento legge un valore che è prossimo al massimo: per valori minori, la precisione percentuale diminuisce. Di solito gli strumenti digitali hanno la possibilità di variare il valore di fondo scala (quello che si vede è che si sposta la posizione della virgola girando una manopola): una prima buona regola quindi è quella di adoperare gli strumenti in modo tale che il valore misurato risulti il più vicino possibile al valore di fondo scala. Con un fondo scala arbitrario, la risoluzione intrinseca risulta quindi $\Delta = x_{fs}/10^N$

L'operazione di troncamento introduce evidentemente un errore: si tratta però di un errore di tipo strano, che non ha un comportamento casuale, bensì pseudocasuale. Infatti l'errore introdotto dal troncamento può essere positivo o negativo con eguale probabilità quando si effettuano misure di grandezze diverse, che possono assumere valori distribuiti con continuità nell'intervallo di funzionamente dello strumento. L'errore in questo caso si può considerare una variabile casuale, a media zero, distribuita uniformemente nell'intervallo $\pm\Delta/2 = \pm\frac{1}{2}x_{fs}/10^N$, e quindi con varianza $\sigma_t = \Delta/\sqrt{12} = x_{fs}/(\sqrt{12} \cdot 10^N)$.

Quando però si effettuano ripetute misure della stessa quantità, ovvero quando si misurano grandezze che variano molto poco (meno della minima variazione rilevabile dallo strumento), allora l'errore di arrotondamento viene ad avere sempre lo stesso valore, cosa che è il comportamento caratteristico degli errori sistematici!

All'errore di troncamento vanno sommate ovviamente tutte le altre incertezze casuali che concorrono alla misura. Bisogna ricordare però che l'errore di troncamento interviene sempre al termine del processo di misura! Pertanto, se i disturbi casuali sono piccoli rispetto all'errore di troncamento (quindi la loro deviazione standard σ_c è molto minore di σ_t), il loro effetto è trascurabile. Se invece sono più grandi, allora il loro effetto si somma in quadratura a quello del troncamento. Quindi l'errore statistico avrà la forma $\sigma = \sqrt{\Delta^2/12 + \sigma_c^2}$.

Possiamo quindi cominciare a tracciare delle linee di comportamento nella stima degli errori:

- qualora si effettuino diverse misure di grandezze diverse fortemente variabili tra di loro, allora si può assumere tranquillamente che gli errori siano scorrelati e assumere una deviazione standard pari a σ_t. [11]

- qualora si effettuino più misure di una stessa grandezza, o di grandezze poco variabili tra di loro, ottenendo risultati sempre uguali, o che variano raramente al massimo di una cifra decimale, allora gli errori risultano fortemente correlati. In questi casi, effettuare una media non serve a nulla, e l'errore rimane sempre uguale a quello sulla singola misura.

- qualora invece effettuando diverse misure della stessa grandezza si ottengono risultati variabili con una deviazione standard σallora è ragionevole calcolare la media ed attribuire al risultato un'incertezza pari a $\sigma/\sqrt{N}$.

Quest'ultima proprietà porta a delle coseguenze apparantemente bizzarre: infatti talvolta, per migliorare la precisione della misura, si aggiungono dei disturbi casuali e poi si prende la media di diverse misure. In questo modo si riescono ad ottenere in linea di principio precisioni arbitrarie, con il risultato paradossale che l'aggiunta di un errore casuale porta in definitiva ad una diminuzione dell'incertezza[12].

1.4.3 Media pesata

Spesso capita di dover combinare misure effettuate con strumenti e precisioni diverse, e quindi con incertezze σ_i anche sensibilmente diverse tra di loro. In questi casi, la media semplice non dà un buon risultato in quanto considera tutte le misure allo stesso modo. Si preferisce allora effettuare la media pesando le misure con una funzione decrescente delle incertezze: in questo modo, le misure peggiori ricevono un peso minore, e viceversa. Il caso più comune è quello in cui i pesi sono uguali all'inverso delle incertezze al quadrato:

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

La media si calcola allora con la formula:

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i/\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{N} 1/\sigma_i^2}$$

[11] Se l'ultima cifra risulta ballerina, conviene aumentare l'incertezza almeno fino a mezza divisione, ovvero $\Delta/2$.

[12] Questa tecnica viene indicata col termine inglese *dithering*.

Una giustificazione di questa scelta la troveremo nei prossimi capitoli.

Applicando la formula della propagazione degli errori, possiamo calcolare l'errore su x_0

$$\sigma_{x_0}^2 = \sum_i \left(\frac{\partial x_0}{\partial x_i}\sigma_i\right)^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N 1/\sigma_i^2}$$

Si può verificare come l'incertezza su $x_0$calcolata con questa formula risulti minore della più piccola delle incertezze sulle singole misure.

1.4.3.1 Un piccolo trucco operativo.

Spesso in laboratorio non si dispone di un calcolatore, ma solamente di carta e penna o nel migliore dei casi di una calcolatrice tascabile.

In questi casi, per calcolare la media pesata delle misure il modo migliore è quello di creare un foglio di calcolo, ovvero una tabella che aiuta nell'effettuare i conti. In questa tabella nella prima colonna vanno riportate le misure e nella seconda gli errori. A questo punto nella terza colonna si calcolano i pesi, definiti come $w_i = 1/\sigma_i^2$, e nella quarta il prodotto dei pesi per le misure $w_i \cdot x_i$.

Si sommano a questo punto i contenuti della terza e della quarta colonna: il valor medio corrisponde al rapporto tra queste due ultime quantit\'a, e l'errore sul valor medio all'inverso della radice quadrata della somma dei contenuti della terza colonna.

Esempio:

x_i	σ_i	$w_i = 1/\sigma_i^2$	$w_i \cdot x_i$
1.10	0.05	400	440
1.3	0.15	44	58
1.21	0.10	100	121
1.07	0.10	100	107
1.15	0.10	100	115
1.00	0.10	100	100
1.4	0.5	4	6
		$\sum w$ =848	$\sum w \cdot y$ =946

$$x_0 = \frac{\sum w \cdot x}{\sum w} \quad \pm \quad \frac{1}{\sqrt{\sum w}} = \frac{946}{848} \pm \frac{1}{\sqrt{848}} 1.115 \pm 0.034$$

Questo metodo permette di individuare immediatamente possibili errori e correggerli con poco sforzo.

13

1.4.4 È lecito buttar via le misure?

Questa è una delle domande che vengono rivolte più di frequente, ed è anche il quesito che ha turbato più di una notte ai fisici sperimentali (quelli onesti).

Le risposte vanno dal dogmatico (le misure non si buttano mai per nessun motivo) al praticone (butta via tutto quello che sta tre sigma fuori la media), ma, come sempre in questi casi, la risposta dipende dalla sensibilità dello sperimentatore e da altri fattori di contorno. Allo scrivente sembra inutile portarsi dietro delle misure chiaramente malfatte e fuori controllo; d'altro canto, non è nemmeno il caso di buttar via delle misure senza aver chiaro quali sono i motivi che hanno contribuito ad errori così grossi.

Anche in questo caso la sensibilità personale dello sperimentatore gioca un ruolo fondamentale. Come linee guida, nel caso in cui abbiano a disposizione poche misure, e se la loro media costituisce un risultato fondamentale, allora è bene riportare i valori delle misure che sono state eliminate, spiegare perché sono state eliminate, e possibilmente riportare il risultato che si sarebbe ottenuto se fossero state incluse. Bisogna comunque evitare assolutamente di eliminare i dati senza dire niente[14].

Un caso molto frequente che si incontra nella pratica è quello in cui si hanno a disposizione una mole enorme di dati, raccolti ed elaborati automaticamene da un calcolatore: in questi casi è bene stabilire una procedura automatica che permetta di scartare le misure potenzialmente sbagliate. Un algoritmo utilizzato di frequente consiste nel calcolare la media e la devazione standard di tutto il campione, ed eliminare quelle misure che cadono un certo numero di deviazioni standard (tre o quattro) fuori dalla media. Eventualmente, è possibile iterare la procedura finché non converge.

Un'altro metodo è quello di eliminare una certa percentuale (ad esempio l'1%) dei valori più alti e più bassi ottenuti (è il procedimento che si adopera ad esempio quando da una media viene eliminato il voto più alto e quello più basso), o infine

[13] Eventualmente è possibile aggiungere una colonna contenente i residui, ovvero le differenze $\delta_i = x_i - x_0$, in modo da individuare le misure meno precise, e una colonna contenente il prodotto del quadrato dei residui per i pesi $w_i\delta_i^2$: la somma di questa colonna dà il χ^2 della media (vedi oltre).

[14] c'è chi lo fa......

una certa percentuale di dati col residuo standardizzato (definito come $u_i = \frac{x_i - \overline{x}}{\sigma_i}$) più grande in valore assoluto.

Tutti questi metodi hanno il difetto di non tenere conto del fatto che all'aumentare del numero di misure risulta sempre più probabile ottenere risultati distanti dal valore centrale della distribuzione. Un criterio che tenga invece conto di questo comportamento è il cosiddetto criterio di Chauvenet: l'idea è quella di eliminare una misura solamente se la probabilità p di ottenere un risultato più distante dalla media (nell'ipotesi di distribuzione gaussiana) è minore di $1/2N$, dove N è il numero di misure complessive.

Vediamo un esempio: si effettuano $N = 523$ misure ottenendo una media $\overline{x} = 1.15$ ed una deviazione standard $\sigma = 0.32$. Ci si chiede se è il caso o meno di eliminare due misure che hanno prodotto come risultato $x_1 = 0.16$ e $x_2 = 2.24$. La prima misura si trova a $|u_1| = 3.1$ deviazioni standard dalla media, mentre la seconda si trova $|u_2| = 3.4$ deviazioni standard. Nel primo caso, la probabilità di ottenere una misura più distante dalla media è uguale a $p_1 = 1.9 \cdot 10^{-3}$, mentre nel secondo è $p_2 = 0.67 \cdot 10^{-3}$. Il criterio di De Chauvenet pone come valore di soglia perché una misura venga accettata $p_s > 1/(2 * 523) = 0.96 \cdot 10^{-3}$, per cui dovremmo eliminare la seconda misura e tenere la prima. Successivamente bisognerà ricalcolare la media e la deviazione standard sui dati rimasti: in questo caso particolare, comunque, la differenza risulta molto piccola.