# INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ

ISIDORO FERRANTE

## 1. INTRODUZIONE

Questi appunti sono stati scritti come linea guida per il corso di relatività da me tenuto presso la SSIS Toscana nel 2006.

## 2. ALCUNI PROBLEMI DELLA MECCANICA NEWTONIANA E DELL'ELETTROMAGNETISMO CLASSICO.

Per comprendere le motivazioni che portarono al concepimento della teoria della relatività da parte di Einstein conviene partire dalle concezioni newtoniane di spazio e di tempo.

Newton ipotizzava esplicitamente nei suoi principia l'esistenza di uno spazio e di un tempo esistenti a priori, sempre uguali a sé stessi. All'interno di questo spazio e di questo tempo, che definivano un sistema di riefrimento privilegiato, valevano le leggi della meccanica da lui enunciate. In realtà poi dalle leggi stesse veniva fuori una situazione un po' più elastica, in quanto si ammetteva, seguendo le intuizioni precedenti di Galileo, che la meccanica risultasse la stessa per ogni osservatore che effettuasse delle misure su di un sistema di riferimento in moto relativo rettilineo ed uniforme rispetto allo spazio assoluto.

Si veniva quindi a creare un insieme di sistemi di riferimento, detti inerziali, praticamente indistinguibili uno rispetto all'altro: il passaggio da un sistema di riferimento ad un altro, in moto rispetto al primo con velocità $\vec{v}$, era descritto da equazioni del tipo $\vec{r'} = \vec{r} - \vec{v}t$, conosciute impropriamente come trasformazioni di Galileo, rispetto alle quali le equazioni della meccanica erano invarianti.

Durante il '700 e l'800 questa situazione non si era evoluta moltissimo: le leggi della meccanica sembravano dipendere esclusiamente da moti relativi, e risultavano pertanto invarianti per trasformazioni galileiane, ed inoltre tutti i tentativi di misurare il moto della Terra rispetto allo spazio vuoto, come l'aberrazione della luce, risultavano, ad una approfondita analisi dipendere solamente dalla velocità relativa dei corpi osservati.

Insomma, la meccanica sembrava godere di buona salute, nonostante alcuni problemi logici o sperimentali.

Il principale problema di natura logica era ovviamente quello dell'azione a distanza: non era per niente chiaro il meccanismo per cui due corpi avrebbero potuto influenzarsi a vicenda attraverso lo spazio, e il concetto stesso aveva avuto inizialmente qualche difficoltà ad affermarsi.

Dal punto di vista sperimentale, le cose andavano decisamente meglio: l'unica osservazione non spiegabile tramite la meccanica newtoniana era la famosa precessione di 43" per secolo nel perielo di Mercurio, peraltro un residuo di una precessione osservata di ben 574” per secolo, di cui la teoria newtoniana riusciva a spiegare solamente 531” per secolo.

Con l’arrivo dell’elettromagnetismo, sorse il problema di rendere coerenti le leggi della meccanica con l’elettrodinamica. Un primo problema sorge dall’equazione delle onde scoperta da Mawell: Maxwell infatti, con una famosissima dimostrazione, trovò che i campi elettromagnetici possono propagarsi per onde che si muovono ad una velocità pari a $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, che sperimentalmente si trova essere uguale alla velocità della luce. Ma velocità rispetto a che? Il probema, all’epoca non era per niente sentito, visto che l’altra equazione delle onde conosciuta, ovvero quella delle onde sonore, implicava l’esistenza di un mezzo in cui propagarsi, ovvero l’aria: la velocità del suono è la velocità delle onde sonore nel sistema di riferimento in cui l’aria è in quiete. Allo stesso modo risultava naturale ipotizzare che esistesse un mezzo, l’etere, attraverso il quale si propagavano le onde elettromagnetiche, e che costituisse un sistema di riferimento privilegiato, la cui esistenza non creava problemi di natura filosofica ai fisici del tempo.

Del resto le equazioni di Maxwell non risultavano invarianti nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro sotto le trasformazioni di Galileo: si supponeva pertanto che fossero valide solamente nel sistema in cui l’etere si trovava a riposo. Quindi lo spazio assoluto, postulato ma poi in realtà mai adoperato nella formulazione delle leggi della meccanica, tornava in pompa magna all’interno della fisica a cavallo dell’elettromagnetismo.

Però neanche così il matrimonio tra meccanica newtoniana ed elettromagnetismo poteva filare liscio: sorgevano infatti altri problemi, dall’analisi di situazioni apparentemente semplici. Ad esempio, si considerino due particelle in moto con la stessa velocità $\vec{v}$ in una direzione che forma un angolo con la congiungente (figura 2.1). Esiste un sitema di riferimento in cui queste cariche sono in quiete, e si attraggono con una forza diretta lungo la congiungente data dalla formula di Coulomb. Nel sistema di riferimento in cui le cariche sono in moto, ognuna di queste produce un campo magnetico le cui linee di forza sono circonferenze coassiali con la linea di moto; in conseguenza di ciò, su ciascuna delle due cariche nasce una forza $F_m$ di origine magnetica che non è diretta lungo la congiungente. Sommata alla forza elettrica, si ottengono due risultati interessanti: innanzitutto, tra le due cariche si osserva una coppia che tende a farle ruotare; in secondo luogo, nel sistema in cui le due cariche sono a riposo la forza è diretta lungo la congiungente: le trasformazioni di Galileo prevedono invece che questa NON cambi direzione. Che fine fa il principio di azione e reazione? E la conservazione del momento angolare? E come mai le trasformazioni di Galileo falliscono?[1]

Un problema molto simile vien fuori da un esempio altrettanto semplice: si consideri la situazione esemplificata in figura 2.2: stavolta le due velocità non devono essere necessariamente uguali. Sulla carica superiore agisce solamente la forza dovuta al campo elettrico della carica inferiore: infatti, lungo la direzione del moto il campo magnetico è nullo.

Sulla carica inferiore invece agiscono sia le forze dovute al campo elettrico che quelle dovute al campo magnetico prodotti dalla carica superiore.

[1]Il tentativo di misurare la coppia agente tra le particelle cariche fu effettuato da Trouton e Noble nel 1903, e diede risultato negativo.

FIGURA 2.1. Due cariche viste da un sistema di riferimento che si muove con velocità v rispetto ad ess: sorgono delle forze di natura magnetica che fanno sì che la forza che agisce su ciascuna delle due cariche non risulti diretta lungo la congiungente.

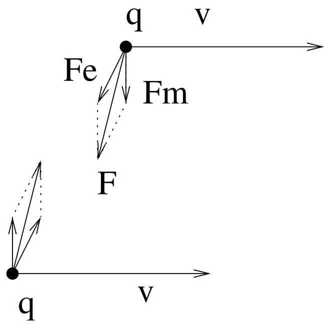
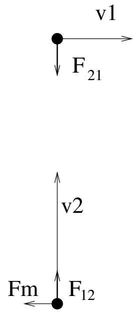



FIGURA 2.2. Sulla carica 1 agisce solamente la forza dovuta al campo elettrico generato dalla carica 2; su questa invece agiscono sia la forza dovuta al campo elettrico che quella dovuta al campo magnetico.



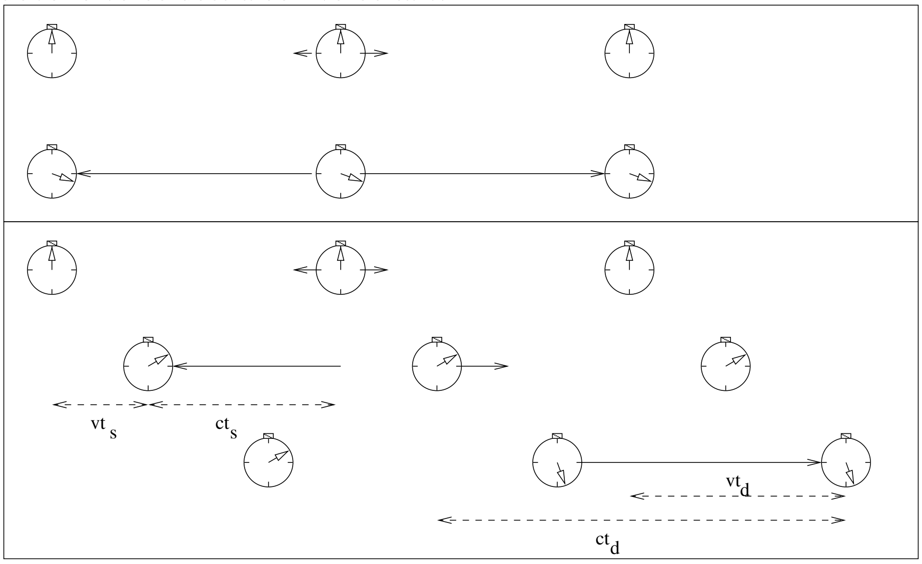

Stavolta, la forza di origine magnetica non si annulla, anzi è diretta verso sinistra. Di nuovo,che fine fa il principio di azione e reazione?

Inoltre tutti gli esperimenti destinati a determinare le caratteristiche fisiche dell'etere portavano a risultati contraddittori: un classico esempio è il risultato di Fizeau sulla velocità della luce all'interno di dielettrici in moto. Fizeau misurò la velocità della luce all'interno di un tubo percorso da un flusso di acqua in moto con velocità $v$, trovando dei risultati compatibili con l'ipotesi che la velocità aumentasse di un termine $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v$: si tratta di un risultato difficilmente comprensibile in meccanica classica, in quanto porterebbe ad ipotizzare (come fece Fresnel) che l'etere venisse trascinato solamente parzialmente dal moto del fluido.

Infine, i tentativi di misurare direttamente il moto della Terra attraverso l'etere, soprattutto ad opera di Michaelson e Morley, portarono, come è noto, a risultati negativi.

2.1. **I postulati di Einstein.** Einstein ribalta completamente le idee del suo tempo. Nel suo articolo del 1905, egli parte dall'idea che nessun moto assoluto possa essere rilevato o misurato. Quindi, quello che conta nella formulazione delle leggi della fisica sono solamente le velocità

FIGURA 2.3. Il problema della sincronizzazione. Nel primo caso, i tre orologi sono fermi rispetto al sistema di riferimento in cui ci troviamo. Nel secondo caso si muovono verso destra con velocità v.




relative tra oggetti interagenti: ovvero, non esiste un sistema di riferimento privilegiato e non esiste uno spazio assoluto.

Einstein è così convinto della realtà di questa affermazione da porla alla base della sua teoria, adoperandola come il primo dei suoi postulati. Da questa, consegue che non esiste un sistema di riferimento privilegiato, e che due osservatori, in moto traslatorio uniforme uno rispetto all'altro, devono essere in grado di dare una descrizione coerente dei fenomeni osservati, che non tenga conto della propria velocità.

Il secondo postulato è più originale, e meno intuitivo: si ipotizza che la velocità della luce sia una quantità che non dipende dal sistema di riferimento in cui questa viene misurata: da queste semplici idee vengono fuori una serie di conseguenze sconcertanti

Il primo concetto che viene riformato è quello di simultaneità.

Einstein comincia con l'interrogarsi su cosa significa sincronizzare due orologi posti in punti differenti dello spazio.

L'idea di base è quella di porre un orologio nell'origine delle coordinate, ed inviare da questo dei segnali lumnosi verso altri orologi posti in altri punti dello spazio.

Conoscendo la distanza tra gli orologi, e la velocità della luce, è possibile risalire dal tempo di arrivo del segnale a quello di emissione, e quindi sincronizzare i due orologi.

Ora però cominciano i problemi: supponiamo che gli orologi da sincronizzare siano tre, uno posto nell'origine delle coordinate, e due posti a destra e a sinistra, lungo l'asse $x$, alla stessa distanza $D$.

Ad un certo istante, un segnale di sincronizzazione parte dall'orologio centrale, e raggiunge contemporaneamente i due orologi laterali ad un istante $D/c$ più tardi.

Supponiamo però di osservare la scena muovendoci con velocità $v$ rispetto ai tre orologi. Allora, in questo nuovo sistema di riferimento, i segnali luminosi partono dall'orologio centrale sempre con velocità $c$, ma l'orologio a destra si allontana dalla sorgente luminosa, mentre quello a sinistra si avvicina.

Pertanto l'orologio a sinistra sarà colpito prima di quello di destra: i due eventi NON sono più contemporanei, e gli orologi NON appariranno sincronizzati![2]

Cerchiamo di quantificare in dettaglio: il raggio luminoso che viaggia verso destra si muove con legge oraria $x_{ld} = ct$, mentre l'orologio si muove con legge oraria $x_{od} = D + vt$. Pertanto il raggio di luce colpirà l'orologio all'istante $x_{ld} = x_{od} \Rightarrow t_d = \frac{D}{c-v}$

Ragionando in modo analogo per l'orologio di sinistra, si trova $t_s = \frac{D}{c+v}$. Pertanto la differenza dei tempi di arrivo è $\Delta t = t_d - t_s = \frac{2vD}{c^2-v^2}$. Si può provare ad inserire qualche numero: per distanze e velocità terrestri, ad esempio, ponendo $D = 3$km, $v = 50$m/s, si trova: $\Delta t = 3 \cdot 10^{-12}$s. La differenza dei tempi di arrivo è pertanto piccolissima nella vita quotidiana: questo spiega perché questi effetti passano inosservati. Su scale di distanze e velocità cosmiche, ovviamente, le cose cambiano.

Il secondo cardine che viene a cadere è l'idea del tempo assoluto, ovvero del tempo che scorre in modo uguale rispetto a qualunque osservatore.

Il metodo scelto da Einstein per giungere alle sue conclusioni è quello di immaginare un orologio estremamente semplice, formato da due specchi posti a distanza L, con un raggio di luce che rimbalza avanti ed indietro tra i due. Il tempo impiegato dal raggio di luce per compiere un tragitto avanti e indietro è $T_0 = 2L/c$. Supponiamo adesso di osservare questo orologio, o un altro identico, da un altro sistema di riferimento, in cui questo si muove con velocità $v$ ortogonale alla linea che congiunge gli specchi (vedi figura 2.4).

Si notano due cose: innanzitutto il moto del raggio di luce viene visto inclinato. Questo cambiamento di direzione non è altro che l'aberrazione della luce già osservata astronomicamente. In secondo luogo, il percorso del raggio di luce appare più lungo: infatti alla distanza $L$ tra gli specchi va aggiunto (in quadratura) lo spazio percorso dagli specchi. Questo vuol dire che l'intervallo di tempo $T_m$ tra un battito dell'orologio e l'altro aumenta, visto che la velocità con cui si muove la luce rimane la stessa. Facendo i conti si ha che il percorso compiuto all'andata è pari a $D = \sqrt{L^2 + (vT_m/2)^2}$. Quindi, visto che $T_m = 2D/c$ si ha alla fine:

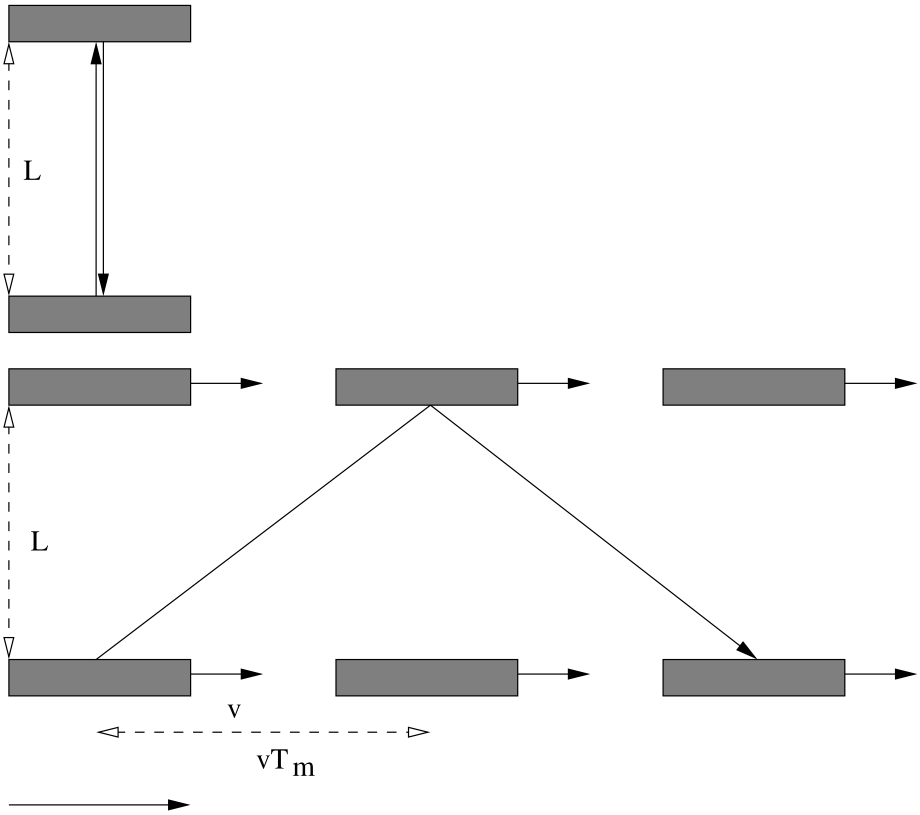
$(cT_m/2)^2 = L^2 + (vT_m/2)^2$, e quindi $T_m = (2L/c)/\sqrt{1 - v^2/c^2} = T_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Insomma, l'orologio, quando viene visto in moto, sembra andare più lento.

Si può osservare come questa non è una proprietà del particolare tipo di orologio prescelto: se ad esempio legassimo strettamente un secondo orologio meccanico a questo ipotetico orologio a luce, e se osservassimo che nel sistema di riferimento in cui i due orologi sono in quiete questi

[2]Però riflettiamo: se nel sistema in cui gli orologi sono in quiete il fotone blocca la lancetta, allora alla fine del processo le lancette dovrebbero risultare bloccate sulla stessa posizione, e questo sarebbe vero in qualunque sistema di riferimento lo si osservi, contrariamente a quello che sembra dal disegno. Siamo giunti ad una contraddizione? No: questo vuol dire che la situazone esemplificata nel disegno non è realistica. Infatti se nel sistema di riferimento in quiete gli orologi in posti diversi segnano la stessa ora, gli stessi orologi, visti da un altro sistema di riferimento in moto, mostreranno orari diversi all'istante di partenza dei fotoni. Ma questo sarà più chiaro tra poche pagine.

FIGURA 2.4. Schema dell'orologio a luce. Quello in alto è fermo, mentre quello in basso si muove con velocità $v$ verso destra. In entrambi i casi, la luce si muove con velocità c.




sono sincronizzati, allora rimarrebbero sincronizzati anche qualora venissero osservati da un sistema di riferimento in moto (I problemi di sincronizzazione di cui parlavamo prima si riferivano ad orologi distanti, non ad orologi vicini). Insomma, l'apparente rallentamento dell'orologio a luce si dimostra essere un fenomeno generale, che mette in luce come il tempo misurato in un sistema di riferimento differisca dal tempo misurato in un altro sistema di riferimento in moto rettilineo uniforme rispetto a questo.

Notiamo che nel ragionamento precedente abbiamo sottinteso, senza dimostrarlo, che la lunghezza dell'orologio rimanga la stessa nei due sistemi di riferimento. Fino ad adesso, però, non avevamo avuto nessun motivo di dubitare che la lunghezza osservata rimanesse la stessa: adesso, qualche dubbio l'abbiamo.

Per fortuna è così: infatti si immaginino due aste di lunghezza uguale $L$, mutite di due punte alle estremità. In un certo sistema di riferimento, l'asta 1 rimane ferma, mentre la 2 si muove in direzione perpendicolare alla sua lunghezza. Ad un certo istante, le due aste sono affiancate.

Ora, supponendo che l'asta 2 venga vista di lunghezza $L' < L$ da un osservatore solidale con l'asta 1, le due punte lasceranno due tacche sull'asta 1 a distanza pari ad $L'$. Ma un osservatore solidale all'asta 2 vedrà invece l'asta 1 in movimento, e quindi vedrà questa, di lunghezza $L'$, lasciare le due tacche sull'asta 2! Perché le due osservazioni diano lo stesso risultato, dobbiamo concludere che $L' = L$.

Osserviamo che qui abbiamo adoperato un paio di concetti nuovi: innanzitutto l'evento "L'asta 2 lascia una tacca sull'asta 1" è qualcosa che non dipende dalla scelta del sistema di riferimento: la tacca c'è o non c'è. Quindi cominciamo a vedere la distinzione tra osservazioni che cambiano col sistema di riferimento (la contemporaneità di due eventi) e osservazioni che rimangono le stesse in tutti i sistemi di riferimento (la presenza di una tacca sull'asta): a queste ultime si dà il nome di invarianti.

Immaginiamo adesso di effettuare la misura di un'asta posta nella stessa direzione della velocità relativa tra i due osservatori.

Supponiamo che un osservatore solidale con l'asta misuri una certa lunghezza $L$. Supponiamo che il secondo osservatore sia in possesso di un righello posto parallelamente all'asta in moto la cui lunghezza si vuole misurare. Ad un certo istante, l'osservatore solidale con l'asta effettua due tacche di riferimento sul righello. La distanza tra le due tacche rappresenterà la lunghezza dell'asta, misurata dall'osservatore solidale col righello, almeno è quello che pensa l'osservatore solidale con l'asta. Ma nel sistema di riferimento in cui il righello è in quiete, le due tacche NON vengono segnate contemporaneamente, per i motivi che abbiamo visto!

Sarà quindi necessario, per effettuare la misura, che sia l'osservatore solidale col righello a piazzare le due tacche nello stesso istante. Per capire quale sarà il risultato della misura, conviene fare un passo indietro ed affidarci ad un formalismo più evoluto.

2.2. **Le trasformazioni di Lorentz.** Cerchiamo, adoperando i postulati di Einstein, di capire quale relazione esiste tra le coordinate di un punto misurate in un sistema di riferimento ed un altro.

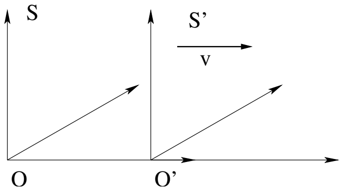
Cominciamo con alcune definizioni. Innanzitutto definiamo un *evento*: come idea generale, un evento è qualcosa che succede in un determinato punto dello spazio ad un determinato istante.

Per descrivere la posizione spaziale dell'evento, adoperiamo per comodità un sistema di assi cartesiano sinistrorso: non è l'unica scelta possibile, ovviamente: le coordinate polari andrebbero bene lo stesso, ma le coordinate cartesiani risultano molto più comode. Un evento viene pertanto descritto dalle coordinate spaziali del punto, più l'istante in cui l'evento avviene: quattro numeri in tutto, che si possono immaginare come quattro coordinate di uno spazio quadridimensionale. Attenzione, però: non si tratta di uno spazio euclideo, in quanto non sappiamo ancora bene come definire le distanze tra due eventi differenti. Sappiamo però che un sottospazio tridimensionale ha una struttura euclidea. Per il momento indichiamo questi quattro numeri nella forma $(t, x, y, z)$.

Definiamo adesso un sistema di riferimento che ci permetta, dato un evento, di assegnare le quattro coordinate spazio-temporali.

Procediamo operativamente in questo modo: prendiamo un sistema di riferimento cartesiano, e dividiamolo mediante una griglia formata da tanti cubetti di lato uguale. Ai vertici di ogni cubetto piazziamo un orologio. Sincronizziamo tutti gli orologi dello spazio tempo con l'orologio posto all'origine delle cordinate, tramite un segnale luminoso: sappiamo infatti che se l'orologio si trova in posizione $X, Y, Z$, allora il segnale arriverà con un ritardo dato da $\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}/c$.

FIGURA 2.5. Due sistemi di riferimento $S$ ed $S'$ si muovono con velocità relativa uniforme diretta lungo $x$. All'istante $t = 0$ le origini delle coordinate coincidono, ed inoltre $t' = 0$.




A questo punto, dato un evento in un punto dello spazio, ci basterà leggere l'ora segnata dall'orologio più vicino per avere una misura della componente temporale. Suddividendo la griglia sempre più finemente, si potrà raggiungere la precisione desiderata. Siamo punti a questo punto a ricavare le trasformazioni di Lorentz.

In quasi tutti gli esempi in questi appunti ci riferiremo alla situazione seguente: consideriamo un sistema di riferimento $S$ ed un altro sistema di riferimento $S'$ che si muove rispetto a questo con velocità $\vec{v}$ senza ruotare (vedi figura 2.5).

Supponiamo inoltre per semplicità che all'istante $t = 0$ le origini $O$ ed $O'$ coincidano, ed inoltre che in quell'istante anche nel sistema $S'$ valga $t' = 0$ Supponiamo infine che la velocità $\vec{v}$ sia orientata lungo l'asse $x$ (vedi figura. Questa stuazione è sempre raggiungibile tramite opportune rotazioni e traslazioni degli assi.). Dato un evento, potremo riferirci a questo nel sistema $S$ tramite le coordinate $(t, x, y, z)$, ovvero nel sistema $S'$tramite le coordinate $(t', x', y', z')$: vogliamo trovare la relazione tra queste quaterne di numeri.

Supponiamo che una sorgente luminosa omnidirezionale (in pratica, una lampadina) venga accesa all'istante $t = 0$ nell'origine delle coordinate. All'istante $t$, il fronte d'onda sarà descritto nel sistema $S$ dalla sfera $c^2t^2 - (x^2+y^2+z^2) = 0$. Anche nel sistema di riferimento $S'$il fronte d'onda sarà una sfera di equazione $c^2t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0$. Cerchiamo allora una trasformazione lineare che mantenga invariata la quantità $c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$[3], ovvero:

$$c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = c^2t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) \tag{2.1}$$

.

Innanzitutto, in base alle considerazioni svolte nel paragrafo precedente sulla lunghezza delle aste perpendicolari alla direzione del moto, possiamo cominciare a supporre: $y' = y$, $x' = x$.

Poniamo inoltre $x' = Ax + Bt$, $t' = Ct + Dx$. L'origine delle coordinate di $S'$, ovvero $x' = 0$, corrisponde in $S$ ad $x = vt$, ovvero $0 = Avt + Bt$, ovvero $B = -Av$.

Sostituendo nella 2.1, si ha: $x^2 - ct^2 = A^2(x - vt)^2 - c^2(Ct + Dx)^2 = (A^2 + c^2D^2)x^2 - 2A^2xvt - c^2CDxt + (A^2v^2 - c^2C^2)t^2$

Imponendo infine l'uguaglianza membro a membro, si trova:

[3]Si tratta in realtà di una condizione più generale, facilmente ottenibile però ponendo la sorgente in un punto diverso dall'origine delle coordinate.

$$A = 1/\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$$
$$B = -v/\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$$
$$C = 1/\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$$
$$D = -v/(c^2\sqrt{(1 - v^2/c^2)})$$

Riscrivendo in ordine le formule, si ottiene che, dato un *evento* di coordinate spaziali $x, y, z$ e coordinate temporali $t$ (misurate nel sistema $S$), nel sistema $S'$le coordinate saranno:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})}}(x - vt) \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})}}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Solitamente si introducono i simboli: $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$; inoltre si moltiplica il tempo $t$ per la velocità della luce in modo da avere grandezze omogenenee.

Con questo simbolismo, le T.L. acquistano una forma simmetrica:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma\,(x - \beta ct) \\ ct' &= \gamma\,(ct - \beta x) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{2.2}$$

Le trasfomazioni inverse si ottengono rapidamente spostando gli apici e cambiando $v$ con $-v$:

$$\begin{aligned} x &= \gamma\,(x' + \beta ct') \\ ct &= \gamma\,(ct' + \beta x') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

Un primo risultato che possiamo verificare in modo esatto, è che se due eventi, nel sistema di riferimento $S'$, sono sontemporanei, ma avvengono in luoghi diversi ($t'_1 = t'_2 = t'_0$, $x'_1 \neq x'_2$), allora nel sisema di riferimento questi eventi avverranno agli istanti $t'_1 = \gamma(t'_0 + vx'_1/c^2)$, $t'_2 = \gamma(t'_0 + vx'_2/c^2)$, ovvero non saranno contemporanei. L'intervallo temporale tra i due eventi sarà $\Delta t = t_1 - t_2 = \gamma v(x'_1 - x'_2)/c^2$, che per distanze e velocità terrestri rimane praticamente non misurabile.

Da notare che il contrario non ci disturba per niente: due eventi che avvengono nello stesso posto in $S'$, ma ad istanti diversi avverranno per forza di cose in due luoghi diversi in $S$: infatti ovviamente ciò che è fermo in $S'$ appare muoversi in $S$....

2.3. **Prime conseguenze delle Trasformazioni di Lorentz: "dilatazione dei tempi" e "contrazione delle lunghezze".** Abbiamo già visto come il tempo segnato da un orologio in moto sembri scorrere più lentamente. Possiamo ora ricavare questo risultato dalle trasformazioni di Lorentz: immaginiamo ad esempio due eventi che avvengono nello stesso posto nel sistema $S'$, ma ad un intervallo di tempo $\Delta t'$ (ad esempio, due ticchettii distinti di un orologio fermo in $S'$). Allora, visto che $\Delta x' = 0$, si ha:$\Delta x = \beta\gamma c\Delta t'$, $\Delta t = \gamma\Delta t'$. Ovvero, i due eventi, visti dal sistema di riferimento $S$ non avvengono nello stesso luogo (infatti l'orologio in $S$ si muove), ed avvengono a distanza temporale $\Delta t = \gamma\Delta t' > \Delta t'$. In parole povere, l'orologio in moto va piu' piano.

Ma lo stesso bisogna concludere su un orologio fermo in $S$ e osservato da $S'$: ovvero, ognuno dei due osservatori vede l'orologio dell'altro rallentare.

C'e' contraddizione? No, finchè non poniamo i due orologi a confronto per due volte di fila: ma in questo caso uno dei due dovrà tornare indietro, ed abbandonare un sistema di riferimento inerziale.

Esamineremo più in dettaglio in seguito quello che succede.

Consideriamo adesso un oggetto posto lungo l'asse $x'$ nel sistema di riferimento $S'$: in questo sistema di riferimento la lunghezza dell'oggetto sia $L_0$. Chiameremo questa lunghezza a riposo, o lunghezza propria dell'oggetto. Cerchiamo di effettuare adesso la misura a partire da osservazioni limitate al solo sistema di riferimento $S$: l'idea è quella di misurare la differenza $\Delta x$ tra la posizione degli estremi della sbarra allo stesso istante. Avremo quindi $\Delta x' = L_0$ nel sistema di riferimento $S'$, e $\Delta t = 0$ nel sistema di riferimento $S$. La lunghezza cercata è $\Delta x$. Le equazioni di Lorentz danno: $L = L_0/\gamma < L_0$. In parole povere la lunghezza misurata nel sistema di riferimento in cui la sbarra è in moto è minore della lunghezza misurata in un sistema di riferimento in cui la barra è in quiete. A questo risultato viene solitamente dato il nome di "contrazione delle lunghezze" o "contrazione di Lorentz": bisogna però ricordare che non si tratta di una vera e propria contrazione fisica, ma solamente del diverso risultato di una misurazione, dipendente dal sistema di riferimento utilizzato.

2.4. **La metrica dello spazio quadridimensionale.** Siamo pronti ad attribuire una metrica allo spazio quadridimensionale.

Per prima cosa associamo ogni evento ad un quadrivettore, ovvero un vettore dello spazio quadridimensionale che nel sistema $S$ ha come coordinate la quaterna $ct, x, y, z$: lo indichiamo con un trattino sotto il nome del quadrivettore stesso: $\underline{x} = (ct, x, y, z)$, od anche $\underline{x} = (ct, \vec{r})$, dove $\vec{r}$ è il vettore tridimensionale posizione. Il tempo è stato moltiplicato per la velocità della luce in modo da avere grandezze omogenee. La prima componente di un quadrivettore, ovvero $ct$, è detta parte temporale, mentre le altre tre componenti, che costituiscono il vettore $\vec{r}$, parte spaziale.

Ricordiamo che nello spazio tridimensionale, la metrica viene definita tramite il prodotto scalare tra due vettori: $(\vec{r_1} \cdot \vec{r_2}) = x_1 \cdot x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$. Le rotazioni lasciano invariato il prodotto scalare: ovvero in un nuovo sistema di riferimento, ruotato rispetto al primo, si ha: $x'_1 \cdot x'_2 + y'_1 y'_2 + z'_1 z'_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

Il modulo quadro di un vettore è definito come: $r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}$, e la distanza tra due punti $\vec{r_1}$ ed $\vec{r_2}$come $d^2 = (\vec{r_1} - \vec{r_2}) \cdot (\vec{r_1} - \vec{r_2})$: ovviamente, entrambe queste quantità sono invarianti per rotazioni.

Vogliamo procedere in modo analogo con lo spazio quadridimensionale. Abbiamo ricavato le T.L. richiedendo che fosse invariante l'equazione 2.1, che assomiglia moltissimo alla formula che dà l'invarianza del modulo di un vettore. Questo ci suggerisce che che una possibile forma per il prodotto scalare tra due quadrivettori sia: $\underline{x}_1 \cdot \underline{x}_2 = ct_1 \cdot ct_2 - \vec{r_1} \cdot \vec{r_2}$. In effetti, si verifica che questo prodotto è invariante per le trasformazioni di Lorentz definite in precedenza. Ma anche le rotazioni spaziali, che lasciano invariata la coordinata temporale, mantengono intatto questo prodotto scalare. Ma una TL di Lorentz più generale, con la velocità orientata lungo una direzione qualsiasi, può essere pensata come una rotazione che porti l'asse $x$ a coincidere con la direzione della velocità, più una TL della forma sopra descritta, più una nuova rotazione che riporti gli assi al proprio posto: e tutte queste trasformazioni lasciano invariato il prodotto scalare sopra definito.

Possiamo quindi pensare allo spazio fisico quadridimensionale come ad uno spazio dotato di una metrica non definita positiva, in cui il prodotto scalare viene ottenuto sottraendo al prodotto delle componenti temporali i prodotti delle componenti spaziali. A questo spazio viene dato il nome di spazio di Minkowsky, in onore del matematico che per primo formalizzò la teoria di Einstein.

Vedremo che la posizione non è l'unica grandezza fisica che possa essere rappresentata da un quadrivettore: anzi, ne incontreremo molte altre.

Consideriamo due eventi nello spazio associati a due quadrivettori $\underline{x}_1$ed $\underline{x}_2$. Definiamo come separazione tra i due eventi la quantità $\Delta\underline{x} = \underline{x}_1 - \underline{x}_2$. La separazione possiede ovviamente la struttura matematica di quadrivettore, e pertanto il suo modulo quadro, ottenuto facendo il prodotto scalare con sé stesso, sarà un invariante, ovvero avrà lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento. Lo chiameremo intervallo:

$$s^2 = (ct_1 - ct_2)^2 - (\vec{r_1} - \vec{r_2}) \cdot (\vec{r_1} - \vec{r_2})$$

Ovviamente, a differenza di quello che avviene con la metrica usuale, questo intervallo potrà essere positivo, negativo, o nullo.

Supponiamo dapprima che sia positivo: allora, potremo trovare un sistema di riferimento in cui solamente il primo dei due termini risulti diverso da zero, ovvero $\vec{r'_1} = \vec{r'_2}$, e quindi $c(t'_1 - t'_2) = \sqrt{s^2}$. Ovvero, esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi avvengono in istanti diversi, ma nello stesso luogo: una persona può quindi assistere all'eventi 1, e poi spostarsi in modo da essere presente anche all'evento 2. Si dice che i due eventi sono separati temporalmente: tra di essi può esistere un rapporto di causa ed effetto.

Consideriamo adesso il caso in cui $s^2 < 0$. Allora esiste un sistema di riferimento in cui $t'_1 = t'_2$, ovvero un sistema di riferimento in cui i due eventi avvengono contemporaneamente a distanza $d = \sqrt{-s^2}$: nessun viaggiatore, per quanto rapido, potrà essere presente contemporaneamente ai due eventi. Si dice che i due eventi sono separati spazialmente: i due eventi non possono essere collegati da un rapporto di causa-effetto.

Infine, il caso $s^2 = 0$ corrisponde a $t_1 - t_2 = \sqrt{(\vec{r_1} - \vec{r_2})^2}/c$: ovvero, la distanza temporale tra di due eventi è pari al tempo necessario ad un fotone per percorrere la distanza spaziale tra i due eventi: quindi è possibile ad un fotone partire dal punto $\vec{r}_1$all'istante $t_1$e giungere al punto $\vec{r}_2$all'istante $t_2$.

2.5. **Generalizzazione del concetto di quadrivettore.** Chiameremo quadrivettore $\underline{v}$ una qualunque quaterna di grandezze fisiche $(v_0, v_1, v_2, v_3)$ che nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale all'altro si trasforma tramite una trasformazione di Lorentz. Chiameremo $v_0$componente temporale del quadrivettore e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ componente spaziale.

Dati due quadrivettori $\underline{v}, \underline{w}$ il prodotto scalare $\underline{v} \cdot \underline{w} = v_0 w_0 - \vec{v} \cdot \vec{w}$ è invariante, ovvero assume lo stesso valore in ogni sistema di riferimento.

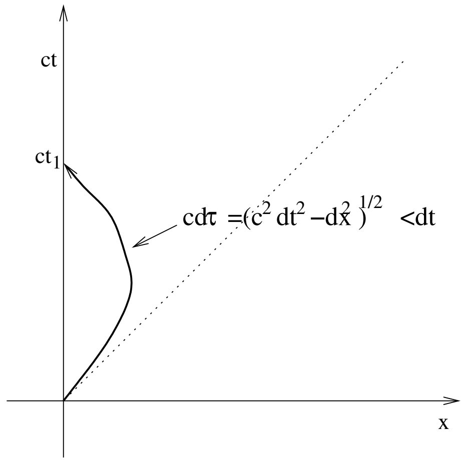
2.6. **Il gruppo di Lorentz.** Il gruppo di Lorentz è costituito da tutte le trasformazioni che lasciano invariato il prodotto scalare tra due quadrivettori. Le trasformazioni elementari che formano il gruppo sono date dai tre passaggi a sistemi di riferimento in moto lungo gli assi $x, y, z$, più le tre rotazioni intorno agli assi stessi: alle prime tre trasformazioni, dette anche trasformazioni di Lorentz proprie, viene dato il nome di *spinte* o *boost*. Una qualunque combinazione di queste sei trasformazioni appartiene al gruppo. Una qualsiasi trasformazione del gruppo può essere scritta come una rotazione, seguita da una spinta lungo l'asse x, seguita da una nuova rotazione.

## 3. CINEMATICA.

Si consideri un punto materiale (o particella) che descrive una certa traiettoria nello spazio. Siamo abituati a descrivere la traiettoria come una curva nello spazio tridimensionale, data da tre equazioni parametriche $\vec{x}(t)$. La descrizione relativistica del moto della stessa particella non cambia di molto: stavolta abbiamo un quadrivettore $\underline{x}(t) = (ct, x(\vec{t}))$. Rispetto al caso non relativistico, la traiettoria deve soddisfare in più alla condizione che la velocità risulti inferiore alla velocità della luce. Ovviamente i valori delle coordinate cambiano a seconda del sistema di riferimento che abbiamo scelto per descrivere il moto: supponiamo di averne scelto uno in modo assolutamente casuale ed arbitrario.

3.1. **Tempo proprio.** Consideriamo due punti della traiettoria, agli istanti $t$ e $t + dt$. La separazione tra questi due eventi è uguale a $d\underline{x} = (cdt, \vec{v}dt)$.L'intervallo è ovviamente di tipo temporale, come del resto si osserva calcolandolo esplicitamente:$ds^2 = dt^2(1 - \frac{v^2}{c^2})$. L'intervallo di tempo proprio è quindi $d\tau = dt\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{dt}{\gamma}$. Ecco che si scopre un effetto relativistico che già conoscevamo sotto il nome di dilatazione dei tempi: l'intervallo di tempo misurato da un orologio posto a cavallo del punto materiale che stiamo studiando risulta più breve dello stesso intervallo misurato in un qualsiasi altro sistema di riferimento. Supponiamo che la particella passi all'istante $t = 0$ dall'origine delle coordinate, e che in quel momento l'orologio solidale con essa segni l'istante $\tau = 0$. Allora il tempo segnato dall'orologio negli istanti successivi si otterrà integrando l'elemento $d\tau$ lungo tutta la traiettoria. Quindi, ad esempio, se la particella ripassa dall'origine delle coordinate spaziali all'istante $t_1$, il suo orologio segnerà un tempo $\tau = \int_0^{t_1} d\tau = \int_0^{t_1} \frac{d\tau}{dt}dt = \int_0^{t_1} \gamma dt > t_1$. Questo non è altro che il paradosso dei gemelli esposto in modo formalmente rigoroso.

FIGURA 3.1. Diagramma spazio temporale del paradosso dei gemelli




3.2. **Velocità.** La velocità ordinaria di una particella risulta dal rapporto tra la parte spaziale e quella temporale di un quadrivettore:$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$. Quindi le proprietà di trasformazione da un sistema di riferimento all'altro non sono per niente ovvie: la velocità non è un quadrivettore. Per questo motivo, le sue proprietà di trasformazione da un sistema di riferimento all'altro risultano particolari: per ottenerle, basta scrivere le trasformazioni di Lorentz in forma differenziale:

$$\begin{aligned} dx' &= \gamma\left(dx - \beta c dt\right) \\ cdt' &= \gamma\left(cdt - \beta dx\right) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \end{aligned}$$

dove $\beta = v_0/c$ è la velocità di $S'$ rispetto ad $S$, e poi dividere membro a membro:

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - \beta c dt}{dt - \beta dx/c} = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_x v_0}{c^2}} \\ v'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \beta dx/c\right)} = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{v_x v_0}{c^2}\right)} \\ v'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma dt - \beta dx/c} = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{v_x v_0}{c^2}\right)} \end{aligned} \tag{3.1}$$

L'inversa di questa relazione dà la formula per la combinazione delle velocità: infatti se un oggetto si muove con velocità $v'_0$ nel riferimento $S'$, che si muove con velocità $v_x$, la velocità vista da $S$ sarà:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{v'_x + v_0}{1 + \frac{v'_x v_0}{c^2}} \\ v_y &= \frac{v'_y}{\gamma\left(1 + \frac{v'_x v_0}{c^2}\right)} \\ v_z &= \frac{v'_z}{\gamma\left(1 + \frac{v'_x v_0}{c^2}\right)} \end{aligned}$$

Queste formule vanno confrontate con l'ordinaria somma delle velocità che si ha nel caso galileiano.

Si lascia come esercizio la dimostrazione che qualunque siano $\vec{v}'$ e $v_0$, si ha sempre $|\vec{v}| < c$, e che se $|\vec{v}'| = c$ allora anche $|\vec{v}| = c$

**Example 3.1.** Consideriamo la velocità della luce all'interno di un liquido con indice di rifrazione $n$ in moto con velocità $v_0$: si ha $v' = c/n$, da cui:

$$v = \frac{v_0 + c/n}{1 + \frac{v_0}{nc}} \simeq \frac{c}{n} + v_0\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Questo è il famoso risultato di Fizeau,da Fresnel interpetato come se il mezzo imprimesse all'etere una velocità pari ad una frazione della propria.

3.3. **Quadrivelocità.** Dividendo invece la separazione infinitesima tra due punti della traiettoria di una particella (quadrivettore) per il corrispondente intervallo di tempo proprio (invariante) si ottiene ovviamente un quadrivettore: $\underline{u} = \frac{dx}{d\tau}$. Il nome che viene dato a questa quantità fisica è quadrivelocità. Le sue componenti sono: $\underline{u} = (\gamma c, \gamma\vec{v})$. Il concetto di quadrivelocità non scalza quello di semplice velocità di una particella: infatti, la velocità di un punto materiale risulta facilmente accessibile alla misurazione, in quanto coinvolge il rapporto tra grandezze misurate nello stesso sistema di riferimento (mentre l'intervallo di tempo proprio è definito nel sistema di quiete della particella). Si noti inoltre che la quadrivelocità non risulta definita per un raggio di luce, in quanto l'intervallo di tempo proprio risulta identicamente uguale a zero.

Moltiplicando la quadrivelocità per se stessa, si trova facilmente: $\underline{u} \cdot \underline{u} = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 \vec{v}^2 = c^2$.

Un esercizio interessante consiste nel ricavare la trasformazione della velocità a partire dalla quadrivelocità : infatti, se in un sistema di riferimento una particella ha velocità $\vec{v}$, ed in un altro sistema di riferimento, in moto con velocità $\vec{v}_0$ rispetto a questo, ha velocità $\vec{v}'$, allora sarà $\underline{u} = (c\gamma, \gamma\vec{v})$ e $\underline{u'} = (c\gamma', \gamma'\vec{v}')$. Ma d'altro canto $u$ ed $u'$ devono essere collegati da una T.L. di velocità $\vec{v}_0$. Sfruttando queste relazioni, è possibile trovare la relazione esistente tra $\vec{v}$ e $\vec{v}'$

3.4. **Quadriaccelerazione.** La derivata della quadrivelocità rispetto al tempo proprio si chiama quadriaccelerazione: $\underline{a} = \frac{du}{d\tau}$. La quadriaccelerazione ha la particolarità di essere ortogonale (con la metrica di Minkowsky) alla quadrivelocità: infatti $\underline{u} \cdot \underline{a} = \underline{u} \cdot \frac{d\underline{u}}{d\tau} = \frac{1}{2}\frac{d\underline{u} \cdot \underline{u}}{d\tau} = \frac{1}{2}\frac{dc^2}{d\tau} = 0$. Il legame tra la quadriaccelerazione e l'accelerazione è molto complicato. Infatti si ha:

$$\underline{a} = \frac{d\underline{u}}{d\tau} = \gamma\frac{d\underline{u}}{dt} = \gamma(c\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma\vec{v}}{dt}) = (\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{\gamma^2 c}, \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{\gamma^2 c^2}\vec{v} + \gamma^2 c\vec{a})$$

Come si vede, la parte spaziale della quadriaccelerazione non è neanche parallela all'accelerazione tridimensionale.

## 4. Dinamica

La dinamica è la parte più delicata della relatività speciale: infatti è quella parte della teoria in cui i principi della dinamica newtoniana vengono messi in discussione e modificati in modo da rimanere consistenti con gli altri postulati della relatività. Ovviamente, in questo come in altri casi, la parola ultima delle modifiche apportate spetta agli esperimenti, che finora hanno verificato solidamente i risultati ottenuti.

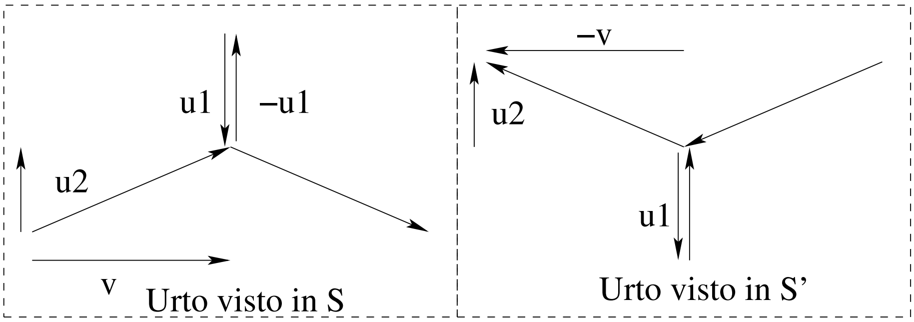
4.1. **Massa di quiete.** Un primo concetto che vogliamo definire è quello di massa di quiete di un corpo. Vogliamo che la massa costituisca una proprietà del corpo, che non dipenda dal sistema di riferimento. Non esistono motivi di principio per cui si debba effettuare una richiesta del genere: infatti proprietà come il volume, le dimensioni, anche il colore (vedremo in seguito) possono cambiare da un sistema di riferimento all'altro, e quindi dipendere dalla velocità del corpo. Del resto, alcuni testi di relatività parlano tranquillamente di massa relativistica di un corpo come dipendente dalla velocità. Però esistono tutta una serie di ragioni pratiche e teoriche non disprezzabili che fanno preferire una definizione invariante: ad esempio, le particelle subatomiche sono caratterizzate da una serie di proprietà che le identificano, ed una di esse è la massa. Tutti gli elettroni, e i protoni, ad esempio, hanno la stessa massa quando questa viene misurata nel sistema di riferimento in cui essi sono in quiete, e così tutti i neutroni e tutti i mesoni $K$, $\pi$, e qualunque altro riusciate ad immaginare. Sembra un delitto mascherare questo fatto della natura utilizzando una definizione di massa che dipenda dalla velocità. Inoltre, e questo lo vedremo in seguito, la massa a riposo di una particella fornisce una misura dell'energia interna di legame dei vari costituenti.

La scelta che risulterà alla fine più elegante sarà quella di definire la massa di un corpo tramite misure effettuate nel suo riferimento di quiete. In questo modo la massa risulta uno scalare (possiede ovviamente lo stesso valore in ogni sistema di riferimento), e può essere misurata tranquillamente adoperando i metodi della meccanica newtoniana, misurando ad esempio l'accelerazione che il corpo subisce quando viene sottoposto ad una forza nota, purché le velocità che entrano in gioco nel misuramento risultino molto piccole.

4.2. **Quadriimpulso.** Se moltiplichiamo la massa a riposo di una particella, che abbiamo visto essere un invariante, per la quadrivelocità, ovviamente troviamo un nuovo quadrivettore:

$$\underline{P} = m\underline{u} = (mc\gamma, m\gamma\vec{v}) \tag{4.1}$$

FIGURA 4.1. Esempio adoperato per il calcolo della forma relativistica dell'impulso: supponiamo che le masse siano uguali, e che la componente $y$ dell'impulso totale sia nulla. Allora la massa 1 torna indietro con la stessa velocità, mentre la massa 2 cambia il segno della componente $y$. Lo stesso urto, visto nel sistema $S'$che si muove con velocità $v_0$, appare praticamente uguale, tranne che per il fatto che le masse 1 e 2 si scambiano il ruolo.




Qual è il significato fisico di questo quadrivettore? Concentriamo momentaneamente la nostra attenzione sulla parte spaziale: osserviamo come a bassa velocità il fattore $\gamma$ tenda ad 1, e quindi la parte spaziale tenda alla quantità di moto della particella.

Verrebbe dunque spontaneo identificare la parte spaziale del quadrivettore che abbiamo costruito con la forma relativistica della quantità di moto: bisognerà però capire se questa nuova definizione possiede le caratteristiche necessarie.

Facciamo un passo indietro: la caratteristica principale della quantità di moto classica è la sua conservazione in fenomeni di urto, quando non intervengono forze esterne. La relatività ci chiede inoltre che questa conservazione sia vera in qualsiasi sistema di riferimento inerziale.

Esaminiamo allora un caso particolare, in cui si possa facilmente tener conto di queste due proprietà.

Supponiamo allora di trovarci in un sistema di riferimento in cui si abbia un urto come in figura 4.1: le masse siano uguali, e la massa 1 torni indietro dopo l'urto con la stessa velocità $u_1$. La massa 2, d'altro canto, prima dell'urto ha una velocità $\vec{v}$ di componenti $v_x = v_0,\ v_y = u_2$: dopo l'urto, la componente $x$ rimane invariata, mentre quella $y$ cambia di segno.

Supponiamo di osservare adesso lo stesso urto da un sistema di riferimento $S'$che si muove con velocità $v_0$ rispetto ad x: stavolta, nel nuovo sistema di riferimento, la massa 2 avrà una componente $x$ della velocità nulla sia prima che dopo l'urto; al contrario, la massa 1 avrà sia prima che dopo l'urto una componente $x$ della velocità pari a $v_x = -v_0$.

In pratica, le due masse si saranno scambiate il ruolo! quindi per simmetria, osservando la figura, possiamo concludere che nel sistema di riferimento $S'$la massa 1 avrà velocità lungo $y$ pari ad $u_2$, mentre la massa 1 avrà velocità lungo $y$ uguale a $u_2$. Ma le due velocità sono collegate da una trasformazione di Lorentz, ovvero: $u_1' = u_2$ ed anche $u_2' = u_1$. quindi varrà, applicando le 3.1:

$$u_2 = u'_1 = \frac{u_1}{\gamma} \tag{4.2}$$

Passiamo adesso a considerare la quantità di moto: supponiamo inanzitutto che questa abbia una forma del tipo: $\vec{P} = mg(v)\vec{v}$ dove $g(v)$ è una funzione del modulo della velocità della particella. In entrambi i sistemi, visto che le masse 1 e 2 tornano indietro con la stessa velocità, la componente $y$ della quantità di moto totale deve essere nulla: quindi deve risultare $mg(u_1)u_1 = mg(v)u_2$. Applicando la relazione 4.2 si trova:$g(u_1) = g(v)/\gamma$. Prendendo il limite per piccole velocità, ed osservando che perché risulti valido il limite newtoniano deve essere $g(0) = 1$, si trova: $g(v) = \gamma$.

4.3. **L'energia.** Adesso che abbiamo giustificato l'ipotesi che la parte spaziale del quadriimpulso corrisponda alla quantità di moto, occupiamoci della componente temporale.

Una prima osservazione che possiamo fare è la seguente: noi vogliamo che la quantità di moto totale si conservi in un urto indipendentemente dal sistema di riferimento dal quale compiamo la misura. Ma una trasformazione di Lorentz da un sistema di riferimento all'altro comporta mescolamenti tra la parte spaziale e quella temporale: quindi, se vogliamo che la conservazione sia indipendente dal sitema scelto, allora dobbiamo concludere che anche la parte temporale rappresenta una quantità conservata.

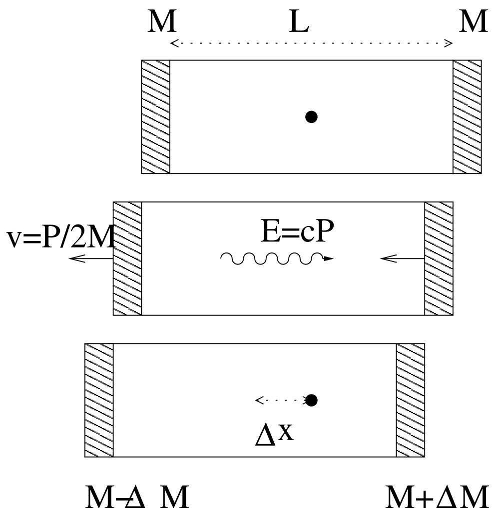
Per capire di cosa si tratta, facciamo il limite per piccole velocità:

$$P^0 = mc\gamma \backsimeq mc\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{c}\left(mc^2 + \frac{1}{2}mv^2\right)$$

Come si vede, a parte il termine $mc^2$, non è altro che l'energia cinetica della particella divisa per la velocità della luce. Ma cosa significa il termine $mc^2$? La tentazione è quella di attribuirgli il significato di energia posseduta dalla particella in assenza di velocità. Si tratterebbe quindi di un termine che tiene conto di tutta l'energia interna della particella. Ma è giustificata una ipotesi di questo tipo? Evidentemente si tratta di una congettura molto forte, in quanto non esiste assolutamente niente del genere in meccanica newtoniana!

Ci viene incontro in questa supposizione un argomento molto semplice: immaginiamo di avere un sistema composto da due masse uguali $M$ tenute ad una distanza $L$ da un sistema di asticciole rigido (vedi figura 6.2). Da una di queste masse parte una certa quantità di energia sotto forma di onda elettromagnetica che viene assorbita dall'altra. Sappiamo che la relazione tra l'energia e l'impulso della radiazione elettromagnetica è $\mathcal{E} = cP$: quindi, in seguito all'emissione, le due masse rinculano e si muovono in direzione opposta alla radiazione con velocità $v = P/2M$. Quando la radiazione viene assorbita dall'altra massa, dopo un tempo circa $L/c$, il sistema si trova nuovamente a riposo: nel frattempo però si è spostato in direzione della massa che ha emesso l'energia di una quantità $\Delta x = vL/c = \mathcal{E}L/(2Mc^2)$. D'altro canto, però, per la conservazione della quantità di moto, la posizione del centro di massa deve essere rimasta invariata! L'unica possibilità a questo punto è che una piccola quantità di massa $\Delta M$ si sia spostata dall'emettitore all'assorbitore, in maniera che il baricentro non si trovi più al centro delle due masse, ma si sia spostato verso la massa più pesante di una quantità $\Delta x$. Insomma, bisogna

FIGURA 4.2. Schema dell'esperimento mentale in grado digiustificare l'equivalenza tra massa ed energia: due masse uguali sono connesse rigidamente a distanza L. Il centro di massa si trova al centro. Dalla massa di sinistra un fotone di energia $\mathcal{E}$ viene emesso verso destra: le due masse rinculano con velocità $v = P/2M$. Quando il fotone viene assorbito, dopo un tempo$t = L/c$, il sistema torna in quiete, ma si è spostato di una quantità $\Delta x = vt = PL/(2Mc)$. Essendo però il sistema isolato, il centro di massa deve essere rimasto in quiete: pertanto, si deve supporre che la massa di sinistra abbia perduto una quantità di massa $\Delta M$ e che una uguale quantità sia stata acquisita dall'altra massa. Imponendo che lo spostamento del centro di massa sia uguale ed opposto allo spostamento del sistema formato dalle due masse, si ottiene:$\Delta M = \mathcal{E}/c^2$.




avere:$\Delta x = \Delta ML/2M = \mathcal{E}L/(2Mc^2)$ ovvero $\Delta M = \mathcal{E}/c^2$. Quindi si trova che appunto la variazione di massa dell'emettitore è uguale all'energia della radiazione emessa diviso la velocità della luce al quadrato!

Ovviamente questo ragionamento è solamente approssimativo, in quanto mescola concetti provenienti dall'elettrodinamica e dalla meccanica newtoniana per giungere ad un risultato relativistico: un conteggio più accurato porta tuttavia allo stesso risultato.

Un risultato di questo tipo merita di essere discusso più approfonditamente. Quello che abbiamo scoperto (o meglio, reso plausibile) è che la quantità $Mc^2$ non sia altro che l'energia interna di un corpo a riposo. L'aumento di energia che abbiamo ottenuto con questo esempio non corrisponde ad un aumento della velocità del corpo, che rimane costante. Cosa è successo all'energia assorbita? Probabilmente è andata a finire in un aumento dell'agitazione termica degli atomi che formano il corpo, ovvero in un aumento di temperatura. Supponiamo infatti che un corpo sia costituito da $N$ atomi di massa $m_i$, ciascuno dei quali si muove per agitazione termica e possiede una energia media $\mathcal{E}_i = m_i c^2 \gamma_i$. Allora l'energia totale del corpo sarà $\mathcal{E} = \sum \mathcal{E}_i = \sum m_i c^2 \gamma_i$. Ma se l'energia del corpo è uguale a $Mc^2$, si deve avere $M = \sum m_i \gamma_i$.

Siamo quindi autorizzati ad ipotizzare che l'energia di una particella relativistica sia data dalla formula $\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. Le conferme sperimentali di questo risultato sono ormai così tante che non avrebbe senso elencarle tutte: questa formula è adoperata ormai correntemente in tutti quei calcoli che coinvolgono le particelle all'interno degli acceleratori che si muovono a velocità molto vicine a quella della luce, e non si sono mai osservate deviazioni significative.

Quindi il quadriimpulso assume definitivamente la forma: $\underline{P} = (\mathcal{E}/c, \vec{P})$.

Prendendone il quadrato, si ottiene: $\underline{P} \cdot \underline{P} = \mathcal{E}^2/c^2 - \vec{P}^2 = m^2c^2$ od anche $\mathcal{E}^2 = m^2c^4 + c^2\vec{P}^2$. Nel caso di corpi di massa 0, allora $\mathcal{E} = c|\vec{P}|$.

Inoltre, dal semplice esame delle formule 4.1 che danno energia ed impulso in termini della velocità, si ricava:

$$\vec{P} = \vec{v}\mathcal{E}/c^2$$

Nel caso $m = 0$ si trova $|\vec{v}| = c$: le particelle prive di massa possono muoversi solamente alla velocità della luce!

4.3.1. *Urti.* Definiamo dapprima il concetto di urto in modo preciso: in un processo di urto si hanno due corpi non interagenti, ciascuno in moto rettilineo uniforme. I due corpi vengono portati ad interagire brevemente in una regione limitata di spazio e per un intervallo di tempo finito, dopo di ché l'interazione cessa e i corpi ricominciano a viaggiare con velocità costante.

Come abbiamo visto, nell'urto tra due particelle si conserva il quadriimpulso totale: questo significa che nel trattamento relativistico degli urti l'energia totale si conserva sempre. La cosa non è in contrasto con l'esperienza quotidiana: infatti, in un urto anelastico, l'energia cinetica dei due corpi coinvolti nella collisione si converte in energia interna, di legame o di agitazione termica. Questa energia rientra nel calcolo della massa dei corpi: pertanto, in un urto anelastico relativistico, esiste la possibilità che le masse delle particelle dopo l'urto (dette anche prodotti di reazione) risultino differenti da quelle che si avevano prima dell'urto! Nel caso di corpi macroscopici, solitamente le energie cinetiche in gioco sono così piccole rispetto alla massa a riposo che una conversione di energia in massa corrisponde ad un trascurabile aumento della massa, che passa inosservato, a fronte di una grande perdita di energia cinetica, facilmente osservabile.

Per una trattazione relativistica completa degli urti dobbiamo allora considerare la possibilità che le masse cambino.

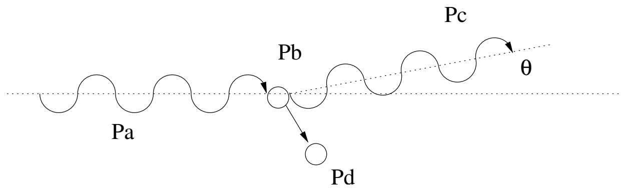
Avremo quindi 2 particelle, $a$ e $b$, con masse $m_a$ ed $m_b$, prima dell'urto, e quadriimpulsi $\underline{P}_a$ e $\underline{P}_b$, prima dell'urto, ed altre due particelle $c$ e $d$ dopo l'urto, con quadrimomenti $\underline{P}_c$ e $\underline{P}_d$. Se sia la particella $a$ a trasformarsi nella $c$, o se sia la particella $b$, è una questione inessenziale, e sostanzialmente indecidibile, soprattutto se consideriamo particelle microscopiche. La conservazione del quadriimpulso si scrive nella forma:

$$\underline{P}_a + \underline{P}_b = \underline{P}_c + \underline{P}_d$$

e contiene sia la conservazione dell'impulso che quella dell'energia.

**Example 4.1.** Scattering Compton.

FIGURA 4.3. Scattering Compton: un fotone urta contro un elettrone in quiete; a seguito dell'urto, l'elettrone rincula e il fotone cambia la sua energia ed il suo impulso.




Uno degli esempi più interessanti è l'effetto Compton, che consiste nell'urto di un fotone con un elettrone in quiete (vedere figura 4.3). Si tratta in questo caso di un urto elastico, in quanto le masse dei prodotti finali sono uguali a quelle dei prodotti iniziali. In questo caso, $\underline{P}_a = h\nu/c(1, \hat{k})$; $\underline{P}_b = (m_e c, \vec{0})$, mentre $\underline{P}_c = h\nu'/c(1, \hat{k})$, $P_d = (m_e \gamma c, m_e \gamma \vec{v})$.
Le incognite sono sei (le tre componenti dell'impulso per ognuna delle particelle), mentre le equazioni sono 4. Una incognita è però eliminabile facilmente osservando che l'impulso iniziale e i due finali giacciono sullo stesso piano: quindi un angolo di rotazione intorno alla direzione dell'impulso iniziale è arbitrario, e non cambia le energie delle particelle finali. Dopo essersi ridotti ad un piano, rimangono 4 equazioni e tre incognite. Una ulteriore quantità rimane indeterminata: assumiamo che sia l'angolo formato tra la direzione del fotone entrante e quella del fotone uscente, ovvero l'angolo di *scattering* del fotone.
Allora scriviamo la conservazione del quadriimpulso nella forma:

$$\underline{P}_d = \underline{P}_a + \underline{P}_b - \underline{P}_c$$

e calcoliamo il prodotto scalare di questa espressione per sè stessa. Ricordiamo che in base alla definizione $\underline{P}_d \cdot \underline{P}_d = \underline{P}_b \cdot \underline{P}_b = m_e^2 c^2$ ed inoltre $\underline{P}_c \underline{P}_c = \underline{P}_a \underline{P}_a = 0$; rimangono i doppi prodotti $\underline{P}_a \underline{P}_b = h\nu m_e$, $\underline{P}_c \underline{P}_b = h\nu' m_e$ ed infine $\underline{P}_a \underline{P}_c = \frac{h^2 \nu \nu'}{c^2}(1 - \cos\theta)$. Mettendo assieme tutti i pezzi, si ha:

$$\frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

che determina il cambiamento di lunghezza del fotone in funzione dell'angolo di deflessione.

**Example 4.2.** Energia di soglia

Consideriamo per il momento il modulo quadro dell'impulso totale, moltiplicato per la velocità della luce al quadrato:

$$s = c^2 \left(\underline{P}_a + \underline{P}_b\right) \cdot \left(\underline{P}_a + \underline{P}_b\right) = \left(\mathcal{E}_a + \mathcal{E}_b\right)^2 - c^2 \left(\vec{P}_a + \vec{P}_b\right)^2$$

Si tratta ovviamente di una quantità invariante, che ha quindi lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento. Calcoliamola quindi in un sistema di riferimento particolare, ovvero quello in cui la quantità di moto totale del sistema è zero: si ha

$$s = \left(\mathcal{E}_a + \mathcal{E}_b\right)^2$$

Si tratta pertanto del quadrato dell'energia misurata nel sistema del centro di massa. Dopo l'urto, si producono due particelle di impulso $\vec{P}$ pari ed opposto: si avrà allora

$$s = (\mathcal{E}_a + \mathcal{E}_b)^2 = (\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_d)^2 = (\sqrt{m_c^2 c^4 + c^2 \vec{P} \cdot \vec{P}} + \sqrt{m_d^2 c^4 + c^2 \vec{P} \cdot \vec{P}}) \geq m_c c^2 + m_d c^2$$

Quindi possiamo concludere che perchè una certa reazione sia possibile si deve avere

$$s = (\mathcal{E}_a + \mathcal{E}_b)^2 - c^2 \left(\vec{P}_a + \vec{P}_b\right)^2 > (m_c + m_d) c^2$$

ovvero, per ottenere due particelle di un tipo dato, condizione necessaria (ma non sufficente) è che l'energia del centro di massa debba essere maggiore della somma delle masse dei prodotti finali, moltiplicata per $c^2$.

Questo valore è detto energia di soglia della reazione. Si supponga di voler inviare un positrone (Particella avente la stessa massa dell'elettrone, ma di carica positiva: è l'antiparticella dell'elettrone) contro un elettrone, in modo che nella reazione finale si ottengano un protone ed un antiprotone (protone con carica negativa). L' elettrone, inoltre, sia in quiete e il positrone venga sparato addosso con impulso indidente $\vec{P}_i$ ed energia $\mathcal{E}_i$. L'energia del centro di massa è allora: $\mathcal{E}_{cm} = \sqrt{s} = \sqrt{(\mathcal{E}_i + m_e c^2) - \vec{P}_i^2} = \sqrt{2\mathcal{E}_i m_e c^2}$. Perché si possano produrre due protoni, deve risultare $\mathcal{E}_{cm} > 2m_p c^2$, ovvero $2\mathcal{E}_i m_e c^2 > 4m_p^2 c^4$, ed infine $\mathcal{E}_i > 2\frac{m_p^2}{m_e} c^2$.

La massa dell'elettrone è di $9.1 \times 10^{-31}$Kg, corrispondente ad una energia a riposo di circa $8 \times 10^{-14}$ Joule. La massa del protone è circa $1.7 \times 10^{-27}$Kg, pari a circa $1.5 \times 10^{-10}$Joule. Inserendo i numeri, si trova allora che il positrone deve avere un'energia di $5.5 \times 10^{-7}$, ovvero 6.7 milioni di volte maggiore della sua massa a riposo[4].

Se invece elettrone e positrone vengono fatti collidere sparandoli uno contro l'altro con la stessa velocità ed energia $\mathcal{E}_i$, allora l'energia nel centro di massa è semplicemente $2\mathcal{E}_i$, e quindi basterà che sia $\mathcal{E}_i > m_p c^2$, ovvero l'energia incidente deve essere semplicemente maggiore dell'energia a riposo del protone, pari a circa 1800 volte l'energia a risposo dell'elettrone, decisamente minore di quella calcolata nel caso precedente. E' proprio su questo principio che si basa il funzionamento dei collisionatori, od anche, usando il termine inglese, colliders, in cui le particelle vengono scagliate l'una contro l'altra con uguale velocità.

4.4. **Forze.** Il concetto di forza in relatività risulta problematico.

Innanzitutto, si perde il concetto di azione a distanza: se ad esempio considero l'interazione tra due elettroni in moto, allora l'informazione sulla posizione di uno dei due elettroni giunge all'altro con un ritardo che dipende dalla distanza. Nel frattempo, il primo elettrone si è spostato e quindi la forza non potrà in principio essere diretta lungo la congiungente, se non in casi speciali. Il principio di azione e reazione, fondamentale nella meccanica newtoniana, dovrà quindi essere modificato. In fisica relativistica le interazioni avvengono non tra corpi, bensì tra i corpi ed il campo (elettrico, magnetico, gravitazionale, o di altra natura) nelle immediate vicinanze di ogni corpo.

[4]Per confronto, un insetto di massa intorno ad 1 mg, che vola ad una velocità di circa 50 cm/s ha una energia cinetica di circa $10^{-4}$Joule. La sua energia a riposo, per contro, è di circa $10^{14}$Joule.

Rimane valido però il principio della conservazione della quantità di moto, a patto di tenere conto della quantità di moto associata al campo che trasporta l'interazione [5].

Quale sarà la forma assunta dall'equazione $\vec{F} = m\vec{a}$ ? Una ipotesi potrebbe essere qualcosa del tipo: $m\underline{a} = \underline{F}$, dove $\underline{F}$ è un quadrivettore la cui parte spaziale si riduce alla forza newtoniana nel limite di piccole velocità. Ma questo non ci dice molto: infatti le forme $\gamma\vec{F}$, $\vec{F}$, $\vec{F}/\gamma$ si riducono tutte alla forma newtoniana per basse velocità, e niente ci impedisce di pensarne mille altre. Si rende necessario dare parola all'esperimento: ad esempio, considerando la deflessione di un elettrone a velocità prossima a $c$ in conseguenza di un campo elettrico perpendicolare alla direzione del suo moto; oppure la relazione tra il raggio e la velocità in una particella che descrive una circonferenza sotto l'azione del campo magnetico. Questi esperimenti danno come risultato che la parte spaziale del quadrivettore $\underline{F}$ deve essere uguale a $\gamma\vec{F}$: con questa scelta, si ha tra l'altro che la parte spaziale dell'equazione diventa: $\frac{d\vec{P}}{d\tau} = \gamma\frac{d\vec{P}}{dt} = \gamma\vec{F}$, per cui si recupera la forma newtoniana $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$, dove stavolta $\vec{P}$ è però la versione relativistica della quantità di moto. A dare maggior forma a questa ipotesi, scopriremo più in là che le equazioni dell'elettrodinamica forniscono esattamente la stessa formula.

Rimane da scoprire cosa sia la componente temporale della quadriforza: per questo, osserviamo che, come abbiamo visto in precedenza, quadriaccelerazione e quadrivelocità sono ortogonali, e quindi lo sono anche quadriimpulso e quadrivelocità: $\underline{F} \cdot \underline{u} = 0$. Da questa relazione si ottiene: $F_0\gamma c = \gamma^2\vec{F} \cdot \vec{v}$ ovvero:

$$F_0 = \frac{\gamma}{c}\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{\gamma}{c}\frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

Quindi la componente temporale della quadriforza è uguale a $\gamma/c$ volte la derivata dell'energia della particella, ovvero la potenza sviluppata dalla forza.

Questo risultato rafforza l'identificazione dell'energia cinetica della particella con la componente temporale del quadriimpulso, e nel contempo l'identificazione della componente spaziale della quadriforza con $\gamma$ volte la forza newtoniana.

In alcuni testi a questo punto si cerca di ricavare la legge di trasformazione della forza da un sistema di riferimento all'altro: si tratta di equazioni complicate che non aggiungono niente al contenuto fisico delle equazioni che abbiamo visto. Nel caso in cui saremo costretti a trasformare una forza da un sistema di riferimento all'altro, ci basterà sapere che la quadriforza si trasforma come un quadrivettore. E' il caso di notare, però, che nel passaggio da un sistema di riferimento all'altro la direzione della forza cambia, mentre le trasformazioni di Galileo lasciano invariati sia modulo che direzione!

4.5. **La massa relativistica.** Alcuni autori introducono il concetto di massa relativistica, o semplicemente massa, di una particella, dicendo che la massa varia con la velocità secondo la formula: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, dove $m_0$ è la massa a riposo, in modo da scrivere l'energia nella forma

[5] Negli urti, come si è detto, si considerano le particelle solamente prima e dopo che l'interazione è avvenuta: per questo si possono trascurare energia ed impulso assorbiti e successiviamente rilasciati dai campi che mediano l'interazione.

$\mathcal{E} = mc^2$. Il guadagno che si ottiene con questa scelta è quello di poter conservare l'espressione $\vec{P} = m\vec{v}$ per la quantità di moto, e quella di poter considerare la massa una grandezza additiva. A parte questo, la massa relativistica è quasi sempre fonte di grandi confusioni ed è preferibile a giudizio di chi scrive evitarne l'uso. Rimane da notare che tuttavia molti testi, anche estremamente qualificati, continuano ad adoperarla.

4.6. **Il momento angolare.** Estendere il concetto di momento angolare alla relatività è abbastanza complicato e va al di là degli scopi di questi appunti. E' possibile però una trattazione elementare, a patto di rinunciare ad esempi e dimostrazioni.

Partiamo, al solito, dal caso classico.

Il momento angolare di una particella rispetto ad un polo $O$, che per semplicità porremo uguale all'origine delle coordinate, è $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{P}$. La prima componente ad esempio è: $L_1 = r_2P_3 - r_3P_2$: stranamente, il membro a sinistra ha un solo indice, mentre quello a destra ne ha 2. Il fatto è che in realtà il membro destro è l'elemento di una matrice antisimmetrica $3 \times 3$ ottenuta tramite la relazione: $M_{ij} = r_iP_j - r_jP_i$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & r_1P_2 - r_2P_1 & r_1P_3 - r_3P_1 \\ r_2P_1 - r_1P_2 & 0 & r_2P_3 - r_3P_2 \\ r_3P_1 - r_1P_3 & r_3P_2 - r_2P_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & L_3 & -L_2 \\ -L_3 & 0 & L_1 \\ L_2 & -L_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il motivo per cui è possibile trattare una matrice antisimmetrica come se fosse un vettore è dovuto al fatto che stranamente, nel caso tridimensionale, gli elementi di una matrice antisimmetrica si trasformano, per rotazioni, esattamente come le tre componenti di un vettore spaziale. La reale natura matriciale, o meglio tensoriale, del momento angolare viene fuori dal fatto che, come si sa bene, il momento angolare rimane invariante sotto una operazione di parità che inverta la direzione degli assi cartesiani.

Dopo queste osservazioni, l'estensione del concetto di momento della quantità di moto al caso relativistico diventa semplice: basta calcolare la matrice $4 \times 4$ il cui elemento $\alpha, \beta$ è dato da $\underline{x}_\alpha\underline{P}_\beta - \underline{x}_\beta\underline{P}_\alpha$:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & ctP_1 - \frac{\mathcal{E}}{c}r_1 & ctP_2 - \frac{\mathcal{E}}{c}r_2 & ctP_3 - \frac{\mathcal{E}}{c}r_3 \\ -ctP_1 + \frac{\mathcal{E}}{c}r_1 & 0 & r_1P_2 - r_2P_1 & r_1P_3 - r_3P_1 \\ -ctP_2 + \frac{\mathcal{E}}{c}r_2 & r_2P_1 - r_1P_2 & 0 & r_2P_3 - r_3P_2 \\ -ctP_3 + \frac{\mathcal{E}}{c}r_3 & r_3P_1 - r_1P_3 & r_3P_2 - r_2P_3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & ct\vec{P} - \frac{\mathcal{E}}{c}\vec{r} \\ -ct\vec{P} + \frac{\mathcal{E}}{c}\vec{r} & M \end{pmatrix}$$

Quindi il nuovo tensore momento angolare contiene al suo interno il tensore momento angolare tridimensionale, ma contiene in più l'espressione : $ct\vec{P} - \frac{\mathcal{E}}{c}\vec{r}$.

Questa espressione assume un significato chiaro quando si considera un sistema formato da più particelle, ciascuna con impulso $\vec{P}_i$, energia $\mathcal{E}_i$e posizione $r_i$.

La conservazione del momento angolare richiede che anche la prima riga del tensore sia una costante che non dipende dal tempo: $ct\sum_i \vec{P}_i - \sum_i \mathcal{E}_i\vec{r}_i/c = cost$. Definendo la quantità di moto totale del sistema come $\vec{P}_{tot} = \sum_i \vec{P}_i$, e dividendo per l'energia totale, che sappiamo già si conserva, si trova:

$$\frac{\sum \mathcal{E}_i\vec{r}_i}{\mathcal{E}_{tot}} = cost + \frac{\vec{P}_{tot}}{\mathcal{E}_{tot}/c^2}t$$

questa espressione è assolutamente identica a quella che fornisce il moto del centro di massa di un sistema isolato.

Pssoaimo quindi identificare la posizione del centro di massa con la quantità $\vec{r}_{CM} = \frac{\sum \mathcal{E}_i\vec{r}_i}{\mathcal{E}_{tot}}$ e la velocità del centro di massa con $\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{P}_{tot}}{\mathcal{E}_{tot/c^2}}$.

Insomma, abbiamo scoperto che nel calcolo del centro di massa bisogna tenere conto di tutta l'energia della particella, e non solo della sua massa. Per questo bisognerebbe parlare di centro delle energie, ma il termine newtoniano viene adoperato anche in meccanica relativistica.

## 5. La relatività e l'elettromagnetismo.

Per comprendere i legami tra elettromagnetismo e relatività è necessario adoperare un formalismo più evoluto: tuttavia è il caso di notare come relatività ed elettromagnetismo si fondano perfettamente, e senza contraddizioni: anzi, la reltività è nata, come abbiamo visto, dall'esigenza di conciliare le equazioni di Maxwell e la meccanica newtoniana, mantennedo intatte le prime e riformando le seconde.

Cominciamo da un semplice esempio: si consideri una carica in moto con velocità $\vec{v}$ diretta lungo l'asse $x$, in una regione in cui è presente un campo magnetico diretto lungo l'asse $y$. La carica sarà soggetta ad una forza diretta lungo l'asse $z$.

Spostiamoci adesso nel sistema di riferimento in cui la carica è in quiete. La forza sarà sempre presente, ma stavolta, essendo la carica in quiete, non sarà dovuta al campo magnetico. Bisognerà quindi ipotizzare la presenza di un campo elettrico, nel nuovo sistema di riferimento, di intensità pari a $\vec{v}\times\vec{B}$. Inoltre, in generale, si tratterà di un campo elettrico a divergenza nulla e rotazionale, quindi non sarà un campo statico.

Analogamente, se si considera una carica in moto con velocità $\vec{v}$, possiamo facilmente comprendere come ad essa, oltre al campo elettrico statico, debba essere associato un campo magnetico. Le linee di forza di questo campo saranno delle circonferenze intorno alla linea di moto della carica. Nel sistema di riferimento in cui la carica è immobile, però, non esiste alcun campo magnetico.

Bisogna considerare quindi che nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro i campi elettrici e magnetici si mescolano tra di loro e modificano le loro componenti in modo interdipendente.

Una trattazione rigorosa dimostra che i campi elettrico e magnetico sono in realtà le componenti di una singola entità, detta tensore elettromagnetico, che si può rappresentare come una matrice antisimmetrica $4 \times 4$ avente la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Le trasformazioni delle singole componenti dal sistema di riferimento $S'$ al sistema di riferimento $S$ esemplificati nella figura 2.5 sono date da:

$$\begin{array}{rr} E'_x = E_x & B'_x = B_x \\ E'_y = \gamma\left(E_y - vB_z/c^2\right) & B'_y = \gamma\left(B_y + vE_z\right) \\ E'_z = \gamma\left(E_z + vB_y/c^2\right) & B'_z = \gamma\left(B_z - vE_y\right) \end{array} \tag{5.1}$$

Applicando queste leggi di trasformazioni alla forma di Lorentz, si trova che l'espressione $\gamma q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$si trasforma come la componente spaziale di un quadrivettore avente inoltre componente temporale $\gamma q\vec{v} \cdot \vec{E}$. Viene spontaneo identificare questo quadrivettore con la quadriforza $\underline{F} = \frac{d\underline{u}}{d\tau} = (\gamma\frac{d\mathcal{E}/c}{dt}, \gamma\frac{d\vec{P}}{dt})$.

Si giustifica in questo modo l'equazione del moto:

$$\begin{array}{c} \frac{d\vec{P}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ \frac{d\mathcal{E}}{dt} = q\vec{v} \cdot \vec{E} \end{array}$$

In tutti questi ragionamenti abbiamo sempre assunto che la carica fosse un invariante relativistico: si tratta di una affermazione forte che richiede una giustificazione sperimentale. Per fortuna, l'invarianza della carica è dimostrata già con sufficente chiarezza dalla neutralità della materia ordinaria: infatti, nella materia, positroni ed elettroni posseggono masse e velocità estremamente diverse (il protone pesa circa 1800 volte l'elettrone): la precisione con cui le rispettive cariche si annullano nella materia ordinaria permette però di stimare l'uguaglianza tra le loro cariche entro una frazione dell'ordine di $10^{-19}$.

**Example 5.1.** Campo elettrico costante ed uniforme

In questo caso le equazioni del moto assumono la forma particolarmente semplice:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = q\vec{E}$$

e quindi:

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + q\vec{E}t$$

L'energia allora varia secondo la formula:

$$\mathcal{E}^2 = m^2c^4\gamma^2 = c^2P^2 + m^2c^4 = c^2\left(\vec{P}_0 + q\vec{E}t\right)^2 + m^2c^4$$

da cui si ricava la velocità (per semplicità, supponiamo la carica ferma all'istante t=0):

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\left(q\vec{E}t\right)^2}{m^2c^2} + 1 \rightarrow v = c\frac{\frac{qE}{mc}t}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{qE}{mc}t\right)^2\right)^2}}$$

Si nota che per tempi piccoli, e quindi basse velocità, si ritrova la formula newtoniana. A tempi grandi, e quindi ad alte velocità, la velocità tende invece a $c$, ma senza mai superarla.

Un caso interessante si ha quando si spara in campo elettrico orientato in direzione $x$ una carica con velocità iniziale diretta lungo $y$.

Allora si possono esplicitare le due componenti della quantità di moto, ottenendo:

$$\begin{aligned} P_y &= P_0 = m\gamma v_y \\ P_x &= qEt = m\gamma v_x \end{aligned}$$

La tangente dell'angolo tra la velocità e il campo elettrico varia linearmente secondo la stessa legge del caso non relativistico: $\tan\theta_x = qEt/P_0$, però la componente $y$ della velocità, anzicché aumentare, diminuisce! Infatti l'energia vale:

$$\mathcal{E} = m\gamma c^2 = mc^2\sqrt{\left(1+P_0^2/(mc)^2+\left(\frac{qEt}{mc}\right)^2\right)}$$

da cui, sostituendo $\gamma$,si trova:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{qEt}{\sqrt{\left(1+P_0^2/(mc)^2+\left(\frac{qEt}{mc}\right)^2\right)}} \\ v_y &= \frac{P_0/m}{\sqrt{\left(1+P_0^2/(mc)^2+\left(\frac{qEt}{mc}\right)^2\right)}} \end{aligned}$$

Il calcolo della traiettoria tramite integrazione rispetto al tempo è lasciato come esercizio.

**Example 5.2.** Campo magnetico costante ed uniforme

Il caso di un campo magnetico uniforme si riesce a risolvere facilmente:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = q\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}$$

Ora, osservando come $\vec{F}\cdot\vec{v}=0$ anche nel caso relativistico, dobbiamo dedurre che l'energia, e quindi $\gamma$, e infine anche il modulo della velocità rimangano costanti.

L'equazione del moto diventa allora:

$$m\gamma\frac{d\vec{v}}{dt} = q\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}$$

La soluzione di questa equazione è un vettore $\vec{v}$ rotante in senso orario (se q è positiva, antiorario altrimenti) intorno alla direzione di $\vec{B}$ con velocità angolare $\omega = \frac{qB}{mc\gamma}$. A parte il fattore $c$, dovuto all'uso del sistema cgs, questa espressione differisce dall'espressione solita della frequenza di Larmor per un fattore $\gamma$ al denominatore.

La traiettoria corrisponde all'elica del caso non relativistico, dove però stavolta la relazione tra raggio e componente trasversa della velocità è data da: $v_T = \omega R = \frac{qB}{mc\gamma}R$, mentre il passo dell'elica è $d = v_\| \frac{2\pi}{\omega} = v_\| \frac{2\pi mc\gamma}{qB}$. Si noti che in termini del momento della particella, le relazioni rimangono identiche a quelle del caso classico: $R = \frac{mc}{qB}P_T$, $d = P_\| \frac{2\pi mc}{qB}$.

5.1. **Ottica relativistica.** Dalle equazioni di trasformazione dei campi si ricava facimente che le quantità $\vec{E}\cdot\vec{B}$ ed $E^2 - c^2B^2$ sono invarianti.

Questa relazione è particolarmente importante nel caso delle onde elettromagnetiche: infatti i campi di un'onda elettromagnetica sono ortogonali ed inoltre i moduli dei campi elettrico e magnetico soddisfano alla relazione $E^2 = c^2B^2$: i due invarianti quindi sono nulli, e tali rimangono in tutti i sistemi di riferimento. Quindi, un'onda elettromagnetica rimane tale in tutti i sistemi di riferimento. Possiamo adesso esaminare cosa succede alla fase: sappiamo che questa è uguale, a meno di una costante, a $-(\omega t - \vec{k}\vec{x})$. Ora, la fase deve ragionevolmente essere un invariante: infatti, se consideriamo un intervallo di tempo in cui un'onda compie un certo numero di cicli, è ragionevole pensare che questo numero rimanga lo stesso in tutti i sistemi di rierimento, anche se l'intervallo di tempo ovviamente cambia: possiamo pensare ad esempio di prendere un contatore, che conti il numero di massimi e minimi di un'onda tra due successive pressioni di un pulsante: ovviamente in un altro sistema di rierimento l'intervallo di tempo tra le pressioni del pulsante cambierà, ma il numero scritto sul display del contatore non cambierà. Allora, possiamo pensare di scrivere la fase nella forma $(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x}) = \underline{x}\cdot\underline{\kappa}$, dove $\underline{\kappa}$ è un quadrivettore di componenti $(\omega/c, \vec{k})$.

A questo punto sappiamo come si modifica la frequenza e la direzione di un'onda elettromagnetica nel passaggio da un sistema di riferimento all'altro: basta applicare le trasformazioni di Lorentz!

$$\begin{aligned} \omega' &= \gamma(\omega - vk_x) \\ k'_x &= \gamma(k_x - \tfrac{v}{c^2}\omega) \\ k'_y &= k_y \\ k'_z &= k_z \end{aligned}$$

Vediamo un esempio pratico: supponiamo di osservare un'onda elettromagnetica emessa da una sorgente che si muove con velocità $\vec{v}$ che si trova in direzione $\hat{n}$. Allora $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\hat{n}$, per cui $\omega' = \gamma\omega(1 - \frac{v}{c}\cos\theta)$, dove $\theta$è l'angolo tra $\vec{v}$ ed $\hat{n}$.

Quindi la frequenza osservata $\nu$ è legata alla frequenza emessa $\nu'$ dall'equazione

$$\nu' = \frac{\nu}{\gamma(1 - \frac{v}{c}\cos\theta)}$$

Questa formula è conosciuta come *effetto Doppler relatistico* : differisce dall'effetto doppler soprattutto per la presenza del fattore $\gamma$. La verifica sperimentale della presenza di questo fattore è stata effettuata nel 1938 in un esperimento di Ives e Stilwell che confrontava l'emissione degli atomi di idrogeno in direzione longitudinale e perpendicolare allla direzione di moto.

Le trasformazioni di Lorentz mostrano anche come la direzione dell'onda, definita $\vec{k}$, cambi nel passaggio da un sistema di riferimento all'altro: si tratta dell'aberrazione della luce, non spiegabile applicando le trasformazioni galileiani alla fase dell'onda.

Si ha ad esempio:

$$\cos\theta' = \frac{k'_x}{\omega'} = \frac{\gamma\,(k_x - \beta\omega)}{\gamma\,(\omega - \beta k_x)} = \frac{\cos\theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}$$

e si verifica che per velocità piccole rispetto a quelle della luce si ottiene la formula classica dell'aberrazione $\Delta\theta = \frac{v}{c}\sin\theta$

## 6. Oltre la relatività ristretta: il principio di equivalenza.

La formulazione della relatività ristretta non lasciò del tutto soddisfatto Einstein: rimanevano infatti alcuni punti da chiarire: in particolare risultava insoddisfacente il ruolo privilegiato svolto dai sistemi di riferimento inerziali. Cos'è, insomma, un sistema di riferimento inerziale, e perchè non possiamo descrivere le leggi della natura a partire da un sistema di riferimento qualunque, anche accelerato o rotante?

Inotre la legge di Newton si sposava male con i principi della relatività ristretta a causa dell'azione istantanea delle forze, incompatibile con una velocità finita della luce.

La soluzione giunse ad Einstein dal cosiddetto principio di equivalenza, princopo in realtà ben conosciuto ma al quale non era stato dato il giusto peso negli anni precedenti.

Il principio di equivalenza trae origine dall'uguaglianza sperimentale tra massa inerziale e massa gravitazionale. Vediamo di cosa si tratta: sappiamo che nella meccanica newtoniana la forza gravitazionale tra due corpi è proporzionale alla loro massa:

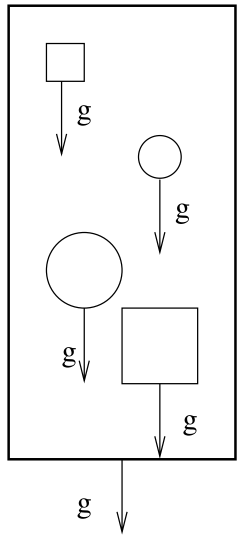
$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r} \tag{6.1}$$

Ma la stessa massa interviene nella seconda legge della dinamica, applicata ad esempio alla alla massa $m_1$: $\vec{F}_{12} = m_1\vec{a}$, per cui eguagliando le due espressioni il risultato si semplifica:

$$\vec{a}_1 = G\frac{m_2}{r^2}\hat{r}$$

Ora, non esiste nessun motivo al mondo per cui la massa cosiddetta inerziale, ovvero quella che interviene nel secondo principio della dinamica, debba essere uguale a quella che interviene nella forza gravitazionale: potrebbe ad esempio esserci una piccola differenza dovta alla diversa proporzione di protoni e neutroni con cui sono composti materiali diversi. Eppure, si verifica con

FIGURA 6.1. L'"ascensore di Einstein": all'interno della cabina tutti gli oggetti cadono con la stessa accelerazione: se sono fermi, sembrano fluttuare in assenza di peso; se sono in moto, sembrano muoversi di moto traslatorio uniforme.



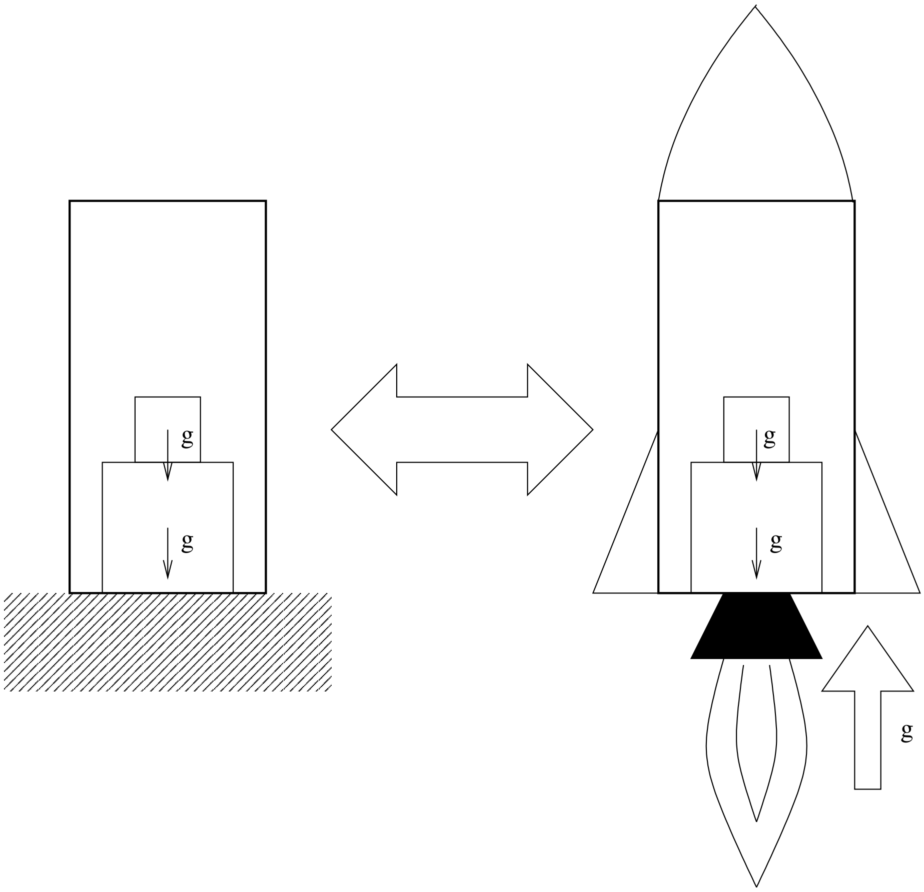

dei bellissimi esperimenti (come quelli di Eötvös nel 1909 e i successivi raffinamenti ad opera di Dicke) che la massa inerziale e quella gravitazionale sono la stessa identica cosa.

A partire da questo fatto, si innesca il ragionamento di Einstein: supponiamo infatti di trovarci all'interno di una cabina (il famoso "ascensore di Einstein") completamente chiusa (vedi figura 6.1). Supponiamo che questa cabina stia cadendo nel campo gravitazionale: allora tutti gli oggetti presenti all'interno viaggeranno verso il basso con la stessa identica accelerazione, e, se inizialmente fermi, con la stessa identica velocità: pertanto ci appariranno fluttuare intorno a noi. Noi stessi non sentiremo nessuna pressione esercitata dai nostri piedi verso il pavimento, in quanto anche il pavimento dell'ascensore starà viaggiando con la nostra stessa velocità. Dalla nostra posizione all'interno dell'ascensore, completamente oscurato e senza possibilità di guardar fuori, dopo un primo momento di panico cominciamo a ragionare: e allora, vedendo gli oggetti fluttuare, pensiamo che forse semplicemente qualcuno ha in qualche modo spento la gravità, e probabilmente ci troviamo nello spazio fluttuanti molto lontani da qualsiasi corpo di grande massa. Ci corgioliamo in questa illusone finchè.... la cabina precipita al suolo! Da questa storiella si può dedurre un fatto molto importante: all'interno dell'ascensore non siamo in grado di capire, senza guardar fuori, se stiamo cadendo liberamente nel campo gravitazionale se ci troviamo in una regione di spazio in cui i campi gravitazionali sono nulli: un sistema di riferimento non inerziale, che si muove soggetto alle sole forze gravitazionali, è indistingubile da un sistema di riferimento inerziale in cui la gravità è assente[6].

Immaginiamo adesso di essere sempre all'interno nell'ascensore, ma di non avvertire nulla di strano: la pressione esercitata sul pavimento dai nostri piedi è assolutamente identica a quella

[6] L'"esperienza" della caduta ci ricorda che quando entrano in gioco altre forze, oltre a quelle gravitazionali, la situazione cambia...

FIGURA 6.2. Un campo gravitazionale uniforme (a sinistra) è indistinguibile da un sistema di riferimento non inerziale con accelerazione $g$ diretta verso l'alto (a destra).

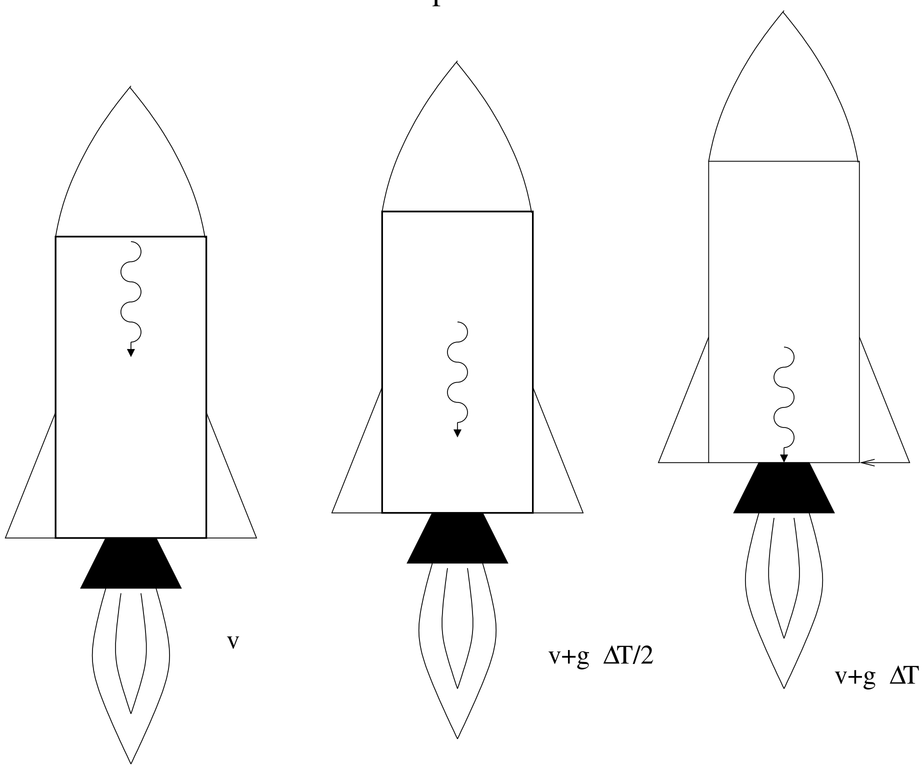



che sentiamo normalmente stando in piedi sul pavimento. Concludiamo pertanto che la cabina è ferma. Però dopo un po' pensiamo che forse in realtà ci troviamo nello spazio profondo, su un razzo che imprime alla cabina e a noi una accelerazione g diretta verso l'alto: in questo caso, come si sa dallo studio dei sistemi di riferimento non inerziali, nascerebbe sui corpi una forza apparente di modulo $mg$, diretta in direzione opposta all'accelerazione della cabina (vedi figura 6.2).

L'intuizone di Einstein fu quella di capire che non esiste modo di distinguere, dall'interno dell'ascensore, se ci si trova in presenza di un campo gravitazionale o in un sistema di riferimento non inerziale: sotto opportune ipotesi, le due situazioni sono equivalenti[7]. In particolare, in un

[7] L'affermazione va meglio precisata: in realtà è possibile distinguere tra le due situazioni, a patto di trovarsi in un ascensore sufficentemente grande: infatti in un ascensore accelerato la forza apparente $mg$ è la stessa in ogni punto della cabina, mentre in un ascensore poggiato sulla superficie terrestre il campo in alto è leggermente inferiore di quello sul pavimento: quindi queste osservazioni sono limitate ad una regione di spazio limitata, ovvero sono di carattere *locale*.

FIGURA 6.3. In un razzo accelerato verso l'alto un fotone emesso dal soffitto viene ricevuto circa $\Delta t$ secondi dopo: in questo intervallo il razzo ha aumentato la velocità di $\Delta v = g\Delta T$, e quindi il fotone apparirà di frequenza maggiore al suo arrivo al pavimento. Ma si è già visto che un razzo accelerato è equivalente al suo interno ad un razzo fermo sulla superfice della Terra....




sistema di riferimento in caduta libera in un campo gravitazionale, e quindi in assenza di altre forze, gli effetti del campo gravitazionale si azzerano.

Il principio di relatività generale esprime dunque l'equivalenza tra inerzia e gravità.

Già da questo principio, è possibile trarre alcune conseguenze interessanti.

Supponiamo ad esempio che sul soffitto del famoso ascensore, di altezza $h$, fermo sulla superficie della terra, si trovi una sorgente di luce di frequenza $\nu_0$. Questa luce viene inviata verso il pavimento (vedi figura 6.3). Ora, il principio di equivalenza ci dice che questa situazione è equivalente a quella che avremmo se l'ascensore fosse accelerato con accelerazione $g$ verso l'alto: ma in questo caso, se all'istante di partenza la cabina avesse avuto una velocità $v_0$, nell'istante in cui la luce raggiunge il pavimento avrebbe una velocità circa pari a $v_0 + g\Delta T$, dove $\Delta t$ è il tempo che la luce impiega ad andare dal soffitto al pavimento , ovvero $h/c$(nell'ipotesi in cui le velocità in gioco siano piccole rispetto a $c$).

Quindi un rilevatore sul pavimento, nell'istante in cui riceve la radiazione, viaggerà ad una velocità $gh/c$ di quella che era la velocità della sorgente all'istante di emissione: si prevede pertanto, a causa dell'effetto Doppler, un di osservare un aumento della frequenza $\Delta\nu = \nu_0 \Delta v/c = \nu_0 gh/c^2$: la luce aumenta la sua frequenza man mano che "cade" in un campo gravitazionale.

Questo fenomeno è stato verificato tramite un esperimento di Pound e Rebka, in cui emettitore e ricevitore si trovavano sul tetto e sul pavimento della Jefferson Tower nel campu di Harvard, alta 22 metri e mezzo.

Esiste un ragionamento alternativo che consente di predire il cosiddetto "red-shift "gravitazionale: si immagini un oggetto di massa M ad altezza h rispetto al suolo. Si inviano due fotoni di frequenza $\nu$, uguali ma opposti in direzione, in modo da non trasferire quantità di moto all'oggetto: dopo l'assorbimento, l'oggetto avrà massa $M' = M + 2h\nu/c^2$. Si trasferisce l'oggetto al suolo estraendo il lavoro $M'gh$; dopo di ciò si i due fotoni assorbiti vengono riemessi riottenendo l' energia fornita all' inizio, e il corpo viene ripostato all'altezza $h$, compiendo il lavoro $Mgh$: in questo modo, siamo tornati alla situazione precedente ed abbiamo ricavato il lavoro $(M' - M)gh = 2h\nu gh/c^2$. Per salvare la conservazione dell' energia dobbiamo supporre che i fotoni emessi non abbiano la stessa frequenza $\nu$ ma una frequenza $\nu' = \nu gh/c^2$. Ma la frequenza di assorbimento e di emissione di un fotone dipende dalle frequenze di vibrazione interna degli atomi, che quindi sembrano cambiare in modo dipendente dal campo gravitazionale: se l'oggetto di massa M fosse ad esempio uno degli atomi adoperati in un orologio al Cesio, avremmo che il tempo segnato da questo risulterebbe più lento quanto più in alto si trova.....

Supponiamo adesso di avere una cabina in caduta libera verso il sole. Un raggio di luce viene emesso dal lato sinistro della cabina, parallelamente al pavimento, e raggiunge il lato destro. Supponiamo, per semplicità, che all'istante di emissione la velocità della cabina relativa al sole sia esattamente zero (è possibile ad esempio che la cabina sia stata lanciata verso l'alto e che incominci la discesa). Gli occupanti della cabina non sanno se si trovano in caduta libera, o nello spazio vuoto privo di campi gravitazionali: osservano quindi il raggio procedere dritto, rimanendo sempre alla stessa altezza rispetto al pavimento. Un osservatore fermo rispetto al sole però vede la cabina scendere di una quantità $y = \frac{1}{2}gt^2$, dove $t$ è il tempo trascorso dall'emissione. Nel tempo $t$ il raggio ha percorso la distanza $x = ct$, per cui viene visto spostato verso il basso di una quantità $y = \frac{1}{2}g\frac{x^2}{c^2}$: si conclude che il raggio di luce non procede secondo una linea retta, ma bensì lungo una traiettoria approssimativamente parabolica: i campi gravitazionali attraggono i raggi di luce.

Anche questa previsione della relatività fu verificata da una famosa spedizione scientifica nel 1919 guidata da Sir Arthur Eddington durante la quale venne osservata per la prima volta la deflessione dei raggi luminosi proenienti da stelle lontane nel passare vicino alla suerficie del Sole.

Questa però non è la fine della storia: in fondo non abbiamo fatto altro che applicare il principio di equivalenza alla luce, senza entrare nel merito della natura della gravità.

Einstein fece quest'altro passo: abbiamo visto come il tempo proprio viene definito come il modulo quadro della separazione tra due eventi. Ora scopriamo che il tempo proprio segnato da un orologio dipende dal potenziale gravitazionale a cui questo si trova. Quindi dobbiamo concludere che nel fare il modulo quadro di un quadrivettore dobiamo in qualche modo tenere conto del potenziale gravitazionale: la gravità modifica la metrica dello spazio tempo!

Per capire, in linguaggio comune, cosa significa una cosa del genere, si pensi a due punti su una superficie: se la superficie è piana, il percorso più breve tra i due punti è una retta, e la distanza si calcola con l'usuale formula pitagorica; se invece la superficie è curva, il percorso più breve tra i due punti dipende da come la superficie è curvata, e così pure la distanza risultante tra i due punti. Quindi dire che la distanza (quadridimensionale) tra due punti dipende dal campo gravitazionale significa dire he lo spazio quadridimensionale è curvo, e che la sua curvatura dipende dall'intensità del campo gravitazionale stesso.

Il quadro dipinto da Einstein nella sua teoria è quindi il seguente:

(1) I sistemi di riferimento inerziali non sono altro che sistemi di riferimento in caduta libera nel campo gravitazionale
(2) Lo spazio tempo non è piatto: la sua "distanza" non è definita dalla semplice definizione di Minkowsky, ma deve tenere conto del campo gravitazionale.
(3) I corpi seguono, in assenza di altre forze, quelle linee per cui il tempo proprio è massimo: queste linee costituiscono le geodetiche dello spazio quadridimensionale.
(4) Il modo esatto in cui lo spazio viene curvato dalla presenza della materia è l'ultima caratteristica da determinare, ed Einstein vi giunge tramite considerazioni teoriche molto raffinate.

Da notare che i soli punti 1, 2 e 3 non consentono di determinare esattamente il punto 4: la relatività generale non è che uno dei tanti possibili modi di collegare la presenza della materia alla curvatura dello spazio: esistono altre teorie che soddisfano ai criteri 1 , 2 e 3, e sono dette teorie metriche gravitazionali, ma solamente una di queste è la relatività generale. allo stato atuale degli esperimenti, non esiste nessuna evidenza sperimentale che descrimini in modo certo una teoria dalle altre, ma comunque la relatività generale così come Einstein l'aveva concepita nel 1916 rimane la favorita.

Tenendo conto della curvatura dello spazio, i risultati trovati per la deflessione angolare risultano il doppio di quelli calcolati utilizzando il solo principio di equivalenza. La spedizione di Eddington del 1919 misurò esattamente il risultato previsto dalla teoria di Einstein, tenendo conto della curvatura dello spazio; i numerosi esperimenti successivi, basati non più sula luce visibile ma sulle eissioni radio non hanno fatto altro che confermare questo risultato.

Ma il primo successo della teoria della relaitvità generale fu la spiegazione della precessione dell'orbita di Mercurio: infatti era noto da dati osservativi che l'orbita di mercurio routava di circa 574" in un secolo. Le correzioni dovute all'influenza di altri pianeti o alla non perfetta sfericità del Sole permettevano di spiegare 531", mentre i rimanenti 43" rimanevano misteriosi. Einstein si convinse di essere sulla giusta strada quando si rese conto che la sua teoria era in grado di prevedere esattamente questo risultato.

Attualmente, la relatività generale gode di una serie di verifiche sperimentali notevole: manca però la scoperta delle onde gravitazionali previste dalla teoria. Per raggiungere questo traguardo, diversi esperimenti stanno lavorando in tutto il mondo: uno di questi è l'interferometro Virgo costruito nella campagna pisana.

## 7. BIBLIOGRAFIA:

Il numero di libri che cercano di spiegare la relatività a livello semplice è sterminato: basti scorrere la lista degli autori per rendersi conto di come neanche i grossi nomi sfuggivano alla tentazione di cercare di rendere la relatività comprensibile al grosso pubblico. Cominciamo con lo stesso Einstein con il classico “Relatività, esposizione divulgativa”, pubblicato in Italia da Bollati-Boringhieri; passiamo poi per un testo di Bertrand Russel “l’ABC della relatività” , pubblicato da Longanesi; troviamo tra gli altri autori Lev Landau (“Che cos’è la relatività“, pubblicato da Editori Riuniti, ma ormai fuori catalogo), Martin Gadner, ( “Che cos’è la relatività”, Sansoni, fuori catalogo), e persino Julian Schwinger (“L’eredità di Einstein”, Zanichelli, 1988).

Eistono, in alternativa a questi, molti altri testi più moderni, e forse più leggibili, come “La relatività con le quattro operazioni”, di Clement Durell, Bollati boringhieri.

Un testo dalla lettura impegnativa, ma che spiega la relatività ristretta e generale limitando l’uso delle formule è: TAYLOR Edwin F , WHEELER John Archibald “Fisica dello spazio-tempo; Introduzione alla relatività speciale”, Zanichelli, 1996.

Per quanto riguarda l’esposizione della relatività a livello universitario, un qualunque manuale adoperato nei corsi di meccanica ed elettromagnetismo dovrebbe servire allo scopo. Personalmente ho trovato informazioni illuminanti nei libri di L. Picasso (“Lezioni di Fisica”, voll. 1 e 2 , ETS)

Per gli insegnanti, si consiglia caldamente la lettura del quaderno 16 della rivista “La Fisica nella scuola” pubblicata a cura dell’ ”Associazione per Insegnamento della Fisica”: si tratta di un volume monografico che ripubblica una serie di lezioni di Elio Fabri dal titolo “Insegnare la fisica nel XXI secolo”, che offre una serie di spunti e di idee interessanti per la pratica dell’insegnamento nelle superiori. Cercando nel sito della associazione, è persino possibile trovare una versione preliminare delle lezioni in formato pdf.