

Oscillazioni dei neutrini

Ammettiamo che gli autostati dell'interazione debole: ν_e, ν_μ, ν_τ non coincidano con gli stati di massa definita, che chiameremo: ν_1, ν_2, ν_3 . Chiamiamo U la matrice unitaria che connette i due insiemi; avremo allora:

$$\nu_\alpha = \sum_j U_{\alpha j} \nu_j \quad (1)$$

$$\nu_j = \sum_\beta U_{j\beta}^\dagger \nu_\beta \quad (2)$$

dove $\alpha, \beta = e, \mu, \tau$.

Ammetteremo che ciascun autostato di massa $|j\rangle$ sia in un autostato dell'impulso (P) e che quindi abbia un'energia data da $E_j = \sqrt{P^2 + m_j^2}$.

La matrice di mixing U è in generale complessa, se CP è violato.

La relazione 1, scritta in forma esplicita. è:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Nel caso generale in cui CP sia violato, e di conseguenza U sia complessa, questa viene spesso parametrizzata nella forma (analoga a quella adoperata per descrivere il mixing nel settore dei quark: matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa):

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (4)$$

dove si è fatto uso delle abbreviazioni:

$$c_{ij} = \cos \theta_{ij}$$

$$s_{ij} = \sin \theta_{ij}$$

Con questo formalismo, il mixing viene a dipendere solo dai tre angoli di mixing $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ e dalla fase δ che descrive la violazione di CP.

Un neutrino di flavour definito (e.g. α), prodotto all'istante $t=0$, può esser espresso come combinazione lineare degli autostati di massa, usando la 1. In assenza di interazioni, ciascun autostato di massa sarà descritto da un'onda piana:

$$|\nu_j\rangle_t = |\nu_j\rangle_0 \exp[i(Px - E_j t)] \quad (5)$$

dove E_j è l'energia dello stato j — mo di massa definita m_j , P il suo impulso (che si suppone uguale per tutti gli stati la cui sovrapposizione costituisce il neutrino prodotto con flavour definito) e dove la "i" è l'unità immaginaria. Il fattore $\exp(iPx)$, comune a tutti gli autostati di massa, costituisce una fattore di fase globale che d'ora in avanti potrà esser trascurato.

All'istante t , lo stato che era stato prodotto per $t = 0$ come autostato α del flavour, sarà allora esprimibile nella forma:

$$|\nu_\alpha\rangle_t = \sum_j U_{\alpha j} \exp[-iE_j t] |\nu_j\rangle_0 \quad (6)$$

Se effettuiamo un esperimento che misura il flavour dello stato al tempo t , troveremo per l'ampiezza di probabilità di un flavour β :

$$A(\alpha \rightarrow \beta) = \langle \nu_\beta | \nu_\alpha \rangle_t = \sum_j U_{\alpha j} \exp[-iE_j t] \langle \nu_\beta | \nu_j \rangle_0 \quad (7)$$

Il termine $\langle \nu_\beta | \nu_j(0) \rangle$ rappresenta l'ampiezza di probabilità di trovare il flavour $\langle \nu_\beta |$ in un sistema nello stato $|\nu_j(0)\rangle$. Facendo ora uso della 2, troviamo:

$$A(\alpha \rightarrow \beta) = \sum_j U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp[-iE_j t] \quad (8)$$

La probabilità di trovare dopo un tempo t un neutrino di flavour β , partendo a $t = 0$ con uno di flavour α è il modulo quadro di tale ampiezza, cioè:

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}(t) &= \left| \sum_j U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp[-iE_j t] \right|^2 = \\ &= \left(\sum_j U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp[-iE_j t] \right) \left(\sum_k U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \exp[+iE_k t] \right) = \\ &= \sum_{jk} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \exp[-i(E_j - E_k)t] \end{aligned}$$

Notiamo ora che:

$$\begin{aligned} E_j &= \sqrt{P^2 + m_j^2} \simeq P \left(1 + \frac{m_j^2}{2P^2} \right) \\ E_k &= \sqrt{P^2 + m_k^2} \simeq P \left(1 + \frac{m_k^2}{2P^2} \right) \end{aligned}$$

per cui:

$$E_j - E_k \simeq \frac{m_j^2 - m_k^2}{2P} \simeq \frac{m_j^2 - m_k^2}{2E} \equiv \frac{\delta m_{jk}^2}{2E}$$

L'ultima relazione scritta diventa allora:

$$P_{\alpha\beta}(t) =$$

$$= \sum_{jk} \Re \left\{ U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \right\} \cos \left(\frac{\delta m_{jk}^2}{2E} t \right) + \sum_{jk} \Im \left\{ U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \right\} \sin \left(\frac{\delta m_{jk}^2}{2E} t \right)$$

Facciamo ora uso dell'equazione:

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

per riscrivere l'ultima equazione nella forma:

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}(t) &= \\ &= \sum_{jk} \Re \left\{ U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \right\} - 2 \sum_{jk} \Re \left\{ U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \right\} \sin^2 \left(\frac{\delta m_{jk}^2}{4E} t \right) + \\ &+ \sum_{jk} \Im \left\{ U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \right\} \sin \left(\frac{\delta m_{jk}^2}{2E} t \right) \end{aligned}$$

I termini con $j = k$ nelle due sommatorie contenenti i termini sinusoidali sono ovviamente nulli. Data poi la simmetria rispetto ad uno scambio di j con k , possiamo limitarci ad effettuare la somma dei termini con $j \neq k$, limitandoci a sommare su quelli con $j > k$ e moltiplicando poi per 2. Inoltre il termine $\sum_{jk} \Re \left\{ U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \right\}$ è uguale a $\delta_{\alpha\beta}$. Otteniamo in tal modo:

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}(t) &= \\ &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j>k} \Re \left\{ U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \right\} \sin^2 \left(\frac{\delta m_{jk}^2}{4E} t \right) + \\ &+ 2 \sum_{j>k} \Im \left\{ U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \right\} \sin \left(\frac{\delta m_{jk}^2}{2E} t \right) \end{aligned}$$

Ripristinando i fattori $\hbar$ e c ignorati, l'argomento del primo dei due termini sinusoidali può esser riscritto come:

$$1.267 \delta m_{jk}^2 (eV^2) L(m) / E(MeV)$$

dove L è il tratto percorso dal neutrino nel tempo t . L'argomento del secondo termine sinusoidale è ovviamente doppio del primo.

In definitiva, la probabilità che lo stato α evolva nello stato β (con $\alpha \neq \beta$) dopo un tratto L , è:

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}(L) &= \tag{9} \\ &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j>k} \Re \left\{ U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \right\} \sin^2 \left(1.267 \frac{\delta m_{jk}^2 L}{E} \right) + \\ &+ 2 \sum_{j>k} \Im \left\{ U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \right\} \sin \left(2.534 \frac{\delta m_{jk}^2 L}{E} \right) \end{aligned}$$

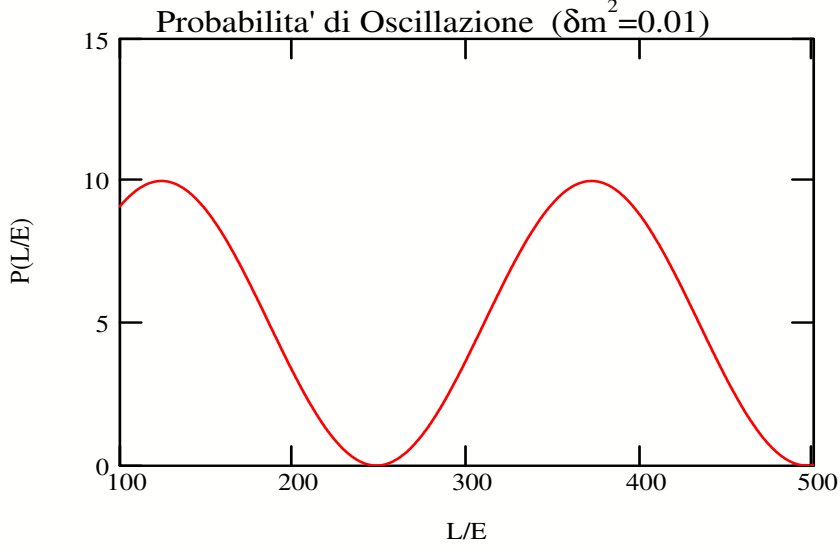


Figure 1:

dove δm_{jk}^2 è espresso in eV^2 , L in metri ed E in Mev (o equivalentemente, L in chilometri ed E in Gev).

L'andamento di uno generico dei termini nella sommatoria a secondo membro in tale espressione, al variare di L/E , è di tipo sinusoidale, come si può vedere in figura 1.

La lunghezza d'oscillazione è:

$$\lambda_{jk} = \pi E / 1.267 \delta m_{jk}^2 = 2.48 E / \delta m_{jk}^2 \quad (10)$$

Notiamo che δm_{ij}^2 e quindi λ_{ij} possono esser negativi. L'espressione 9 non consente di determinare il loro segno.

Nell'espressione 9 sono presenti, nel caso di tre neutrini, tre diversi termini oscillanti, corrispondenti alle tre differenze di masse quadre:

$$\delta m_{21}^2 = m_2^2 - m_1^2$$

$$\delta m_{31}^2 = m_3^2 - m_1^2$$

$$\delta m_{32}^2 = m_3^2 - m_2^2$$

dove:

$$\delta m_{21}^2 + \delta m_{32}^2 = \delta m_{31}^2 = -\delta m_{13}^2$$

Un caso particolarmente interessante è quello in cui, delle due differenze di masse quadre indipendenti, una sia molto minore delle altre. Ammettiamo ad esempio che sia:

$$\delta m_{21}^2 \ll \delta m_{32}^2 \approx \delta m_{31}^2$$

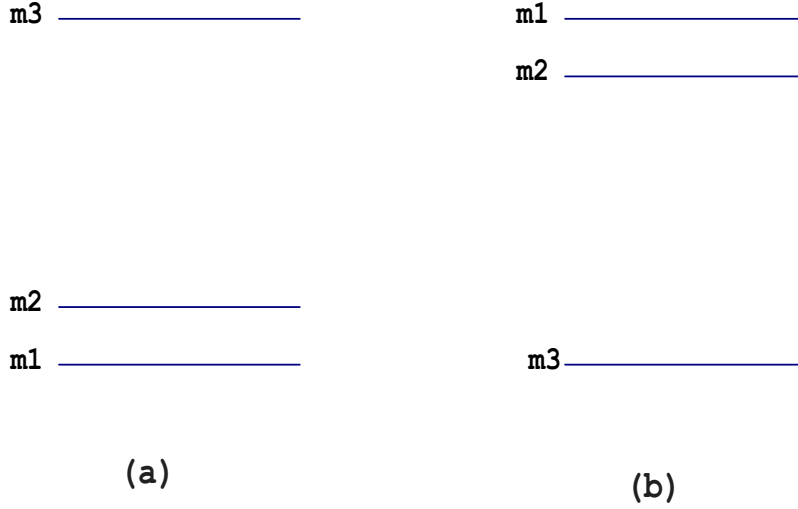


Figure 2:

Questa situazione può corrispondere ad una delle due configurazioni (a) o (b) mostrate in figura 2.

In tal caso, delle tre lunghezze d'oscillazione presenti nella 9, una è molto maggiore delle altre due. Più precisamente avremo:

$$|\lambda_{12}| = 2.48 \frac{E}{|\delta m_{12}^2|} \gg |\lambda_{32}| = 2.48 \frac{E}{|\delta m_{32}^2|} \simeq |\lambda_{31}| = 2.48 \frac{E}{|\delta m_{31}^2|}$$

In tal caso, a distanze piccole rispetto a $|\lambda_{12}|$ ma grandi rispetto a $|\lambda_{32}|$ e $|\lambda_{31}|$, vedremo solo l'effetto delle oscillazioni associate alle differenze di massa δm_{32}^2 e δm_{31}^2 . Se viceversa siamo a distanze dell'ordine o maggiori di $|\lambda_{12}|$, vedremo l'effetto delle oscillazioni associate a tutte le differenze di massa.

1 Oscillazioni nel vuoto tra due soli flavours

Esaminiamo ora in dettaglio il caso delle oscillazioni tra due soli flavours di neutrini, e due soli autostati di massa.

Ammettendo che la matrice unitaria U che lega gli autostati del flavour a quelli di massa sia reale, scriveremo:

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \cos \theta |\nu_1\rangle + \sin \theta |\nu_2\rangle \\ |\nu_\mu\rangle &= -\sin \theta |\nu_1\rangle + \cos \theta |\nu_2\rangle \end{aligned} \tag{11}$$

Dove θ è l'angolo di mescolamento. Si può verificare che $\langle \nu_\mu | \nu_e \rangle = 0$. Poichè U è reale oltre che unitaria ($U^{-1} = U^T$) avremo:

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

per cui:

$$\begin{aligned} |\nu_1\rangle &= \cos\theta|\nu_e\rangle - \sin\theta|\nu_\mu\rangle \\ |\nu_2\rangle &= \sin\theta|\nu_e\rangle + \cos\theta|\nu_\mu\rangle \end{aligned}$$

Se ora un neutrino è prodotto nello stato ν_e all'istante $t = 0$:

$$|\nu(t=0)\rangle = |\nu_e\rangle$$

dopo un tempo t avremo:

$$|\nu(t)\rangle = \cos\theta e^{-iE_1t}|\nu_1\rangle + \sin\theta e^{-iE_2t}|\nu_2\rangle \quad (12)$$

con:

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2}$$

La probabilità che tale stato sia un ν_μ sarà:

$$|\langle\nu_\mu|\nu(t)\rangle|^2 = |\cos\theta e^{-iE_1t}\langle\nu_\mu|\nu_1\rangle + \sin\theta e^{-iE_2t}\langle\nu_\mu|\nu_2\rangle|^2$$

dove:

$$\langle\nu_\mu|\nu_1\rangle = -\sin\theta$$

$$\langle\nu_\mu|\nu_2\rangle = \cos\theta$$

per cui:

$$|\langle\nu_\mu|\nu(t)\rangle|^2 = 4\sin^2\theta \cos^2\theta \sin^2\frac{(E_1 - E_2)t}{2}$$

Se il neutrino è relativistico, $E_1 - E_2 = \frac{m_1^2 - m_2^2}{2P}$, per cui:

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu, t) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\delta m^2}{4P} t \quad (13)$$

Si sviluppa quindi una componente ν_μ , avente un'ampiezza massima $\sin^2 2\theta$, oscillante con periodo $T = \frac{4\pi P}{\delta m^2}$, corrispondente ad una lunghezza d'oscillazione:

$$L_{osc} = cT = 2.5m \times \frac{E_\nu(MeV)}{\delta m^2(eV^2)} \quad (14)$$

2 Oscillazioni in presenza di materia

Analizzeremo le oscillazioni in presenza di materia limitandoci al caso di due flavours, ν_e e ν_μ . Se fossimo nel vuoto, per un tale sistema, indicando con ν_1 e ν_2 gli autostati di massa, l'evoluzione temporale sarebbe data da:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} \quad (15)$$

con:

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \equiv P + \begin{pmatrix} \frac{m_1^2}{2P} & 0 \\ 0 & \frac{m_2^2}{2P} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Ricordiamo ora la relazione tra gli autostati di massa e quelli del flavour, nel caso di due neutrini:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

con:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (18)$$

Moltiplicando la 15 a sinistra per U :

$$i \frac{d}{dt} U \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} = U H \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} = U H U^\dagger U \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} \quad (19)$$

La matrice: $U H U^\dagger = U H U^{-1}$ vale:

$$H' = U H U^{-1} = P + \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (20)$$

dove, per brevità di scrittura, si è posto: $x_1 = \frac{m_1^2}{2P}$, $x_2 = \frac{m_2^2}{2P}$.

Sviluppando, troviamo:

$$U H U^{-1} = P + \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \cdot x_1 & -\sin \theta \cdot x_1 \\ \sin \theta \cdot x_2 & \cos \theta \cdot x_2 \end{pmatrix} = \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & P + \begin{pmatrix} \cos^2 \theta \cdot x_1 + \sin^2 \theta \cdot x_2 & \sin \theta \cos \theta \cdot (x_2 - x_1) \\ \sin \theta \cos \theta \cdot (x_2 - x_1) & \cos^2 \theta \cdot x_2 + \sin^2 \theta \cdot x_1 \end{pmatrix} = \\ & = P + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[2 \cos^2 \theta \cdot x_1 + 2 \sin^2 \theta \cdot x_2] & -\frac{1}{2} \sin 2\theta (x_1 - x_2) \\ \frac{1}{2} \sin 2\theta (x_1 - x_2) & \frac{1}{2}[2 \sin^2 \theta \cdot x_1 + 2 \cos^2 \theta \cdot x_2] \end{pmatrix} = \\ & = P + \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)(x_1 - x_2) & -\sin 2\theta (x_1 - x_2) \\ -\sin 2\theta (x_1 - x_2) & (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)(x_1 - x_2) \end{pmatrix} \quad (22) \end{aligned}$$

$$= P + \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} (x_1 - x_2) \quad (23)$$

Esplicitando i termini x_1 ed x_2 :

$$\begin{aligned} H' &= P + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4P} - \frac{m_1^2 - m_2^2}{4P} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} = \\ &= P + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4P} + \frac{m_2^2 - m_1^2}{4P} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

La matrice a secondo membro non è diagonale mentre, come sappiamo, lo è quella che descrive l'evoluzione degli autostati di massa.

La rotazione che diagonalizza la matrice a secondo membro è data da:

$$\frac{2H'_{12}}{H'_{22} - H'_{11}} = \tan 2\theta \quad (25)$$

In definitiva avremo:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = H' \begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} \quad (26)$$

con H' dato dalla 24.

Vediamo ora come questo risultato venga modificato dalla presenza di materia.

Ammettiamo per semplicità che la densità di materia sia uniforme, ed indichiamo con n_e la densità di elettroni (numero di elettroni per unità di volume). Le interazioni dei neutrini con la materia possono aver luogo o attraverso processi di *corrente carica* o di *corrente neutra*. A loro volta, le interazioni di corrente neutra possono aver luogo su elettroni, protoni e neutroni. Si può dimostrare che le ampiezze di scattering per interazioni di corrente neutra su elettroni e su protoni sono uguali e di segno opposto per ogni tipo di neutrino, per cui l'ampiezza netta si annulla se la materia è neutra. Le interazioni di corrente neutra su neutroni non si annullano, ma hanno uguale ampiezza $-\frac{1}{\sqrt{2}}G_F n_n$ per tutti i flavours di neutrini. Esse contribuiscono con un termine che non distingue quindi ν_e da ν_μ .

Passando ora ad esaminare le interazioni di corrente carica, queste sono assenti nel caso dello scattering di ν_μ su elettrone, neutrone e protone, alle energie dei neutrini solari, mentre nel caso dei ν_e l'ampiezza per scattering su elettrone è data da:

$$\sqrt{2}G_F n_e$$

dove G_F è la costante di Fermi. Tale termine va quindi aggiunto all'elemento $\langle \nu_e | \nu_e \rangle$ che compare nella matrice H' nella 26 (l'elemento H'_{11}).

In conclusione, in presenza di materia l'hamiltoniana 24 diviene:

$$\hat{H} = P - \frac{1}{\sqrt{2}}G_F n_n + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4P} + \begin{pmatrix} -\frac{\delta m_{21}^2}{4P} \cos 2\theta + \sqrt{2}G_F n_e & \frac{\delta m_{21}^2}{4P} \sin 2\theta \\ \frac{\delta m_{21}^2}{4P} \sin 2\theta & \frac{\delta m_{21}^2}{4P} \cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (27)$$

Vediamo che la matrice $\hat{H}$ non è diagonale nella base (ν_e, ν_μ) , analogamente alla matrice H' nel vuoto ma, a differenza di questa, non è diagonale neanche nella base (ν_1, ν_2) .

L'angolo che diagonalizza la matrice a secondo membro nell'ultima espressione è ora dato da:

$$\tan 2\hat{\theta} = \frac{2\hat{H}_{12}}{\hat{H}_{22} - \hat{H}_{11}} = \frac{\delta m_{21}^2 \sin 2\theta}{\delta m_{21}^2 \cos 2\theta - A}$$

dove:

$$A = 2\sqrt{2}G_F n_e P$$

Vediamo che l'angolo di mixing cambia nella materia. Il cambiamento diviene molto importante se $A = \delta m_{21}^2 \cos 2\theta$, cioè se la densità di elettroni è uguale a:

$$n_e = \frac{\delta m_{21}^2 \cos 2\theta}{2\sqrt{2}G_F P}$$

In tal caso infatti, anche se l'angolo di mescolamento nel vuoto fosse molto piccolo (il che vuol dire che il $|\nu_e\rangle \simeq |\nu_1\rangle$) esso diviene vicino a $\pi/4$ nella materia, cioè lo stato avrà uguali ampiezze $|\nu_e\rangle$ e $|\nu_\mu\rangle$. Si ha allora un mescolamento massimo.

I nuovi autovalori sono facilmente ottenibili dall'equazione:

$$\begin{pmatrix} \hat{H}_{11} - \lambda & \hat{H}_{12} \\ \hat{H}_{21} & \hat{H}_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Si trova (vedi appendice):

$$E_\alpha = |p| - \frac{1}{\sqrt{2}}G_F n_e + \frac{\hat{m}_\alpha^2}{2|p|}$$

dove:

$$\hat{m}_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left\{ (m_1^2 + m_2^2 + A) \pm \sqrt{(\delta m_{21}^2 \cos 2\theta - A)^2 + \delta m_{21}^4 \sin^2 2\theta} \right\}$$

Gli autostati di massa in presenza di materia sono funzioni della densità elettronica, contenuta nel parametro A .

La rotazione che l'autostato di massa ν_2 subisce nel piano $\nu_e - \nu_x$ (dove ν_x è quello che noi abbiamo arbitrariamente identificato con il ν_μ) via via che esso si muove all'interno del Sole, è mostrata in figura 3. Per alte densità elettroniche lo stato ν_2 coincide quasi con ν_e . Al diminuire della densità n_e il vettore ruota in verso orario e, alla risonanza, esso ha uguali ampiezze ν_e e ν_x . Quando infine la densità elettronica diviene molto bassa il vettore ν_2 viene a coincidere con ν_x .

La variazione dei due autostati in funzione di A , e quindi della densità elettronica n_e , è mostrata in figura 4.

L'angolo di mixing nella materia può anche essere espresso nella forma:

$$\tan 2\hat{\theta} = \frac{\delta m_{21}^2 \sin 2\theta}{\delta m_{21}^2 \cos 2\theta - 2\sqrt{2}G_F n_e P} =$$

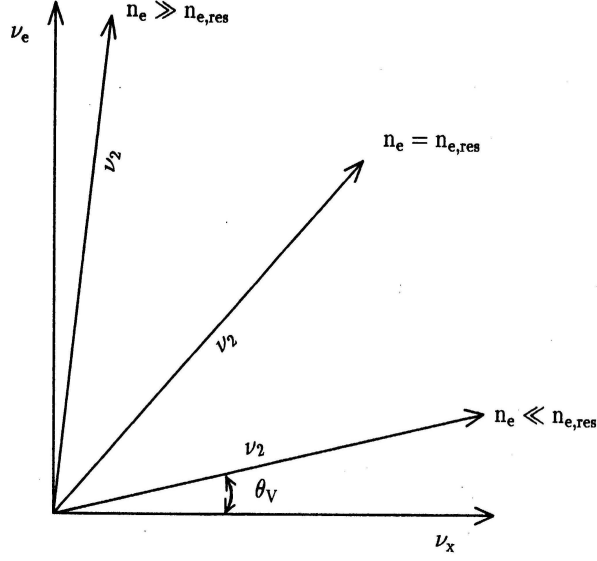


Figure 3:

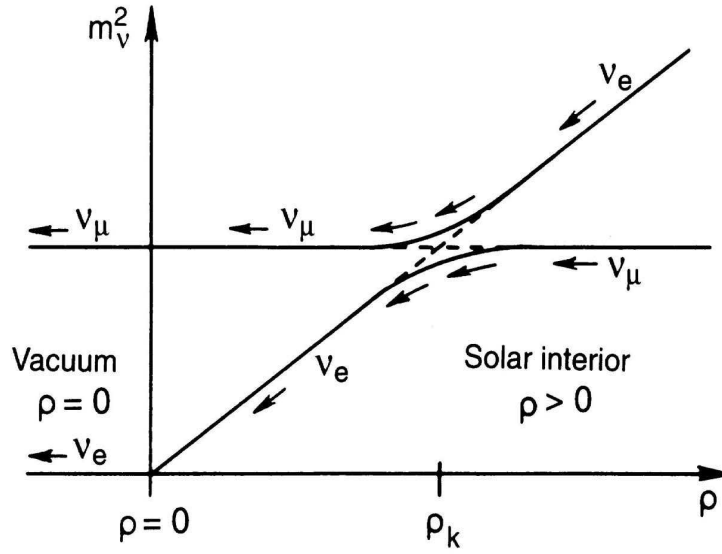


Figure 12.24. The MSW effect. The heavy mass eigenstate is almost identical to ν_e inside the Sun, in the vacuum however it is almost identical to ν_μ . If a significant jump at the resonance location can be avoided, the produced electron neutrino remains on the upper curve and therefore escapes detection in radiochemical experiments (after [Bet86]).

Figure 4:

$$= \frac{\tan 2\theta}{1 - \frac{2\sqrt{2}G_F n_e E}{\delta m_{21}^2 \cos 2\theta}} = \tan 2\theta \left(1 - \frac{4\pi E}{\delta m_{21}^2} \cdot \frac{\sqrt{2}G_F n_e}{2\pi \cos 2\theta} \right)^{-1} =$$

$$= \tan 2\theta \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0 \sec 2\theta} \right)^{-1} \quad (28)$$

dove si è posto $E \simeq P$. In questa equazione $\lambda = 4\pi E/\delta m_{21}^2$ è la lunghezza d'oscillazione nel vuoto, mentre $\lambda_0 = 2\pi/(\sqrt{2}G_F n_e)$ è una lunghezza che caratterizza la propagazione nella materia (lunghezza d'interazione per lo scattering neutrino-elettrone), indipendente dall'energia del neutrino. λ_0 può esser espresso come $1.77 \cdot 10^7/\rho y$ dove ρ è la densità in gcm^{-3} e y è il numero di elettroni per nucleone. Nel caso degli antineutrini, il termine aggiuntivo introdotto nella matrice dalla presenza della materia cambia segno; ne segue che il segno di λ_0 deve essere invertito.

Dalla 28, ponendo:

$$\lambda/\lambda_0 \equiv B = \frac{4\pi E}{\delta m_{21}^2} \cdot \frac{\sqrt{2}G_F n_e}{2\pi}$$

otteniamo:

$$\sin 2\hat{\theta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 2\theta}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(1-B/\cos 2\theta)^2}{\tan^2 \theta}}} = \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{1 + B^2 - 2B \cos 2\theta}}$$

e quindi:

$$\sin 2\hat{\theta} = \sin 2\theta \left(1 - 2(\lambda/\lambda_0) \cos 2\theta + (\lambda/\lambda_0)^2 \right)^{-1/2}$$

D'ora in avanti porremo $\hat{\theta} \equiv \theta_m$.

In termini di λ e λ_0 , la differenza tra gli autostati di massa nella materia è data da:

$$\delta \hat{m}_{21}^2 = \delta m_{21}^2 \left[1 - 2(\lambda/\lambda_0) \cos \theta + (\lambda/\lambda_0)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

La lunghezza d'oscillazione nella materia è ottenibile dalla relazione:

$$\frac{\lambda_m}{\lambda} = \frac{\delta m_{21}^2}{\delta \hat{m}_{21}^2}$$

da cui:

$$\lambda_m = \lambda \left[1 - 2(\lambda/\lambda_0) \cos 2\theta + (\lambda/\lambda_0)^2 \right]^{-1/2}$$

Notiamo che le oscillazioni nel vuoto tra due flavours di neutrini determinano solo δm^2 e $\sin^2 2\theta$, lasciando indeterminato sia il segno di δm^2 sia il quadrante cui appartiene l'angolo 2θ .

L'indeterminazione sull'angolo implica che, ad esempio nel caso dei neutrini solari, non siamo in grado di distinguere tra un valore θ e $\pi/2 - \theta$ per l'angolo di mixing. Ora, questi due valori corrispondono a situazioni fisiche radicalmente diverse. Se infatti $\theta < \pi/4$, allora nello stato $|\nu_e\rangle$ l'ampiezza $|\nu_1\rangle$ è quella che domina, mentre se è $\theta > \pi/4$ l'ampiezza che domina in $|\nu_e\rangle$ è la $|\nu_2\rangle$.

Le oscillazioni nella materia ci consentono di distinguere le due possibilità.

Notiamo alcune conseguenze dei risultati trovati:

1. se $|\lambda| \ll \lambda_0$, cioè se la lunghezza di oscillazione nel vuoto è molto più corta della lunghezza caratteristica della propagazione nella materia, allora $\hat{\theta} \approx \theta$ e $\hat{m}_{21}^2 \approx m_{21}^2$. In altri termini l'effetto della materia diviene trascurabile.
2. se $|\lambda| \gg \lambda_0$, allora $\hat{\theta} \approx 0$ e $\hat{\lambda} \approx 0$. In tal caso le oscillazioni sono fortemente sopresse dalla presenza della materia.
3. se $|\lambda| \approx \lambda_0$ l'effetto della materia diviene importante e può aiutare a determinare sia il segno di δm^2 che il quadrante cui appartiene l'angolo 2θ .
4. per un δm^2 fissato, λ dipende dall'energia E , mentre λ_0 non ne dipende; quindi λ/λ_0 cambia al cambiare dell'energia del neutrino. Per il particolare valore dell'energia per cui $\lambda/\lambda_0 = \cos 2\theta$ avremo:

$$\lambda_m = \lambda / \sin 2\theta$$

$$\tan 2\theta_m = \infty$$

Avremo quindi $\theta_m = \pi/4$ il che implica un mixing massimo. In tali circostanze abbiamo un'amplificazione dell'ampiezza di oscillazione; la probabilità diagonale di transizione si annulla alla distanza:

$$L = \lambda_m/2 = \lambda/(2 \sin 2\theta) = (\lambda_0/2) \cot 2\theta$$

Tale amplificazione delle oscillazioni può spiegare la soppressione osservata negli esperimenti che rivelano i neutrini solari. Ciò è stato proposto per la prima volta da Mikheyev e Smirnov. Essi hanno notato che, nella materia, la dipendenza di $\sin^2 2\theta_m$ e di λ_m dalla variabile $x = \lambda/\lambda_0$:

$$\sin^2 2\theta_m = \sin^2 2\theta / (1 - 2x \cos 2\theta + x^2)$$

ha un'andamento risonante, con un massimo per $x = \cos 2\theta$ ed una larghezza data da $\Delta x = 2 \sin 2\theta$. Quanto più piccolo è θ tanto più stretta è la risonanza. Inoltre, al decrescere di θ il valore di $\lambda/\lambda_0 = \cos 2\theta$, corrispondente al picco della risonanza, si avvicina all'unità.

La condizione di risonanza: $\lambda = \lambda_0 \cos 2\theta$ può esser messa nella forma:

$$\frac{4\pi E}{\delta m^2} = \frac{1.7 \cdot 10^9}{\rho y} \cos 2\theta$$

o anche:

$$\frac{E}{\delta m^2} \rho = a \cos 2\theta$$

con $a = 1.35 \cdot 10^6 / y$.

Consideriamo ora dei neutrini prodotti nella regione centrale del Sole, con uno spettro di energia quale quello ottenuto dai modelli solari, che si estende fino a circa 10-15 MeV. La parte dello spettro corrispondente ai neutrini di energia più elevata (circa 10 MeV) subirà un'amplificazione risonante se:

$$\rho / \delta m^2 \cos 2\theta = a / E \quad (29)$$

Ciò implica che, per dati δm^2 e $\cos 2\theta$ si avrà un'amplificazione risonante per quei neutrini che sono stati prodotti in una regione avente una densità data da:

$$\rho = \delta m^2 \cos 2\theta a / E \quad (30)$$

Tenendo conto anche della larghezza $\Delta(\lambda/\lambda_0) = 2 \sin 2\theta$ troviamo che il range di valori che ρ deve avere (fissati δm^2 , $\cos 2\theta$ ed E) perchè si abbia amplificazione risonante è:

$$\rho - \Delta\rho \rightarrow \rho + \Delta\rho \quad (31)$$

con:

$$\Delta\rho = a \sin 2\theta \delta m^2 / E \quad (32)$$

La densità ρ dovrebbe avere tale valore in uno spessore R_{res} almeno uguale alla lunghezza λ_m di oscillazione nella materia:

$$R_{res} > \lambda_m = \lambda / \tan 2\theta = 4\pi E / \delta m^2 \tan 2\theta \quad (33)$$

Per un dato valore dell'energia E l'equazione 30 fornisce il massimo valore che il prodotto $\delta m^2 \cos 2\theta$ può avere perchè l'amplificazione risonante sia possibile: tale massimo corrisponderà al massimo valore della densità nel sole ($\approx 100g/cm^3$ al centro). Per i neutrini di energia più elevata prodotti in questa regione del sole il limite superiore su $\delta m^2 \cos^2 2\theta$ è $4 \cdot 10^{-4} eV^2$. Per un fissato valore di E , al diminuire di δm^2 lo strato risonante si sposta verso strati più superficiali, dove la densità è minore.

D'altro canto la 33 ci dice quale dovrà essere il minimo valore che, a parità di energia E , il prodotto $\delta m^2 \tan 2\theta$ può avere perchè l'oscillazione risonante possa aver luogo:

$$\delta m^2 \tan 2\theta \geq 4\pi E / R_{res} \geq 4\pi E_{min} / R_s$$

dove E_{min} è la minima energia dei neutrini rivelabile (ad esempio 0.234 MeV nell'esperimento del Gallio) ed R_s è il raggio solare.

è importante notare che l'amplificazione risonante delle oscillazioni riduce il flusso dei neutrini (ν_e) rivelato sulla Terra e che tale riduzione può acquistare valori molto grandi se l'angolo di mescolamento nel vuoto è piccolo. Ciò può esser compreso qualitativamente se si pensa che una volta che i ν_e , dopo aver attraversato uno strato risonante, siano stati convertiti in ν_μ essi non saranno più in grado di oscillare all'indietro in ν_e poichè, nella zona in cui essi verranno ora a trovarsi (di minore densità) l'oscillazione non è più risonante, ma sarà caratterizzata dal piccolo valore dell'angolo di mescolamento nel vuoto.

La figura 5 mostra le regioni dei parametri δm^2 e $\sin^2 2\theta$ nella quale l'amplificazione risonante delle oscillazioni ha luogo nel Sole, rispettivamente per i neutrini dalla reazione PP (rivelati negli esperimenti del Gallio) e per quelli del Boro (rivelati nell'esperimento del Cloro). Nella figura, le curve solide delimitano le regioni in cui la soppressione dei neutrini a Terra è pari a 0.9, quelle tratteggiate le regioni in cui la soppressione è pari a 0.3.

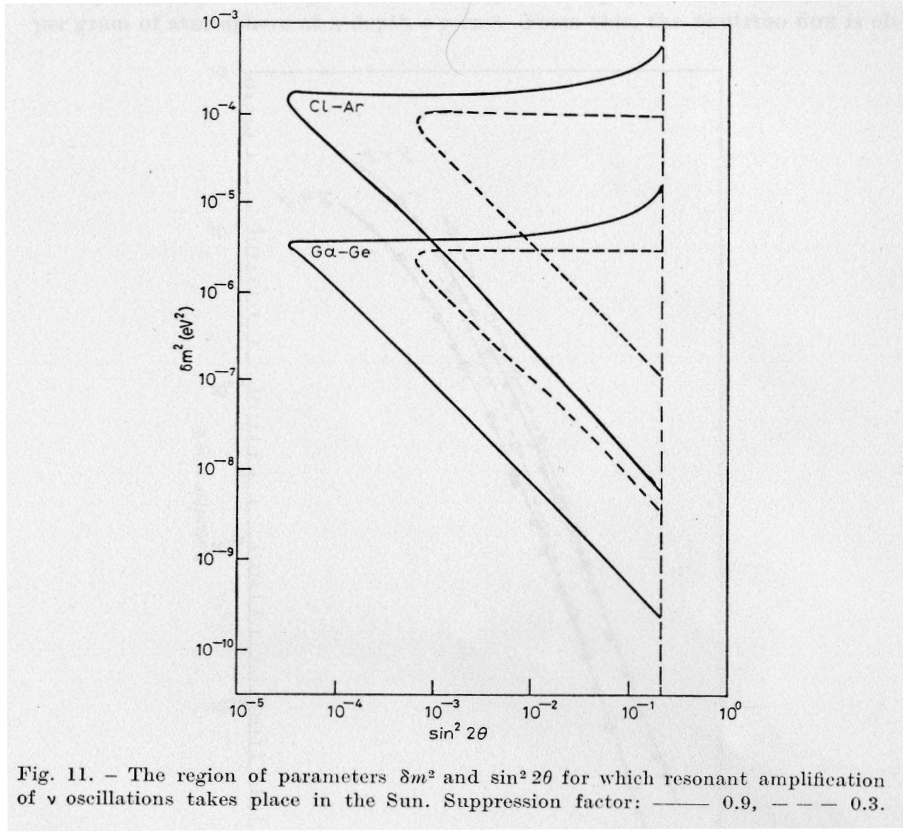


Figure 5:

3 Appendice

Calcoliamo gli autovalori della matrice $\hat{H}$.

Scriviamo la matrice nella forma:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad (34)$$

dove:

$$a = P - \frac{1}{\sqrt{2}} G_F n_n + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4P} - \frac{\delta m_{21}^2}{4P} \cos 2\theta + \sqrt{2} G_F n_e$$

$$c = P - \frac{1}{\sqrt{2}} G_F n_n + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4P} + \frac{\delta m_{21}^2}{4P} \cos 2\theta$$

$$b = \frac{\delta m_{21}^2}{4P} \sin 2\theta$$

L'equazione agli autovalori è:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (35)$$

cioè:

$$\lambda^2 - \lambda(c + a) + ac - b^2 = 0$$

le cui soluzioni sono:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left((c + a) \pm \sqrt{(c - a)^2 + 4b^2} \right)$$

Sostituendo ad a , b , c i loro valori, otteniamo:

$$c + a = 2P - \sqrt{2}G_F n_n + \frac{m_1^2 + m_2^2}{2P} + 2\sqrt{2}G_F n_e$$

$$(c - a) = \frac{\delta m_{21}^2}{2P} \cos 2\theta - \sqrt{2}G_F n_e$$

$$4b^2 = \frac{\delta m_{21}^2}{4P^2} \sin^2 2\theta$$

Otteniamo quindi:

$$\hat{E}_{1/2} = \left(P - \frac{1}{\sqrt{2}}G_F n_n + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4P} + \sqrt{2}G_F n_e \right) \pm \frac{1}{2} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\left(\frac{\delta m_{21}^2}{2P} \cos 2\theta - \sqrt{2}G_F n_e \right)^2 + \frac{\delta m_{21}^4}{4P^2} \sin^2 2\theta}$$

e quindi, ponendo: $A \equiv 2\sqrt{2}G_F n_e P$:

$$\hat{E}_{1/2} = \left(P - \frac{1}{\sqrt{2}}G_F n_n \right) + \frac{1}{2} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2P} \left\{ (m_1^2 + m_2^2) + A \pm \sqrt{(\delta m_{21}^2 \cos 2\theta - A)^2 + \delta m_{21}^4 \sin^2 2\theta} \right\}$$

Gli autostati di massa saranno allora:

$$\hat{m}_{1/2}^2 = \frac{1}{2} \cdot \left\{ (m_1^2 + m_2^2) + A \pm \sqrt{(\delta m_{21}^2 \cos 2\theta - A)^2 + \delta m_{21}^4 \sin^2 2\theta} \right\}$$