

Meccanismi di accelerazione (Fermi)

Si è supposto che la direzione in cui si muove la nube fosse opposta a quella di $P_i \cos \theta$.

Se le due direzioni fossero state concordi avremmo trovato una perdita di energia:

$$\Delta' E = -2\gamma_n^2 \beta_n (\beta \cos \theta - \beta_n) E_i$$

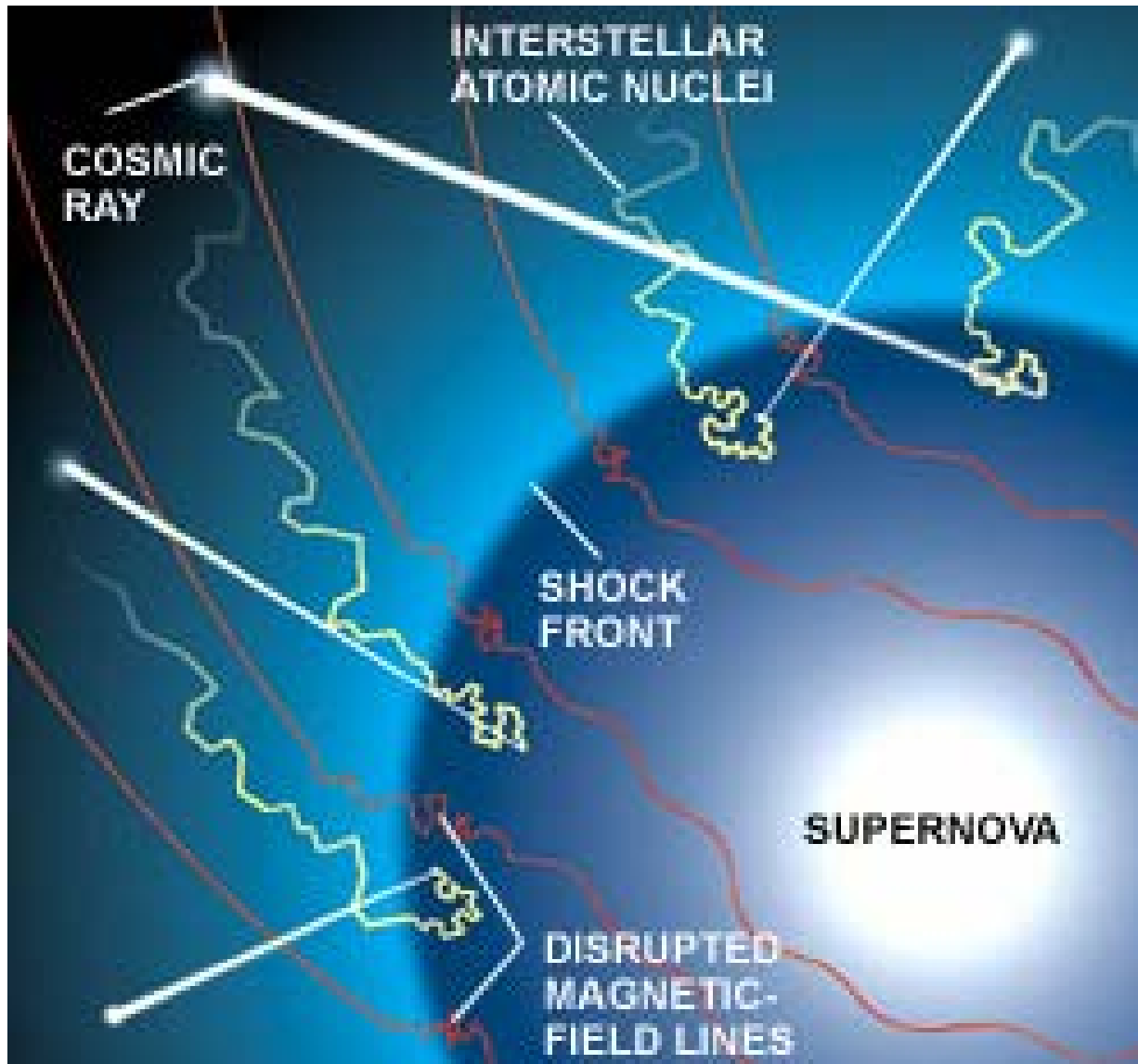
La probabilità della prima configurazione è proporzionale a: $(\beta \cos \theta + \beta_n)$; quella della seconda a: $(\beta \cos \theta - \beta_n)$. Il fattore di normalizzazione è: $A \equiv \beta + 2\beta_n$. Si ha così:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{2}{A} \gamma_n^2 \beta_n (\beta \cos \theta + \beta_n)^2 E_i - \frac{2}{A} \gamma_n^2 \beta_n (\beta \cos \theta - \beta_n)^2 E_i = \\ &= \frac{2}{A} \gamma_n^2 \beta_n (2\beta \cos \theta \beta_n) E_i = \frac{4}{A} \gamma_n^2 \beta_n^2 \beta \cos \theta E_i \end{aligned}$$

Il valor medio di $\cos \theta$ sull'intervallo di θ $(-\pi/2 \div \pi/2)$ è $1/2$. Si ha infine:

$$\epsilon = \frac{\Delta E}{E} = 2 \frac{\gamma_n^2 \beta_n^2 \beta}{\beta + 2\beta_n} \simeq 2\gamma_n^2 \beta_n^2 \simeq 2\beta_n^2$$

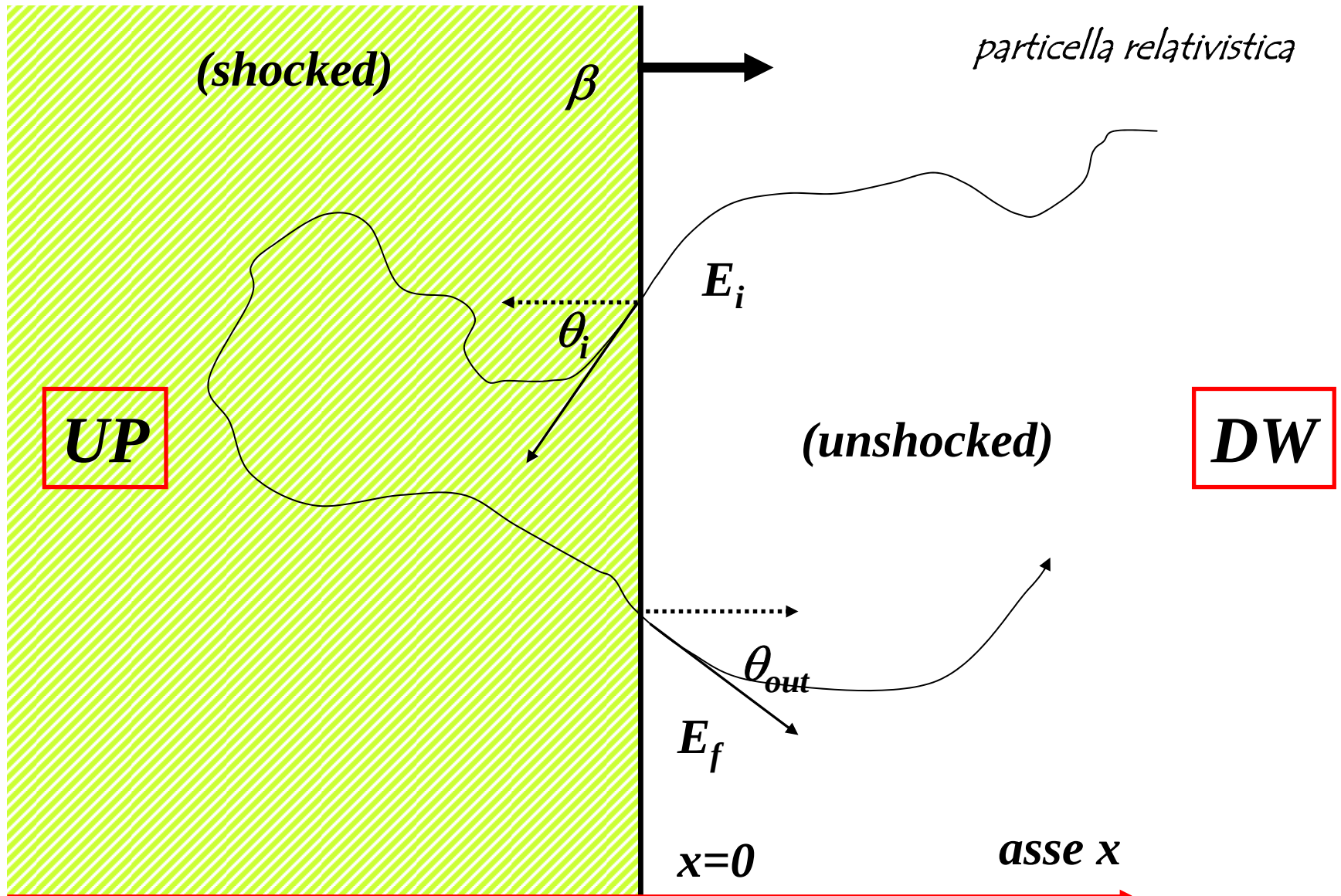
Meccanismi di accelerazione (Fermi – primo ordine)



*Shock causato da una
Supernova Remnant
→
velocita' di espansione
 V_R molto maggiore
di quella del suono nel
mezzo*

Schematizzazione "planare"

Meccanismi di accelerazione
(Fermi – primo ordine)[1]



Meccanismi di accelerazione (Fermi – primo ordine)[2]

u = velocità del materiale UP nel sistema del gas esterno (cioè della zona DW)

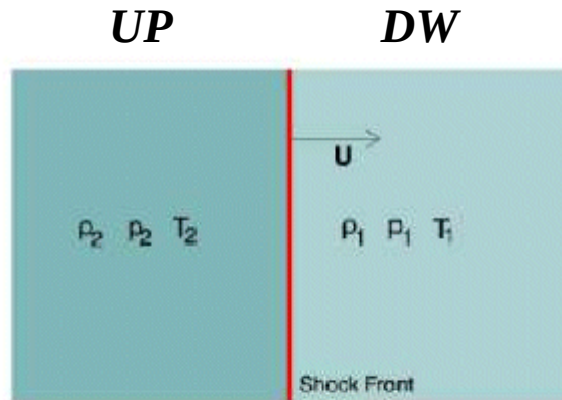
U velocità del fronte nel medesimo sistema

Nel sistema dello shock:

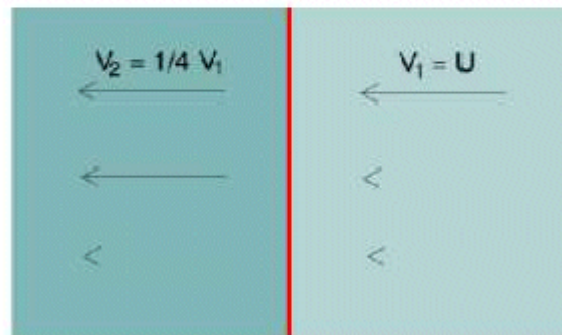
velocità del materiale DW: $v_1 = -U$

velocità del materiale UP: $v_2 = u - U \rightarrow$

$$u = v_2 - v_1$$



(a) Shock front traveling at speed U



(b) seen in rest frame of shock front

Shock che si propaga a velocità supersonica U nel sistema stazionario del gas interstellare.

Nel riferimento del gas non perturbato:

parametri a monte (UP) dello shock: ρ_2, P_2, T_2

parametri a valle (DW) dello shock: ρ_1, P_1, T_1

Nel riferimento dello shock le particelle arrivano da DW con velocità $v_1 = -U$ ed escono con velocità $v_2 = -1/4 U$

Conservazione del # di particelle $\rightarrow \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$

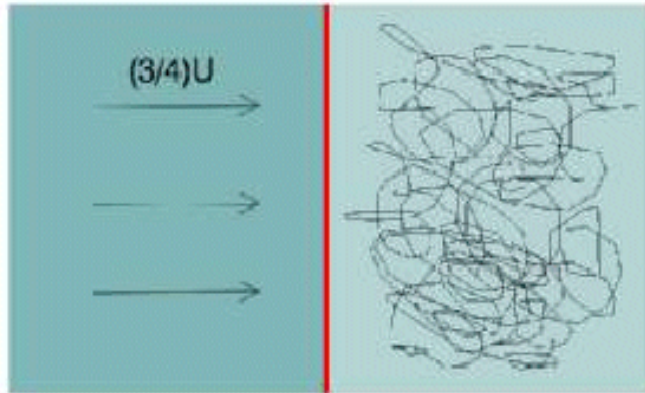
Ci aspettiamo: $\rho_2 / \rho_1 = (\gamma + 1) / (\gamma - 1)$

Gas completamente ionizzato: $\gamma = 5/3 \rightarrow v_1 / v_2 = 4$

Meccanismi di accelerazione (Fermi – primo ordine)[3]

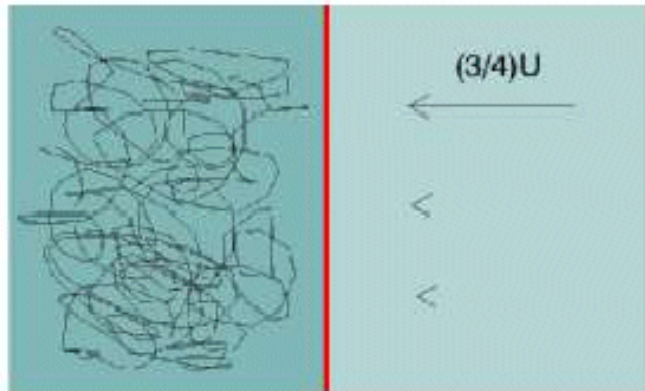
UP

DW



(c) rest frame of downstream medium

Nel riferimento del mezzo DW le particelle che vengono da UP sembrano viaggiare verso DW con velocità $\frac{3}{4} U$:

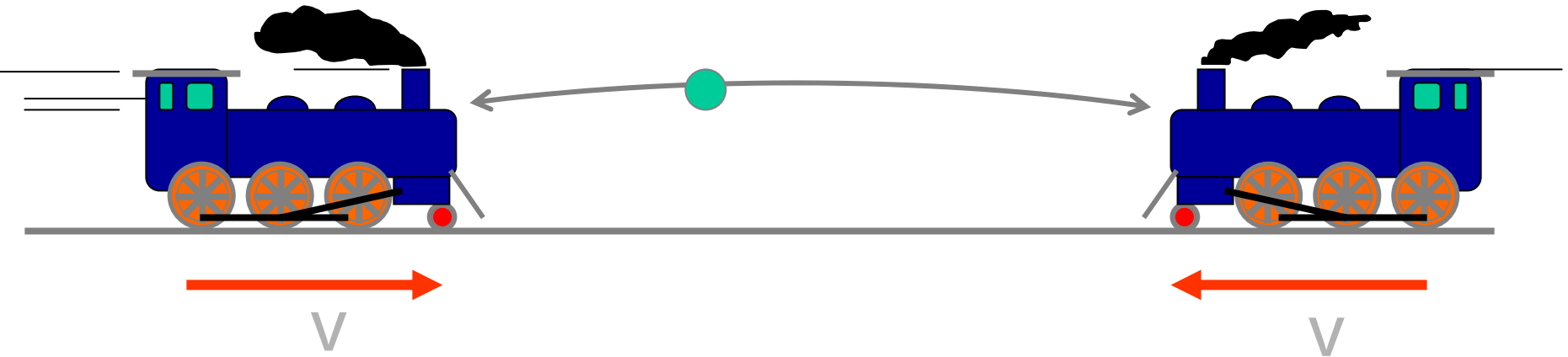


(d) rest frame of upstream medium

Nel riferimento del mezzo UP le particelle che vengono da DW sembrano viaggiare verso lo shock con velocità $\frac{3}{4} U$:

Una particella che attraversi lo shock in uno qualsiasi dei due versi ha una buona probabilità di subire un urto centrale che la rimanda indietro, con energia aumentata

Un modello giocattolo per il meccanismo di Fermi



shockwave02.asf.mov

Meccanismi di accelerazione (Fermi – primo ordine)[4]

Particella relativistica di energia $E \simeq P$, angolo $\cos \theta_i \equiv \mu_i$ proveniente da DW entra nella zona dello shock. Shock di velocità U . Il mezzo UP ha velocità $u = v_1 - v_2$, per cui $\beta = (v_1 - v_2)/c$. Inoltre:

$$v_1 = U \quad , \quad v_2 = \frac{1}{4}U$$

Energia della particella nel sistema UP:

$$E' = \gamma E (1 + \beta \mu_i)$$

Particella è trascinata con il fluido nella zona UP o riattraversa il fronte dello shock verso DW, con angolo μ' (nel sistema UP).

Nel secondo caso, l'energia della particella dopo esser passata in DW è:

$$E_f = \gamma E' (1 - \beta \mu') = \gamma^2 E (1 + \beta \mu_i) (1 - \beta \mu')$$

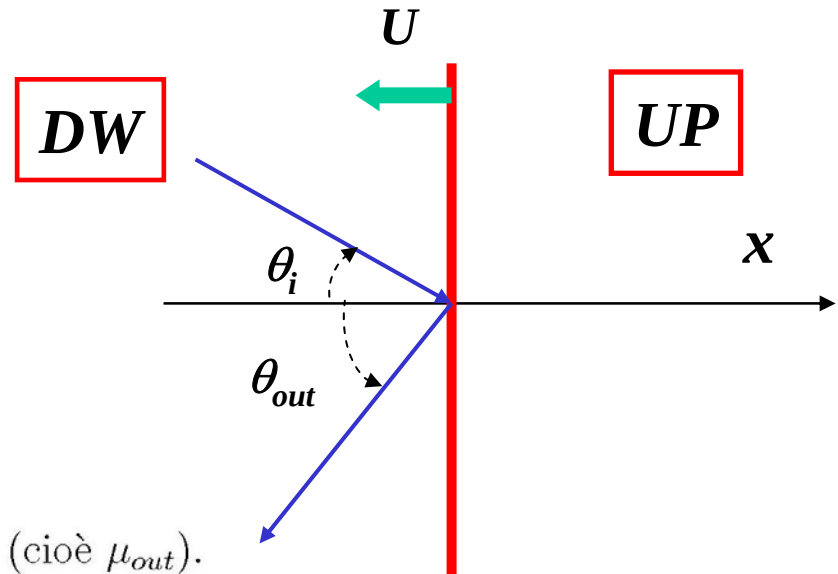
Angolo $\mu' \equiv \mu'_U$ espresso nel sistema D:

$$\mu'_U = \frac{\mu'_D + \beta}{1 + \mu'_D \beta}$$

Poniamo: $\mu'_D \equiv \mu_{out}$ e sostituiamo:

$$E_f = E \frac{1 + \beta \mu_i}{1 + \beta \mu_{out}}$$

Meccanismi di accelerazione (Fermi – primo ordine)[5]



Occorre ora mediare su θ_i (cioè μ_i) e su θ_{out} (cioè μ_{out}).

θ_i va mediato sull'intervallo $(0 - \pi/2)$ ($0 < \mu_i < 1$).

θ_{out} va mediato sull'intervallo $(-\pi/2 < \theta_{out} < 0)$ ($-1 < \mu_{out} < 0$).

$$P(\mu_i) = 2\mu_i$$

$$P(\mu_{out}) = -2\mu_{out}$$

Per cui:

$$\langle \mu_i \rangle = \int_0^1 d\mu_i P(\mu_i) \mu_i = \frac{2}{3}$$

$$\langle \mu_{out} \rangle = \int_{-1}^0 d\mu_{out} P(\mu_{out}) \mu_{out} = -\frac{2}{3}$$

Meccanismi di accelerazione (Fermi – primo ordine)[6]

Guadagno medio di energia per ciclo:

$$\left\langle \frac{E_f}{E} \right\rangle = \frac{1 + \beta \langle \mu_i \rangle}{1 + \beta \langle \mu_{out} \rangle} \simeq (1 + \beta \langle \mu_i \rangle) (1 - \beta \langle \mu_{out} \rangle)$$

poichè lo shock è non relativistico ($\beta \ll 1$).

Otteniamo infine per il rapporto tra energia finale ed iniziale media:

$$\left\langle \frac{E_f}{E} \right\rangle = \left(1 + \frac{2}{3}\beta \right) \left(1 - \frac{2}{3}\beta \right) \simeq 1 + \frac{4}{3}\beta$$

Il parametro $\epsilon = \frac{\Delta E}{E}$ è allora:

$$\epsilon = \frac{E_f - E}{E} = \frac{4}{3}\beta$$

Il guadagno in energia ora e' lineare in β !

Meccanismi di accelerazione
(Fermi – primo ordine)[7]

$$N = N_0 \left(\frac{E}{E_0} \right)^{-\gamma} \quad \text{con : } \gamma = \frac{P_{\text{esc}}}{\varepsilon}; \quad \beta = \frac{v_1 - v_2}{c}$$

Escape probability : Flusso uscente/Flusso entrante

$$\text{Flusso entrante} = \rho_{\text{cr}} c / 4$$

$$\text{Flusso uscente} = \rho_{\text{cr}} v_2$$

$$P_{\text{esc}} = \frac{4v_2}{c}; \quad \varepsilon = \frac{4}{3} \beta = \frac{4}{3} \frac{v_1 - v_2}{c}; \quad \text{con : } v_1 \rho_1 = v_2 \rho_2$$

$$e : \frac{\rho_2}{\rho_1} = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1}{v_2} = 4 \quad ; \quad \gamma = \frac{P_{\text{esc}}}{\varepsilon} = \frac{3}{\frac{v_1}{v_2} - 1} = 1$$

$$\Rightarrow \quad dN/dE \approx \left(\frac{E}{E_0} \right)^{-2}$$