

Equazione di diffusione

1 dimensione

Fumo di sigaretta attraverso una superficie di area unitaria

$$\Phi = m\dot{v} - K \frac{\partial m}{\partial x}$$

↑
corrente ↑
coefficiente di diffusione

In una situazione stazionaria $\Phi = 0$

$$m\dot{v} = D \frac{\partial m}{\partial x}$$

$$\text{se } m = m_0 \quad \text{a } x = x_0$$

$$m(x) = m_0 \exp \left\{ \frac{v}{D} (x - x_0) \right\}$$

In 3-dimensioni

Il coefficiente di diffusione è un tensore
(descrive la diffusione di particelle nelle diverse direzioni)

$$\Phi_i = m\dot{v}_i - D_{ij} \frac{\partial m}{\partial x_j} \quad (\text{somma su indici ripetuti})$$

prendendo la divergenza

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (m\dot{v}_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ij} \frac{\partial m}{\partial x_j} \right)$$

Conservazione del numero di particelle

$$\text{div } \vec{\Phi} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} = - \frac{\partial c_m}{\partial t}$$

fumo totale

Ovvero l'equazione di continuit  si generalizza in

$$\frac{\partial c_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (m v_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ij} \frac{\partial c_m}{\partial x_j} \right) = 0$$

eq. di diffusione

in caso $\vec{v} = 0$, e coeff. di diffusione scalare

$$D_{ij} = D \delta_{ij}$$

$$\left(\frac{\partial c_m}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} c_m \right) - D \nabla^2 c_m = 0$$

$$\frac{\partial c_m}{\partial t} = D \nabla^2 c_m$$

Equazione di Fokker-Planck

Derivare come la distribuzione di un ensemble di particelle sotto la trasformazione

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \lambda \vec{\xi}(\vec{x}) \quad (1)$$

verranno di conseguenza:

Si ottiene la conservazione del numero di particelle
per cui

$$m(\vec{x}) d^3x = m(\vec{x}') d^3x' \quad (2)$$

$$m(\vec{x}) = \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \tilde{m}(\vec{k})$$

$$\tilde{m}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} m(\vec{x})$$

(2)

$$\tilde{m}'(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x' e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}'} m(\vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x m(\vec{x}) e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} + \lambda \vec{\xi})}$$

quindi

$$\begin{aligned} m'(\vec{x}) &= \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \tilde{m}'(\vec{k}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^3x' e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\vec{k} \cdot (\vec{x}' + \lambda \vec{\xi}(\vec{x}'))} m(\vec{x}') = \\ &= \int d^3x' m(\vec{x}') \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}') - i\lambda \vec{k} \cdot \vec{\xi}(\vec{x}')} \end{aligned}$$

Per piccoli λ si può espandere l'esponenziale

$$\begin{aligned}
 M(\bar{x}) &= \int d^3x' M(\bar{x}') \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i k \cdot (\bar{x} - \bar{x}')} \left[1 - i \lambda \bar{k} \xi(\bar{x}') - \frac{i^2}{2} \lambda^2 (\bar{k} \cdot \xi(\bar{x}'))^2 + \dots \right] \\
 &= \int d^3x' M(\bar{x}') \left\{ \delta^{(0)}(\bar{x} - \bar{x}') - \lambda \xi_r(\bar{x}') \frac{\partial}{\partial x_r} \delta^{(1)}(\bar{x} - \bar{x}') + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \lambda^2 \xi_r(\bar{x}') \xi_s(\bar{x}') \frac{\partial}{\partial x_r} \frac{\partial}{\partial x_s} \delta^{(2)}(\bar{x} - \bar{x}') + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

quindi

$$M(\bar{x}) = M(\bar{x}) - \lambda \frac{\partial}{\partial x_r} [M(\bar{x}) \xi_r(\bar{x})] + \frac{1}{2} \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s} [M(\bar{x}) \xi_r(\bar{x}) \xi_s(\bar{x})] + \dots$$

$$\Delta x_r \equiv x_r' - x_r = \lambda \xi_r$$

così che

$$\Delta M = - \frac{\partial}{\partial x_r} [M(\bar{x}) \Delta x_r] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s} [M(\bar{x}) \Delta x_r \Delta x_s] + \dots$$

osservando che la variazione Δx ha avuto luogo nel tempo Δt

e prendendo Δt infinitesimo

$$\frac{\partial M}{\partial t} + v_r \frac{\partial M}{\partial x_r} = - \frac{\partial}{\partial x_r} \left[M(\bar{x}) \left\langle \frac{\Delta x_r}{\Delta t} \right\rangle \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s} \left[M(\bar{x}) \left\langle \frac{\Delta x_r \Delta x_s}{\Delta t} \right\rangle \right]$$

equazione di Fokker-Planck nello spazio delle coordinate.

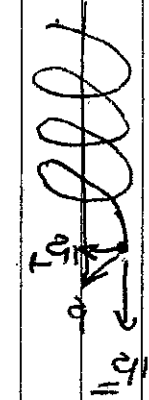
$$D_{rs} \equiv \left\langle \frac{\Delta x_r \Delta x_s}{\Delta t} \right\rangle \text{ coeff. di diffusione}$$

Tempo di collisione e coefficiente di diffusione

Propagatore di una particella carica in un campo magnetico

$$\vec{B}_0 + \vec{B}_1$$

$\vec{B}_0$ regolare
 $\vec{B}_1$: random



$$\vec{v}_{||} = |\vec{v}| \cos \alpha \quad \hat{m}_{||}$$

$$\equiv v_{||} \mu$$

$\vec{v}_{||}$ viene perturbata dalla fluttuazione $\vec{B}_1$

Vogliamo calcolare $D_{||} = \frac{\langle \Delta x_{||}^2 \rangle}{\Delta t}$

$$\Delta x_{||} = v_{||} \mu \Delta t$$

$v_{||}$ non cambia

$$t + \Delta t \quad t + \Delta t$$

in un campo m. stationario

$$\langle \Delta x_{||}^2 \rangle = v^2 \int_t^{t+\Delta t} dt_1 \int_t^{t+\Delta t} dt_2 \langle \mu(t_1) \mu(t_2) \rangle$$

$$= v^2 \int_0^{\Delta t} dt_1 \int_0^{\Delta t} dt_2 \langle \mu(t_1) \mu(t_2) \rangle =$$

$$= v^2 \int_0^{\Delta t} dt_1 \int_0^{\Delta t - t_1} dt_2 \langle \mu(t_1) \mu(t_1 + \tau) \rangle$$

$$\tau \equiv t_2 - t_1$$

$$\int_0^{\Delta t} dt_1 \rightarrow \tau = \Delta t - t_1$$

$\langle \mu(t) \mu(t+\tau) \rangle$ è la autocorrelazione

Si assume $\alpha \ll e^{-t/\tau_S}$

$$\tau_S = \int_0^\infty d\tau \frac{\langle \mu(t) \mu(t+\tau) \rangle}{\langle \mu^2 \rangle} = \int_0^\infty d\tau e^{-t/\tau_S}$$

La cosa importante è che $\int d\tau \langle \mu(t) \mu(t+\tau) \rangle$

non dipende da t (tipico dei fenomeni stocastici)

$$\text{osservando } \underline{\Delta t \gg \tau_S} \quad \int_0^{\Delta t - t} \dots \sim \int_0^\infty$$

(reinharto transiente)
per $t \gg \tau_S$ quindi

$$\langle \Delta x_{tt}^2 \rangle \cong v^2 \int_0^{\Delta t} dt_1 \int_0^\infty d\tau \langle \mu(t) \mu(t+\tau) \rangle =$$

$$= v^2 \Delta t \langle \mu^2 \rangle \tau_S$$

$\pi/2$

$$P(\alpha) = \sin \alpha \quad \langle \mu^2 \rangle = \int_0^\pi d\alpha \sin \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\frac{\langle \Delta x_{tt}^2 \rangle}{\Delta t} = \frac{1}{3} v^2 \tau_S = \frac{1}{3} v A_S = D_{||}}$$

La turbolenza MHD può essere interpretata come una sovrapposizione di onde di Alfvén caotiche di lunghezza d'onda λ

L'auto onda-particella è efficace quando $\approx r_g$ (condizione risonante)

~~auto-particella~~ ~~Alfvén~~ $\vec{B}_{medio}$
 $r_g \gg \lambda$ $r_g \ll \lambda$ situazione adiabatica

B_1 si considera stazionario su $\mathbf{A} = \vec{r}_g$, per produrre una diversa fase, nel seguente periodo di giro sul periodo $\Delta \alpha \sim \frac{B_1}{B_0}$

Una inversione del moto si verifica $\Delta \alpha \neq \text{rad}$

sono richiesti N uti t.c. $\sqrt{N} \Delta \alpha = 1$

$$\Rightarrow N \approx \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^2$$

$$\lambda_s = N \lambda = N r_g \approx r_g \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{D} = \frac{1}{3} v r_g \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^2$$

SOLO SE $L_c > r_L$ (basse energie)

Tenendo conto delle distribuzioni spettrali
della perturbazione

$$D_{||} = \frac{1}{9} c r_L \frac{B_0^2}{\omega^2} \int B(k) dk$$

$1/r_L$ ~~solo~~

dove $B(k)B(k') = B(k)^2 \frac{1}{4\pi k^2} (2\pi)^6 \delta(k-k')$

$$V_{\text{mag}} = \frac{1}{8\pi} \int dk B^2(k)$$

Per uno spettro di Kolmogoroff $B(k)^2 \propto k^{-5/3}$

$$\int_{1/r_L}^{\infty} B^2(k) dk \propto r_L^{-2/3}$$

$$D_{||} \propto r_L^{1/3} E^{1/3} \left(r_L = \frac{E}{zeB} \right)$$

Differenza di Bohm: $D \approx \frac{1}{3} c r_L \propto E$

(quando $r_L \sim L_c$)

In presenza di un termine di sorgente

l'eq. di diffusione diventa

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -D \nabla^2 n + Q(E)$$

$$\circ \quad Q(E) = \int dV q(E) \quad [Q] = s^{-4}$$

$$m(r,t) = \frac{Q(E)}{4\pi D(E)ct} \exp \left\{ -\frac{r^2}{4D(E)t} \right\}$$

$$\left[t_{diff}(E,r) \approx \frac{r^2}{D(E)} \right] \quad r_{max} = \sqrt{4D(E)t}$$

In una situazione stazionaria

$$m(E,r) = \frac{Q(E)}{4\pi r D(E)} \propto E^{-p-n}$$

$$\text{dove} \quad D(E) \propto E^{-n}$$

In una situazione stazionaria

$$m(E, r) = \frac{Q(E)}{4\pi r D(E)}$$

per $r < R_{\text{Max}}$

Leaky box model

Viene assunto che le particelle all'interno
liberamente all'interno della scatola
e non riflette ai bordi con una
certa probabilità di essere perse all'interno

$$\text{denota da } \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{m}{\tau_{\text{esc}}} = 0 \Rightarrow m \propto e^{-t/\tau_{\text{esc}}}$$

$$\text{si assume } \tau_{\text{esc}} = \tau_{\text{diff}} = \frac{L^2}{4D(E)} \sim \frac{L^2}{D(E)} \propto \frac{1}{E^\eta}$$

$$\text{si approssima } DV^2 m \text{ con } \frac{n}{\tau_{\text{esc}}}$$

Equazione di diffusione con perdite/produttori di energia

Si definisce $b(E) \equiv - \frac{dE}{dt}$

Considera il num. di part. $N(E)$ nell'int. $E, E+dE$

A causa delle perdite al tempo $t+dt$

$$E \rightarrow E' = E + b(E) \Delta t \quad (1)$$

$$E + \Delta E \rightarrow E' + \Delta E' = (E + \Delta E) + b(E + \Delta E) \Delta t$$

ma $b(E + \Delta E) = \frac{db(E)}{dE} \Delta E + b(E)$ (Taylor ex.)

quindi $E' + \Delta E' = E + \Delta E + b(E) \Delta t + \frac{db}{dE} \Delta E \Delta t$ (2)

$$(2)-(1) \Rightarrow \Delta E' = \Delta E + \frac{db}{dE} \Delta E \Delta t$$

quindi $\Delta N(E) \Delta E = N(E', t) \Delta E' - N(E, t) \Delta E =$

$$= N(E + b(E) \Delta t) \Delta E' - N(E, t) \Delta E =$$

$$= \left[N(E, t) + \frac{dN(E, t)}{dE} b(E) \Delta t \right] \left(\Delta E + \frac{db}{dE} \Delta E \Delta t \right) - N(E, t) \Delta E =$$

$$\approx \frac{dN(E, t)}{dE} b(E) \Delta E \Delta t + N(E) \frac{db}{dE} \Delta E \Delta t =$$

$$= \frac{d}{dE} \left[N(E) b(E) \right] \Delta E \Delta t$$

quindi dividendo per ΔE e Δt
e passando al limite infinitesimo

$$\frac{dN(E)}{dt} = \frac{d}{dE} [b(E)N(E)]$$

per cui l'eq. di diffusione completa è

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = D \nabla^2 N + \frac{\partial}{\partial E} [b(E)N(E)] + Q(E)}$$

• Nel caso di una distribuzione uniforme di sorgenti $\nabla N = 0$

• assumendo uno spettro di iniezione $Q(E) = K E^{-p}$

Nel limite stazionario $\frac{\partial}{\partial E} [b(E)N(E)] = -K E^{-p}$

$$\int_E^\infty \frac{d}{dE} [b(E)N(E)] dE = -K \int_E^\infty E^{-p} dE$$

$$\text{assumendo } N(E=\infty) = 0 \quad N(E) = \frac{K E^{-(p-1)}}{(p-1) b(E)}$$

For the electrons energy loss can be parametrized with

$$b(E) = - \frac{dE}{dt} = A_1 \left(\overset{\uparrow}{\text{ionization r.}} \frac{E}{m_e c^2} + \overset{\uparrow}{\text{bremsf.}} K + \overset{\uparrow}{\text{adiabatic}} A_2 E + \overset{\uparrow}{\text{synchro}} A_3 E^3 \right)$$

So that

1) if ionization losses dominate $b(E) \sim \text{const}$

$$\Rightarrow N(E) \propto E^{-(p-1)}$$

$$(\text{if } p=2 \quad N(E) \propto E^{-1})$$

2) brems. or adiabatic losses dominate $b(E) \propto E$

$$N(E) \propto E^{-p}$$

unchanged spectrum

3) IC or synchr. $b(E) \propto E^2$

$$N(E) \propto E^{-(p+2)}$$

(steeper spectrum)

The same considerations apply whenever $t_{\text{loss}} < t_{\text{inj}}$

This condition can be translated in a condition on the particle energy

by writing $E_S \equiv \frac{dE}{dt} \cdot t_{\text{inj}}$: energy lost in the injection time

Assume for example that energy losses are dominated by synchrotron or IC

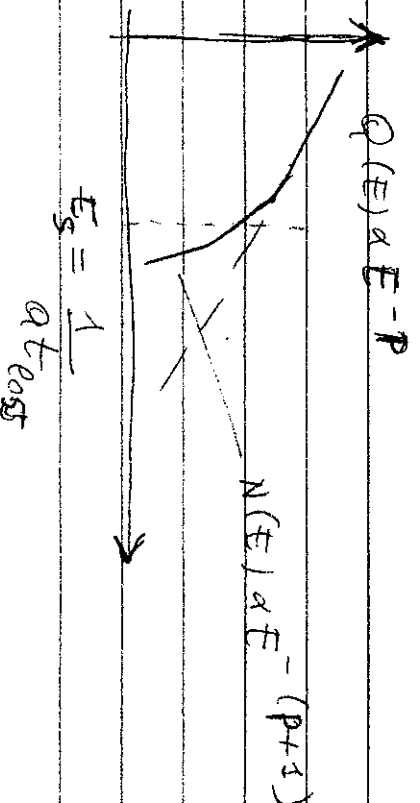
$$t_{\text{loss}}(E) = \left(\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{E} \alpha E^2 \right)^{-1} = \frac{1}{\alpha E}$$

Energy losses are irrelevant if $t_{\text{loss}} \gg t_{\text{inj}}$ i.e.

$$t_{\text{inj}} = E_S \left(\frac{dE}{dt} \right)^{-1}_{E=E_S} = \frac{E_S}{\alpha E_S^2} = \frac{1}{\alpha E_S}$$

$$t_{\text{loss}} \gg t_{\text{inj}} \Rightarrow \frac{1}{\alpha E} \gg \frac{1}{\alpha E_S} \Rightarrow \boxed{E < E_S}$$

hence for $E > E_S$ the energy-loss modified spectrum has to be used



Emissione di sincrotrone della galassia

Prima scoperta radioastronomica (K. Tausky 1933)

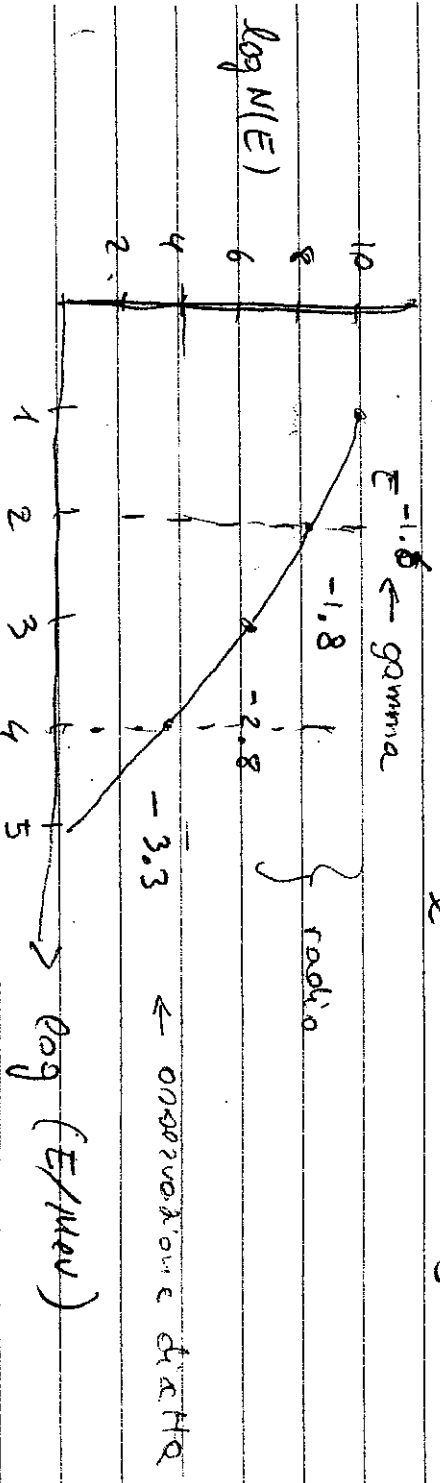
- spettro: legge di potenza spazzata

$$I_\nu \propto \nu^{-0.4} \quad \nu < 200 \text{ MHz}$$

$$I_\nu \propto \nu^{-(0.8 \pm 0.3)} \quad \nu > 400 \text{ MHz}$$

E' ben riprodotto in termini di un emissione di
sincrotrone da parte di elettroni relativistici
con spettro

$$B = 6 \times 10^{-6} \text{ G}$$



Infoliti

$$I_\nu \propto \nu^{-(p-1)/2}$$

$$p = +4.8 \quad \alpha \equiv \frac{p-1}{2} = 0.4$$

$$p = 2.8 \quad \alpha = 0.9$$

Te cambiando di perpendicolarità è dovuto
all'intervento delle perdite di synchrotrone e Compton
 $E \sim 10 \text{ GeV} \rightarrow \nu \sim 1 \text{ GHz}$

tempo di vita di elettroni con $E \sim 300 \text{ MeV}$

$$\sim 3 \times 10^{-7} \text{ anni (circolazione)}$$

$$\sim 3 \times 10^{-7} \text{ " (Synch. } E \sim 10 \text{ GeV)}$$

$\ll t_{\text{gale}} \Rightarrow$ stato stazionario

per horne energie e perdite per ionizzazione
dominano

$$\Rightarrow N(E) \propto E^{-(p+1)}$$

$$E^{-p} \text{ spettro primario } 1.6 = p-1 \quad \boxed{p = 2.6}$$

ad alte energie dominano invece Compton
e microtrone

$$\Rightarrow N(E) \propto E^{-(p+1)}$$

$$3.3 = p+1 \quad \boxed{p = 2.3}$$

obsoletas compatibili $\Rightarrow$

spettro primario (direzione) $p \approx 2.5$

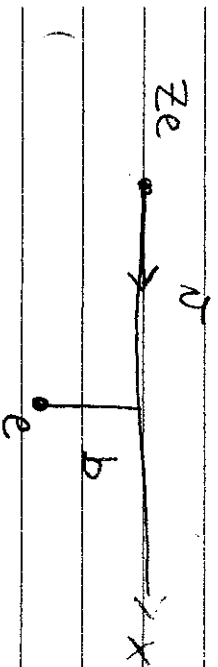
$$\underline{Q(E) \propto E^{-2.5}}$$

Il

Perdite di energia (schema riassuntivo)

Ionizzazione

trasferimento di impulso da una particella di Ze ad un elettrone orbitale di un atomo del mezzo



Caso non-relativistico

$$P = \int F_{\perp} dt = \int \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin\theta \frac{1}{v} dx = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 b v}$$

$$E_{\text{loss}} = \frac{P^2}{2m_e} \quad \text{per angolo interazione}$$

Al integrale per $m_e \times dV = 2\pi b db dx$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{Ze^4 n_e}{4\pi\epsilon_0 v^2 m_e} \ln\left(\frac{b_{\text{max}}}{b_{\text{min}}}\right) \propto \frac{1}{E}$$

$$b_{\text{max}} : \frac{2b_{\text{max}}}{v} = \frac{1}{\omega_{\text{orb}}} \quad (t_{\text{int}} > t_{\text{orb}}) \quad b_{\text{max}} = \frac{I v}{\omega_{\text{orb}}}$$

$\eta_{\text{work}} = I$ potenziale di ionizzazione

Δ_{min} : determinato dal principio di Heisenberg

$$\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p}$$

$$p_{max} = 2m_e v$$

$$(\Delta E)_{max} = \frac{2m_e v^2}{2} = 4 \left(\frac{m_e}{M} \right)$$

$$\Rightarrow b_{min} = \frac{\hbar}{2m_e v}$$

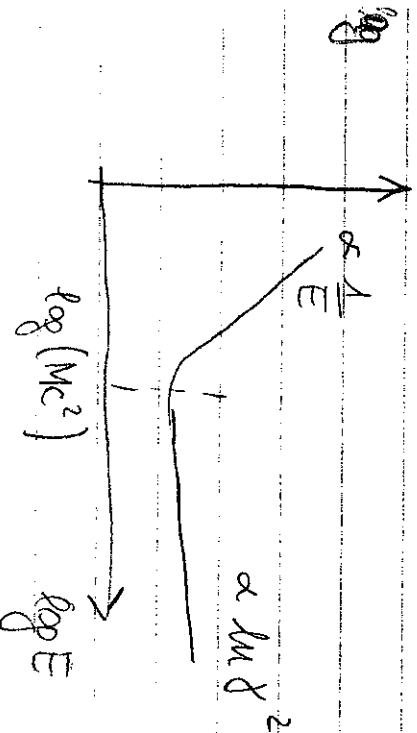
Caso relativistico

$$\begin{aligned} \int \vec{F}_L dt &= \int e E_z dt = \frac{Ze^2 \gamma b}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{[b^2 + (\gamma v t)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 \gamma b} \quad (r'^2 = (\gamma v t)^2 + b^2) \end{aligned}$$

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{Ze^2 m_e}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \left[\ln \left(\frac{2\gamma^2 m_e v^2}{I} \right) - \frac{v^2}{c^2} \right]$$

Bethe-Bloch formula

correzione QED



Il tempo di perdita o
positività di E è maggiore
per i protoni nel caso
NR (v minore)

(Bremsstrahlung (radiazione di frenamento
o free-free))

dovuta alla accelerazione delle particelle
nel campo elettrostatico di un nucleo del mezzo

$$\text{eq. di partenza} \quad - \frac{dE}{dt} = \frac{e^2 |\ddot{r}|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

Nel caso relativistico

$$\left(\frac{dE}{dt} \right) = \left(\frac{dE'}{dt'} \right) = \frac{e^2 |a_0|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad a_0 \text{ accelerazione nel rest frame}$$

↑
invariante relativistico

accelerazione nel sistema del laboratorio S.

La 4-accelerazione viene definita $\frac{1}{m} \frac{dP^\mu}{dt}$

$$a^\mu = \gamma \left[\frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial (\gamma \vec{v})}{\partial t} \right] \quad P^\mu = m\gamma(c, \vec{v})$$

$$\text{poich\u00e9} \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{1}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2}} \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \gamma^3 (\vec{v} \cdot \vec{a})$$

$$a^\mu = \left[\gamma^4 \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \right), \gamma^2 \vec{a} + \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \right) \gamma^4 \vec{v} \right]$$

$$a_0^\mu = [0, \vec{a}_0]$$

uguagliando la norma di a^μ e a_0^μ

$$\Rightarrow \bar{a}_0^2 = \gamma^4 \left[\bar{a}^2 + \gamma^2 \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c} \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned} a^2 + \gamma^2 \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c} \right)^2 &= \|a_\parallel\|^2 + |a_\perp|^2 + \gamma^2 \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c} \right)^2 = \\ &= |a_\perp|^2 + |a_\parallel|^2 \gamma^2 \end{aligned}$$

quindi

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_S = \frac{Z^2 e^2 \gamma^4}{6\pi \epsilon_0 c^3} \left(|a_\perp|^2 + \gamma^2 |a_\parallel|^2 \right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{dt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c^3} |\ddot{x}|^2 dt = \text{Poynting theorem}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c^3} |\ddot{r}(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} I(\omega) d\omega$$

$I(\omega)$ energia emessa per unità di $\Delta\omega$

$$I(\omega) = \frac{Z^2 e^6}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \frac{\omega^2}{r^2 \omega^2} \left[\frac{1}{r^2} K_0^2 \left(\frac{\omega b}{r v} \right) + K_1^2 \left(\frac{\omega b}{r v} \right) \right]$$

Nel limite di alte energie $r \gg \frac{\omega b}{v}$
(ovvero basse frequenze)

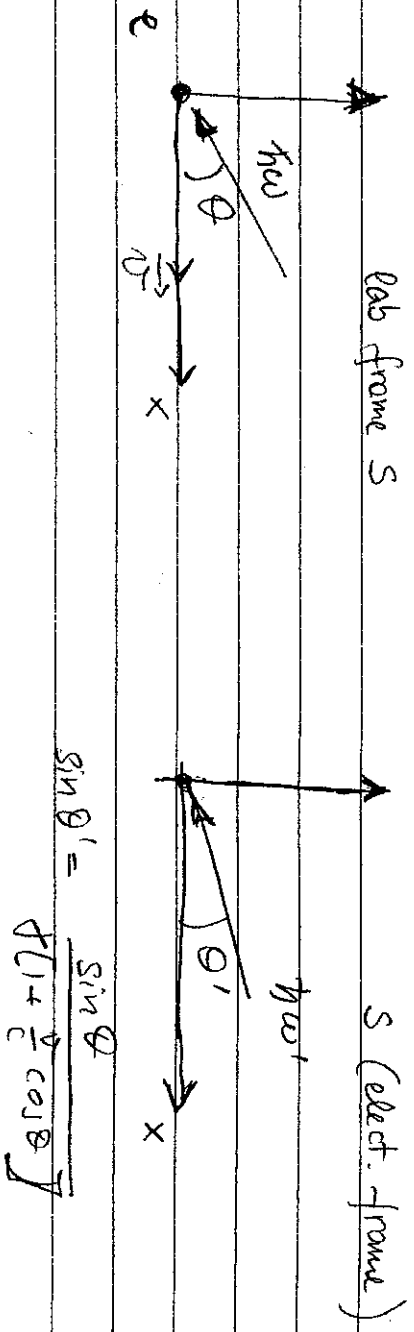
$$I(\omega) = \frac{Z^2 e^6}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v^2} \equiv K$$

Questa va integrata sul volume moltiplicando
per la densità nel sistema a riposo dell'elettrone,
ovvero ρ_{me}

$$I(\omega) = \int_{b_{min}}^{b_{max}} db' 2\pi b' \rho_{me} v K =$$

$$= \frac{Z^2 e^6 \rho_{me}}{12\pi^2 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \frac{1}{v} \ln \left(\frac{b_{max}}{b_{min}} \right) \propto \gamma \propto E$$

Inverse Compton scattering



Si considera $E_\gamma \approx h\nu \ll m_e c^2$

Il sistema del cu, $\approx$ sistema S'

In pratica è un urto Thomson nel sistema dell'elettrone

$$\text{Per l'urto Thomson} \quad - \left(\frac{dE}{dt} \right)' = \sigma_T c (U_{\text{rad}})'$$

(forone all'elettrone, i.e. sistema dell'elettrone)

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 6.6 \times 10^{-25} \text{ cm}^2 \quad \left(= \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 m_e^2 c^4} \approx \frac{1}{m^2} \right)$$

$$c U_{\text{rad}} = \phi_{\text{rad}} = N h\nu \cdot c \quad \text{densità di flusso di energia}$$

(ovv) $[\text{cm}^{-2} \text{ erg s}^{-1}]$

rate di arrivo dei fotoni su una superficie fissa ΔA
 si trasforma solo la rate, secondo la legge
 dell'effetto Doppler $\rightarrow$

$$v' = v \gamma \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right)$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right)}$$

Quindi $(cU_{\text{rad}})' = cU_{\text{rad}} \gamma \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right)^2$ per un fascio di fotoni

Assumendo isotropia della radiazione e integrando sull'angolo solido $2\pi \sin \theta \, d\theta$

$$U'_{\text{rad}} = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta U(\theta) \gamma^2 \left[1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right]^2 =$$

$$U_{\text{rad}} = 4\pi U_{\text{rad}}(\theta) \quad \rightarrow \quad = \frac{1}{2} U_{\text{rad}} \int_0^{2\pi} d\theta \sin \theta \left[1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right]^2 =$$

$$= \frac{4}{3} U_{\text{rad}} \left(\gamma^2 - \frac{1}{4} \right)$$

quindi $\left(\frac{dE}{dt} \right) = \frac{dE}{dt} = \frac{4}{3} \sigma_T c U_{\text{rad}} \left(\gamma^2 - \frac{1}{4} \right)$

questa è l'energia guadagnata dai fotoni a riposo all'interno degli e con fotoni di loro energia. Per farlo il plasma estrae le energie dai fotoni soffici va rallentando

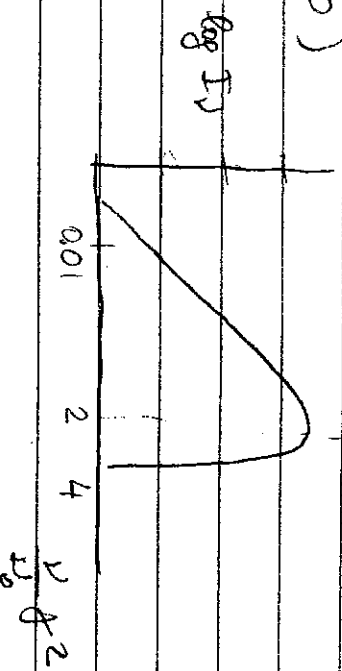
$$\frac{dE}{dt} = \frac{4}{3} \sigma_T c U_{\text{rad}} \left(\gamma^2 - \frac{1}{4} \right) - \sigma_T c U_{\text{rad}} = \frac{4}{3} \sigma_T c U_{\text{rad}} \left(\gamma^2 - 1 \right)$$

$$= \frac{4}{3} \sigma_T c U_{\text{rad}} \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \gamma^2 \propto E^2$$

Spettro dei fotoni prodotti dall'IC

si trasforma prima la distribuzione dei fotoni in S' poi la distribuzione dei fotoni prodotti nel sist. S

(Blumenthal & Gould '70)



(vedi Longair 4.32)

$$h\nu_0 \approx \frac{4}{3} \gamma^2 \pi \nu_0$$

$$U_{\text{opt}} \sim 6 \times 10^{-4} \text{ eV/cm}^{-3}$$

$$U_{\text{rad}} (\text{CMB}) \approx 2 \times 10^{-5} \text{ eV/cm}^{-3} \quad T \sim 2.7 \text{ K}$$

Radiation di sincrotrone

Tasso di perdita di energia nel sistema a riposo
istantaneo dell'elettrone

Si parte dalla formula di Larmor

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2 |\ddot{\mathbf{r}}|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

per porre al sistema del laboratorio

$$\bar{a}_0^2 = \gamma^4 \left[\bar{a}^2 + \cancel{\gamma^2 \left(\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{a}} \right)^2} \right]$$

L'accelerazione prodotta dal moto di piratazione $\bar{a}_\perp \bar{v}$

$$\left(-\frac{dE}{dt} \right)_{\text{syn}} = \frac{\gamma^4 e^2}{6\pi\epsilon_0 c} m_e^2 |\bar{a}_\perp|^2$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = m \frac{d(\gamma \bar{\mathbf{v}})}{dt} = m\gamma \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} + m\bar{\mathbf{v}} \cancel{\frac{d\gamma}{dt}} = m\gamma \bar{a}_\perp =$$

$$\left(\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \gamma^2 \left(\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} \cdot \bar{\mathbf{v}} \right) = \gamma^2 (\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) = 0 \right) = \frac{eB\gamma \sin\theta}{c}$$

$$\Rightarrow a_\perp = \frac{eB}{m\gamma} \frac{\bar{v}}{c} \sin\theta$$

$$\left(-\frac{dE}{dt} \right)_{\text{syn}} = \frac{Ze^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 c m_e^2} \left(\frac{\bar{v}}{c} \right)^2 \gamma^2 \sin\theta$$

$$\left(- \frac{dE}{dt} \right)_{\text{syn}} = 2\sigma_T c U_{\text{mag}} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \gamma^2 \sin^2 \theta$$

Mediana di una distribuzione isotropa di
pitch angles $P(\theta)d\theta = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta$

$$\left(- \frac{dE}{dt} \right) = \frac{4}{3} \sigma_T c U_{\text{mag}} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \gamma^2 \propto E^2$$

Distribuzione spettrale

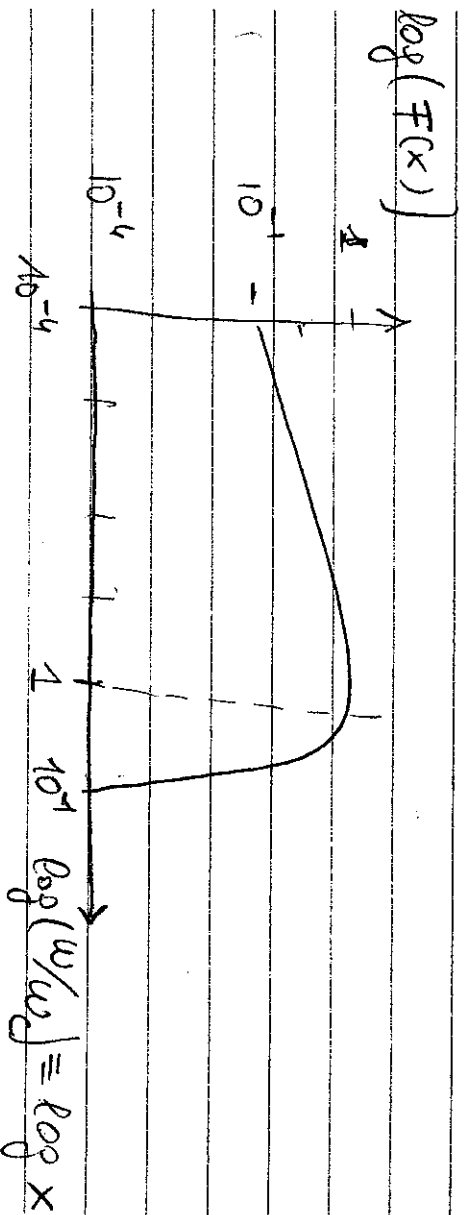
simmetria nelle due polarizzazioni

$$j_{\pm}(\omega) = \frac{\sqrt{3} e^3 B \sin \theta}{16 \pi^2 \epsilon_0 c m_e} [F(x) + G(x)]$$

$$j_{||}(\omega) = \frac{\sqrt{3} e^3 B \sin \theta}{16 \pi^2 \epsilon_0 c m_e} [F(x) - G(x)]$$

$$F(x) \equiv x \int_x^{\infty} K_{5/3}(z) dz \quad G(x) = x K_{2/3}(x)$$

$$j(\omega) = j_{\perp} + j_{||} = \frac{\sqrt{3} e^3 B \sin \theta}{8 \pi^2 \epsilon_0 c m_e} F(x)$$



$$\omega_c = 2\pi \gamma_c = \frac{3}{2} \beta^2 \gamma_g \quad \beta_g = \frac{eB}{2\pi m_e c}$$

NR pin frequency

$$E_c = \frac{3\sqrt{x} B}{2m^3} E^2 \approx 10^{-4} \left(\frac{E}{10^{12} \text{ GeV}} \right)^2 \left(\frac{B}{1 \mu\text{G}} \right)^2 \text{ eV}$$

$$-\frac{dE}{dt} = \int_0^\infty j(\omega) d\omega =$$

$$r_L \approx 3 \times 10^{13} \left(\frac{E}{10^{12} \text{ GeV}} \right) \left(\frac{B}{1 \mu\text{G}} \right)^{-1} \text{ cm}$$

$$t_{\text{syn}} = c \left(\frac{1}{E} \frac{dE}{dx} \right)^{-1} \approx 6 \times 10^4 \left(\frac{B}{1 \mu\text{G}} \right)^{-2} \left(\frac{E}{10^{12} \text{ GeV}} \right)^{-1} \text{ years}$$

$$\left[\frac{\left(\frac{dE/dt}{dt} \right)_{ic}}{\left(\frac{dE/dt}{dt} \right)_{\text{syn}}} \right] = \frac{U_{\text{rad}}}{U_{\text{mag}}}$$

nella nostra galassia $\frac{U_{\text{rad}}}{U_{\text{mag}}} \sim 3 \leftarrow$ follow others

Emissione di sincrotrone da una distribuzione a potenza di elettroni

Si assume che gli elettroni relativistici hanno una distribuzione energetica

$$n(E) dE = K E^{-p} dE$$

L'emivita per unita di volume e

$$J(\omega) = \int_0^\infty j(x) n(E) dE$$

$$\text{dove } X = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{2\pi m^2 c^4}{3E^2 \omega_0 \sin \alpha} \equiv \frac{A}{E^2}$$

si integra su X e successivamente su α trovando (vedi Longair 18.1.5)

$$J(\omega) \propto K B^{\frac{p+1}{2}} \omega^{-\frac{p-1}{2}}$$

Argomento euristico:

la spettro delle radiazioni di sincrotrone e piccato attorno a ω_c

→

$$\nu \approx \nu_e \approx \gamma^2 \nu_g = \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 \frac{eB}{2\pi m_e} \quad (*)$$

quindi l'equazione in γ , $\nu d\nu$ è dovuta agli elettroni con energia E , $E+dE$ secondo $(*)$

$$E = \left(\frac{\nu}{\nu_g} \right)^{1/2} mc^2 \quad dE = \frac{mc^2}{2\sqrt{\nu_g}} \frac{d\nu}{\sqrt{\nu}}$$

$$\Rightarrow -\frac{dE}{dt} \Big|_{\text{syn}} = \frac{4}{3} \sigma_T c \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 \frac{B^2}{4\pi} \quad (d)$$

$$\int \nu d\nu = \left(-\frac{dE}{dt} \right) N(E) dE = \text{ sostituisco}$$

$$= (\dots) B^2 \nu^{\frac{p+1}{2}} - \frac{p-1}{2}$$

$$p=2 \Rightarrow \int \nu d\nu \propto \nu^{-\frac{1}{2}}$$

Perdite adiabatiche

durante l'espansione adiabatica di un gas ν di particelle relativistiche, $S = \text{cost.}$

$$S = V \frac{\rho + p}{T} \propto g T^3 R^3 \quad p = \frac{1}{3} \rho \quad \text{gas relat.}$$

R dimensione caratteristica

$$S = \text{cost} \Rightarrow T \propto R^{-1} \Rightarrow \langle E \rangle \propto R^{-1}$$

tecnica

l'energia ν persa dalle particelle viene convertita in energia cinetica di espansione

(attenzione! T è la temperatura delle particelle non del gas)

$$b(E) \equiv - \frac{\partial E}{\partial t} = - \frac{\partial E}{\partial R} \dot{R}$$

$$E = E_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-1} \quad \frac{\partial E}{\partial R} = - E_0 \frac{R_0}{R^2} \dot{R} = - E \frac{\dot{R}}{R}$$

$$\text{quindi } b(E) = E \frac{\dot{R}}{R}$$

(Vale anche per l'espansione cosmologica)

Abbiamo già visto che le perdite adiabatiche (in generale quelle con $b(E) \propto E$) non modificano lo spettro.

Vogliamo determinare come N, B e di conseguenza lo spettro di sincrotrone prodotto da un gas di elettroni in espansione cambia con il tempo

$$N(E) = V_K(R) E^{-p} \equiv K(R) E^{-p}$$

L'equazione di diffusione in energia che si suppone

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{d}{dE} \left(b(E) N(E) \right) = \frac{d}{dE} \left(\frac{\dot{R}}{R} E^{-(p-1)} K \right) = \\ &= - (p-1) \frac{\dot{R}}{R} K E^{-p} = - (p-1) \frac{\dot{R}}{R} N(E) \end{aligned}$$

($\dot{R}$ Motore che si è smunta, espansione uniforme $\rightarrow \nabla^2 N = 0$)
moltiplicando per dt

$$\frac{dN(E)}{N(E)} = - (p-1) \frac{dR}{R} \Rightarrow \left(N(E, R) = N(E, R_0) \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-(p-1)} \right)$$

Emissione di sincrotrone

$$\dot{\gamma} = A(B) B^{\frac{p+1}{2}} \propto \frac{p-1}{2} K(R)$$

(vedi emissione di sincro. da una distib. di elettroni a potenza)

L'evoluzione di B è determinata dalla conservazione del flusso magnetico

$$B \propto R^{-2}$$

quindi, poiché $K(R) \propto R^{-(p-1)}$

$$j_p(R) \propto R^{-2p}$$

Questo è quanto osservato in alcuni esperimenti di separazione relativamente veloci come Compton & ma crea problemi re extrapolato alle fasi iniziali $j_p \propto R^{-4}$ ($R \rightarrow 0$)

Anche il campo magnetico osservato per Cas A $B \sim 10^{-4}$ G e $R \sim 5 \times 10^{18}$ au

perché incredibilmente alto e extrapolato al raggio della gigante rossa originaria ($R \sim 10^{13}$ au)

Il campo magnetico deve essere prodotto durante l'espansione (instabilità di Rayleigh-Taylor)

e gli elettroni relativistici responsabili per l'emissione di sincrotrone devono essere accelerati nelle sue spinaie del SNR

Questo è naturalmente realizzato nell'accelerazione di Fermi all'I ordine (shock acc.)

Shock waves

If a disturbance in a fluid propagates at $v > c_s$ it cannot behave like a wave which propagate at c_s .

There is a discontinuity between the region ahead the shock, having no knowledge of its imminent arrival, and the region behind.

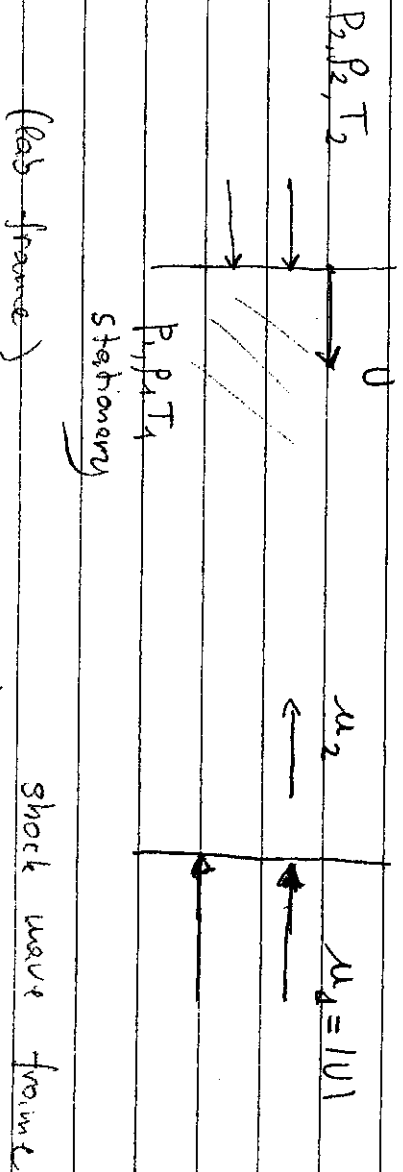
The discontinuity is called "shock wave".

They are typically produced by an explosion or when a supersonic flow meet an obstacle (or objects move supersonically in a fluid)

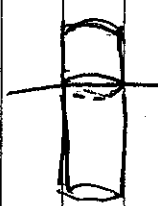
Assume the discontinuity is very sharp

undisturbed region (upstream) at rest

P_2, ρ_2, T_2



Conservation laws (Shock conditions)

1) $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$ mass flux  old is the same

$(j_1 = j_2 = j)$ Per unit area $de_{1/2} = u_{1/2} dt$

2) $P_1 + \rho_1 u_1^2 = P_2 + \rho_2 u_2^2$ momentum flux

$\left(P = \frac{F}{S} \quad \frac{dP}{dt} = \frac{F}{S} \quad \left(\vec{P}_1 \cdot \frac{1}{S \Delta t} \right) = \frac{F}{S} = P \text{ pressure} \right)$

$\rho \frac{d}{dt} = \rho \frac{d}{dt} = \rho \frac{d}{dt}$ momentum density Cons. of energy flux

enthalpy + kinetic energy (3) $\left(\frac{1}{2} \rho_1 u_1^2 + w_1 \right) \rho_1 u_1 = \left(\frac{1}{2} \rho_2 u_2^2 + w_2 \right) \rho_2 u_2$

$w = \epsilon + \frac{P}{\rho}$ (only for shocks perpendicular to the flow)

$(w = u + Pv)$ ϵ : internal energy density

for a perfect gas $w = \frac{\gamma P}{\gamma - 1} \cdot \frac{P}{\rho}$

γ : ratio of specific heats:

$(1) + (2) \rightarrow P_1 + \frac{1}{2} \frac{u_1^2}{\rho_1} = P_2 + \frac{1}{2} \frac{u_2^2}{\rho_2} \rightarrow j^2 = \frac{P_2 - P_1}{\rho_1 - \rho_2}$

$(2) \rightarrow j(u_2 - u_1) = P_1 - P_2 \rightarrow \downarrow$ (*)

$\Rightarrow u_1 - u_2 = \left[(P_2 - P_1) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \right]^{1/2}$

(Companion ratio for a perfect gas

$$\left(w = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} \right)$$

$$(3) \rightarrow w_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = w_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \quad (u_1^2 = \frac{\gamma^2}{\rho_1^2})$$

$$\rightarrow w_1 + \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\rho_1^2} = w_2 + \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\rho_2^2}$$

$$(*) \rightarrow (w_1 - w_2) + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\rho_1} + \frac{\gamma}{\rho_2} \right) (\rho_2 - \rho_1) = 0$$

$$\rightarrow \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\rho_1} + \frac{\gamma}{\rho_2} \right) (\rho_2 - \rho_1) = 0$$

$$\frac{1}{\rho_1} \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} \rho_1 + \frac{1}{2} \rho_2 - \frac{1}{2} \rho_1 \right] + \rho_2^{-1} \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} \rho_2 - \frac{1}{2} \rho_2 - \frac{1}{2} \rho_1 \right] = 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\rho_2(\gamma+1) + \rho_1(\gamma-1)}{\rho_2(\gamma-1) + \rho_1(\gamma+1)}$$

Companion factor

replacing this in the expression (*) for j^2 we can eliminate the ρ_2 dependence

$$j^2 = \frac{\rho_1}{2} \left[(\gamma-1)\rho_1 + (\gamma+1)\rho_2 \right]$$

$$\text{then } u_1^2 = \frac{p_1^2}{\rho_1^2} = \frac{\rho_1}{2} \left[(\gamma+1) p_1 + (\gamma-1) p_2 \right]$$

$$u_2^2 = \frac{p_2^2}{\rho_2^2} = \frac{\rho_2}{2} \left[\frac{p_1 (\gamma+1) + p_2 (\gamma-1)^2}{p_1 (\gamma-1) + p_2 (\gamma+1)} \right]^2$$

Introducing the Mach number

$$M = \frac{u_1}{c_1} = \frac{u_1}{\left(\gamma \frac{p_1}{\rho_1} \right)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{2 \gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1} \quad c_1: \text{ sound velocity}$$

and replacing this into the expression for r

$$r = \frac{p_2}{\rho_1} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\gamma+1}{(\gamma-1) + \frac{2}{M_1^2}}$$

Temperature ratio using the perfect gas law

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_2}{p_1} \frac{p_1 (\gamma+1) + p_2 (\gamma-1)}{p_1 (\gamma-1) + p_2 (\gamma+1)}$$

$$= \frac{[2 \gamma M_1^2 - (\gamma-1)] [2 \gamma M_1^2 (\gamma+1)]}{(\gamma+1)^2}$$

(Limit of strong shocks $M_1 \gg 1$

$$\gamma = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)}$$

$$\text{for } \gamma = \frac{5}{3} \quad \boxed{\gamma = \frac{4}{3}}$$

(monatomic gas) independent on μ

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma M_1^2}{\gamma+1}$$

$$P_1$$

can be arbitrarily large

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\gamma(\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)^2}$$

for $M \rightarrow \infty$

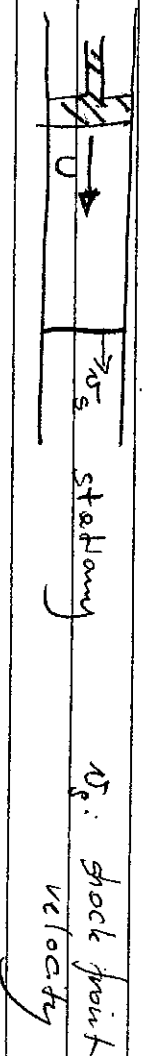
the gas downstream is heated

considerably?

Supersonic piston

A piston moving supersonically through a stationary gas gives rise to a shock wave ahead the piston.

The gas behind the shock move at the same velocity U of the piston.



In the shock front frame $u_1 = |v_s|$ (gas at rest)

Downstream the gas move ~~rest~~ toward the

shock front at velocity u_2

The velocity difference is invariant $\rightarrow \underline{u_1 - u_2 = U}$

We want to determine v_s

But we know $U = u_1 - u_2 = \left[(p_2 - p_1) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \right]^{1/2}$

(which comes from mass and momentum flux conservation)

The expression of $r = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ can be used to get rid of ρ_2

from the eq. for r . Squaring, one obtains an equation in $\frac{\rho_2}{\rho_1}$

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \left[2 + (\gamma + 1) \frac{U^2}{2 p_1 / \rho_1} \right] + \left[1 - \frac{(\gamma - 1) U^2}{2 p_1 / \rho_1} \right] = 0$$

Writing $\left[\frac{\gamma p_1}{\rho_1} = C_1^2 \right]$ and solving

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \frac{\gamma(\gamma + 1) U^2}{4 C_1^2} + \frac{\gamma U}{C_1} \left[1 + \frac{(\gamma + 1) U^2}{16 C_1^2} \right]^{1/2} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \overline{u_S^2} u_i^2 &= \frac{1}{2 \rho_1} \left[(\gamma - 1) p_1 + (\gamma + 1) p_2 \right] = \\ &= \frac{C_1^2}{2 \gamma} \left[(\gamma - 1) + (\gamma + 1) \frac{\rho_2}{\rho_1} \right] \end{aligned}$$

then using the result (*)

$$u_S = \frac{\gamma + 1}{2} U + \left[C_1^2 + \frac{(\gamma + 1)^2 U^2}{16} \right]^{1/2}$$

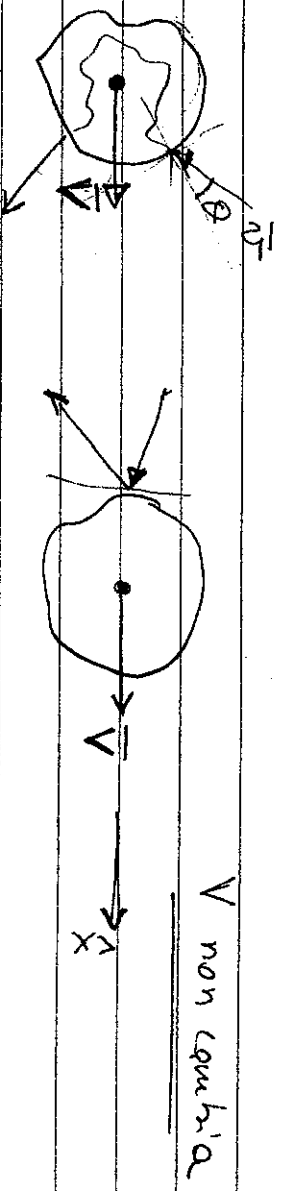
for $U \gg C_1$, $\left[u_S \rightarrow (\gamma + 1) \frac{U}{2} \right]$

for $\gamma = \frac{5}{3}$, $\underline{u_S = \frac{4}{3} U}$

1 Accelerazione del II ordine (accelerazione di FERMI)

basata sull'intuizione (oggi confermata) che nell'ISM
ci sono nubi di gas magnetizzate che si muovono
ad alta velocità.

Le nubi si comportano come "specchi magnetici"
di massa $M \gg m \Rightarrow$ urti elastici



cm frame = cloud frame In questo frame l'energia della
particella è:

$$E' = \gamma_V (E + V p \mu) \quad (1) \quad \mu \equiv \cos \theta$$

$$\gamma_V \equiv \left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

$$p'_x = \gamma_V \left(p_x + \frac{VE}{c^2}\right) \quad (2)$$

Trasformazioni dei 4-velocità

$$A^0 = (\gamma + \frac{V}{c} \gamma A_z) \gamma \quad A'^1 = \left(\gamma A^1 + \frac{V}{c} \gamma A^0\right) \gamma$$

$$\text{applicato a } p \quad p'^i = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

$$\text{ola' le eq. } (1) \text{ e } (2)$$

Energia finale nel sistema dell'osservatore E_f

si trasformano E usando (1) e (2)

$$E_f = \gamma_V (E - V p_x) = \downarrow \boxed{E_f' = E'} \text{ elavitate}$$

$$= \gamma_V^2 E \left[1 + \frac{V}{E} \bar{p}_x \mu - \frac{V}{E} \bar{p}_x \mu_f - \frac{V^2}{c^2} \right]$$

L'oscillazione del campo magnetico nella rete è random $\langle \mu_f' \rangle = 0$

$$\Rightarrow \langle E_f \rangle_{\mu_f'} = \gamma_V^2 E \left(1 + \frac{V}{E} \bar{p}_x \mu \right) \quad \left(\frac{V^2}{c^2} \ll 1 \right)$$

$$\text{usando } p_x = \frac{\gamma_V E}{c^2} \Rightarrow \left[\langle E_f \rangle_{\mu_f'} = \gamma_V^2 E \left(1 + \frac{\gamma_V V}{c^2} \mu \right) \right]$$

$$\approx \gamma_V^2 E (1 + \gamma_V \mu + V^2)$$

Un punto cruciale per capire il processo di accelerazione è che la probabilità di avere una collisione, con campo elettrico μ , dipende dalla velocità relativa particella - nube

$$P(\mu) = A \left(1 + \frac{V}{c} \mu \right)$$

$$A = \frac{1}{2}$$

non normalizzata

$$P(\mu = -1) = 0 \text{ se } \frac{V}{c} = 1$$

Vedi sec. 4 Longair
Compton analogy

$$\langle \Delta E \rangle = E_f - E \stackrel{v \ll c}{\approx} E(v\mu + v^2)$$

mediante su μ

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = - \int_{-1}^{+1} d\mu \frac{\Delta E}{E} P(\mu) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu (v\mu + v^2)(1 + \mu) \approx$$

$$\approx \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu (v^2\mu^2 + v^2) = \frac{4}{3} v^2$$

Nel caso di nuclei relativistici va tenuto conto

che

$$P(\mu) = A\gamma(1 - v\mu) \quad e \quad \langle E_f \rangle = E\gamma^2(1 + v\mu + v^2)$$

Spettro europeo della particella accelerata in
una situazione stazionaria

Se la distanza media della ruota è L $\rightarrow \langle \Delta t_{\text{rot}} \rangle = \frac{L}{c}$

$$\frac{\langle \Delta E \rangle}{\langle \Delta t \rangle} = \frac{4}{3} \frac{v^2}{c^2} E \frac{G}{L} = \frac{4}{3} \frac{v^2}{cL} E = \alpha E$$

che nel limite $v \gg \Delta t_{\text{coe}} \rightarrow$

$$\left| \frac{dE}{dt} = \alpha E \right|$$

Inserendo questo risultato nell'equazione diffusion-loss

$$\frac{dN}{dt} = \nabla^2 N + \frac{\partial}{\partial E} [b(E)N(E)] - \frac{N}{\tau_{\text{esc}}} + Q(E)$$

$\uparrow$

temine di fuga

Non interferendo della diffusione poniamo $\nabla^2 N = 0$

emissioni omogenee di particelle $\rightarrow Q(E) = 0$

$$\text{stazionarietà} \Rightarrow \frac{dN}{dt} = 0$$

Le temine di variazione dell'energia $b(E) = -\frac{dE}{dt}$ in

questo caso corrisponde all'accelerazione

$$b(E) = -\alpha E$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{\partial}{\partial E} [\alpha E N(E)] - \frac{N(E)}{\tau_{\text{esc}}} = 0 \right] \Rightarrow$$

$$\frac{dN(E)}{dE} = \frac{N(E)}{E} \left(1 + \frac{1}{\alpha \tau_{\text{esc}}} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{dN(E)}{N(E)} = \left(1 + \frac{1}{\alpha^2 c^2}\right) \frac{dE}{E}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} N = \cos t \quad E = x \\ x = \left(1 + \frac{1}{\alpha^2 c^2}\right) \end{array} \right]$$

$$\alpha = \frac{4}{3} \frac{V^2}{cL}$$

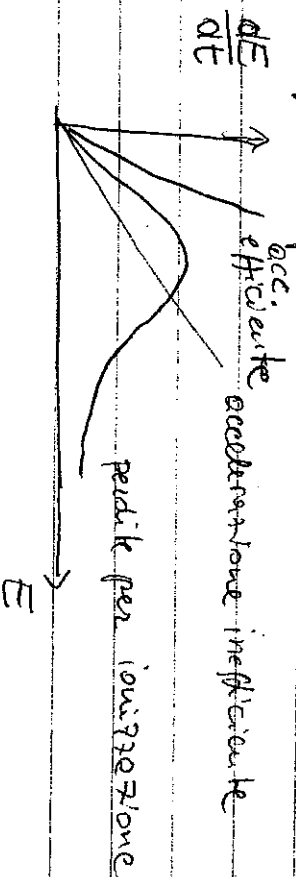
spettro a potenza !

1) Nell'articolo originale di Terzi era scritto che l'accelerazione di RC avvenire solo a causa delle collisioni con le nubi interstellari. Ciò porta a problemi!

1) la distanza delle nubi nell'ISM è troppo grande $\sim 1 \text{ pc}$ e la velocità delle nubi è troppo bene $\frac{V}{c} \sim 10^{-4}$

Ciò porta ad un tempo di accelerazione troppo piccolo

2) le perdite di energia non sono state considerate, soprattutto quella per ionizzazione.



3) questo meccanismo non spiega come mai le spiege dello spettro osservato è ~ 2.5 ovunque si osservi.

Accelerazione da shock forti

(Accelerazione di Fermi del I° ordine)

Nel caso dell'accelerazione del I ordine abbiamo visto che in ogni singolo auto particella-neutro

$$\frac{\Delta E}{E} = V \cos \theta + V^2$$

il termine lineare in V scompare quando si media sull'angolo θ a causa del fatto che esistono collisioni che riducono l'energia

$\frac{\Delta E}{E}$ dipende $\propto V$ e gli altri termini sempre fronzoli!

Questo è quanto accade nel caso del passaggio di un'onda d'urto "magnetizzata"

Tipicamente gli shock prodotti dalle SN sono forti

$$v_{\text{speda}} \sim 10^3 \div 10^4 \text{ km s}^{-1}$$

$$v_{\text{sound}} \sim v_A \sim 10 \text{ km s}^{-1}$$

■

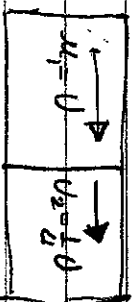
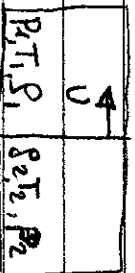
Le equazioni di conservazione ipercano in questo caso

$$r = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \quad \gamma = \frac{5}{3} \Rightarrow r = 4$$

conservazione $\rightarrow$ $r = \frac{u_2}{u_1} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{4} u_1$

Le particelle non interagiscono con lo shock ($T_L \gg \Delta E_s$)
(shock non collimato) ma con le fluttuazioni
del campo magnetico a monte e a valle.

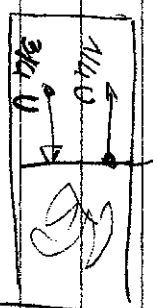
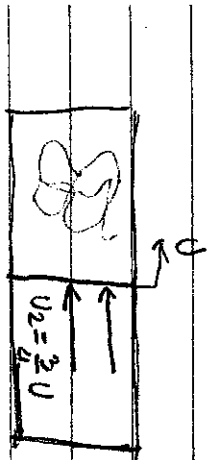
upstream downstream



sistema dell'osservatore

shock frame

$$u_1 = u \quad u_2 = \frac{1}{4} u_1 = \frac{1}{4} u$$



upstream frame

downstream frame

$$u_1 = 0 \quad u_2 - u_1 = (u_2 - u_1)_{\text{shock f.}} = \frac{3}{4} u$$

$$u_2 = 0$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{3}{4} u$$

" head-on "

$$u_1 = \frac{3}{4} u$$

" head-on "

$\Rightarrow \Delta E$ è sempre positivo!

Determinazione dello spettro (metodo di Bell)

E_0 energia iniziale

N_0 numero iniziale di particelle non decimate

1° collisione $E_0 \rightarrow E_1 = g E_0$ | $N_1 = P N_0$

2° " $E_1 \rightarrow E_2 = g E_1 = g^2 E_0$ | $N_2 = P^2 N_0$

$$\begin{array}{l} \vdots \\ k \text{ " } \end{array} \quad \boxed{E_k = g^k E_0} \quad \boxed{N_k = P^k N_0} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

P : probabilità di perdere la particella accelerata

si elimina k da (1) e (2)

$$\left(\begin{array}{l} E_k \\ E_0 \end{array} \right) = g^k \rightarrow \ln \left(\frac{E_k}{E_0} \right) = k \ln g \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \ln \left(\frac{N_k}{N_0} \right) = \frac{\ln P}{\ln g} \ln \left(\frac{E_k}{E_0} \right)$$

$$\boxed{\left(\frac{N_k}{N_0} \right) = \left(\frac{E_k}{E_0} \right)^{-\alpha}} \quad \boxed{\alpha = - \frac{\ln P}{\ln g}}$$

Determinazione di g

$$\frac{\Delta E}{E} = V \cos \theta = \gamma u \quad V = u_1 - u_2$$

$$dP(\theta) = \sin \theta d\theta \quad \text{probab. } \theta, \theta + d\theta$$

(la direzione della velocità è trascurabile)

$$\text{rate di "shock crossing"} \propto \bar{\sigma} \cdot \hat{n} = c \cos \theta$$

$$P(\theta) = A \sin \theta \cos \theta \quad 1 = \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = A \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\sin \theta = \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow A = 2$$

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = V \int_0^{\pi/2} \cos \theta P(\theta) d\theta = V \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{3} V$$

per un singolo attraversamento.

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle_{\text{circa}} = \frac{4}{3} V$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_1 - E_0}{E_0} = (g - 1) \Rightarrow g = 1 + \frac{\Delta E}{E} = 1 + \frac{4}{3} V = 1 + \frac{4}{3} (u_1 - u_2)$$

Determinazione di P

Probabilità di attraversare lo shock e ritorno

Partendo a monte dello shock con velocità $|c|$ isotropa

$$P_{cross} = \frac{1}{2} \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\phi_1 = \frac{1}{4} N c$$

Flusso verso downstream

La velocità dello shock nel sistema a riposo con il gas downstream è $\frac{1}{4} U$

$$\text{isotropia} \rightarrow \phi_{lost} \equiv \phi_2 = \frac{1}{4} U N = N V$$

$$P = \frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{\frac{1}{4} N U}{\frac{1}{4} N c} = \frac{U}{c} = 4 u_2$$

quindi

$$\alpha = - \frac{\ln P}{\ln q}$$

$$\ln P = \left(1 - U\right) \simeq -U \quad \ln q = \ln\left(1 + \frac{4}{3}U\right) \simeq \frac{4}{3}U = U$$

$$\boxed{\alpha = -1} \Rightarrow \boxed{N(E) dE \propto E^{-2} dE}$$

spettro differenziale

Prü in generale (shock quasi forte)

$$\alpha = - \frac{\ln(1 - 4u_2)}{\ln\left[1 + \frac{4}{3}(u_1 - u_2)\right]} \approx \frac{4u_2}{\frac{4}{3}(u_1 - u_2)} = 3 \frac{u_2}{u_1 - u_2}$$

$$N(E > E_k) = N_0 \left(\frac{E_k}{E_0} \right)^{-\frac{3u_2}{u_1 - u_2}}$$

$$N(E) \propto \left(\frac{E}{E_0} \right)^{-\frac{3u_2}{u_1 - u_1} - 1} = \left(\frac{E}{E_0} \right)^{-p}$$

$$p = 1 + \frac{3u_2}{u_1 - u_2} = \frac{u_2 + 2u_1}{u_1 - u_2} = \boxed{\frac{r+2}{r+1}}$$

Proprietà generali dello spettro

- è una legge a potenza

(pure conseguenza della presenza di uno shock forte e della randomizzazione ai due lati dello shock)

- $p \rightarrow 2$ per $M_s \rightarrow \infty$

- p è indipendente dalla proprietà definitive

Energia minima

E' determinata da 3 fattori

a) tempo di accelerazione avere tempo di andata-ritorno attraverso lo shock; E' determinato dalla diffusione

(tempo lungo) $t_{acc} \sim \frac{D_1}{u_1} \Rightarrow t_{acc} = \frac{D_1(E)}{u_1^2}$
 (ricordati che $D \propto \frac{1}{3} v \lambda_{sc}$)

b) perdite radiative $\tau \propto E^{-1}$
 segn

c) fuga dalla particella
 grande $r_L(E) \gg L$ (dimensione del SNR)
 e.g.)

E_{max} è determinato dalla condizione

$$\tau_{acc}(E_{max}) = \min[\tau_{loss}, \tau_{esc}]$$

Tipicamente per un SNR

$$B \sim 10^{-5} \text{ G} \quad L \sim 1 \text{ pc} \sim 3 \times 10^{18} \text{ cm}$$

$$r_L(E_{max}) = L \Rightarrow E_{max} \sim 10^{15} \div 10^{16} \text{ eV}$$

In realtà bisogna che consideri $\lambda_{diff} = \frac{D}{u} = L$

$$u \sim 10^{-2} c$$

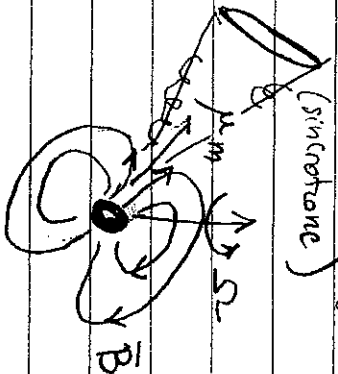
$$D = \frac{1}{3} c r_L$$

} $\Rightarrow$

$$E_{max} \sim 10^{13} \div 10^{14} \text{ eV}$$

(Accelerazione delle pulsars

pulsar = stelle di neutroni magnetizzata
 ruotante con l'asse del dipolo disallineato
 forie radio (sincrotrone) dall'asse di rotazione



tipicamente $M_{NS} \approx 1.4 M_{\odot}$

$R \sim 10 \text{ km}$

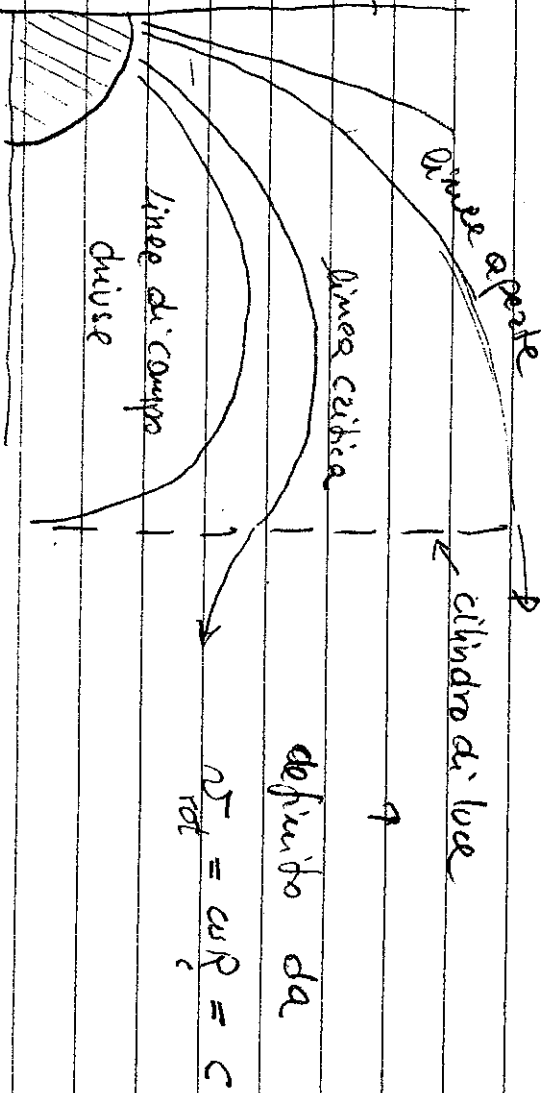
$B \sim 10^8 \div 10^{12} \text{ G}$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \quad T \sim 33 \text{ ms} \quad \text{Crab}$$

Forza di Lorentz sulla superficie $\Rightarrow$ forze gravitazionali

Potenziale elettrico $>$ potenziale di accelerazione $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ formazione di un plasma con elevatissima conduttività



Le particelle accelerate fuggono lungo le linee aperte.

Le particelle cariche vengono accelerate dal campo elettrico indotto dalla rotazione del campo magnetico

Il tempo di accelerazione è molto corto $\ll T_{\text{rotazione}}$

$$\text{infatti } m \frac{dv}{dt} = e \vec{E} \rightarrow v = \frac{e}{m} E \Delta t$$

$$v=c \Rightarrow \Delta t \approx \frac{mc}{eE} \sim 10^{-14} \text{ s} \ll T \sim 10^{-3} \text{ s}$$

Energia massima

determinata dal max campo elettrico indotto dalla max velocità di variazione del flusso di $\vec{B}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E} \approx \frac{B}{L/c}$$

$$\Rightarrow E_{\text{max}} = cB$$

$$E_{\text{max}} = \int_0^L z e E_{\text{max}} dl \approx z e B c L$$

$$\text{per } B = 10^{10} \text{ G}$$

$$e \cdot 1 \text{ Gauss} = 5.0 \times 10^{-3} \text{ eV}$$

$$1 \text{ eV} = 5 \times 10^4 \text{ cm}^{-1}$$

$$c = 1$$

$$E_{\text{max}} = e B L \approx 10^{19} \text{ eV}$$