Reazioni nucleari nelle stelle

Classificazione dei tipi di stelle

Variabili che caratterizzano una stella:

a) ***Temperatura***
b) ***Luminosita'***
c) ***Colore***
d) ***Raggio***

Luminosita' apparente di una stella

Luminosita' apparente (Ipparco di Nicea): Stelle di prima, seconda etc. *magnitudo*

$$m = m_0 - 2.5 \log(I/I_0)$$

(Legge di Pogson)

Rispecchia la dipendenza logaritmica della sensibilita' dell'occhio umano dall'intensita'
Costanti I_0 ed m_0 scelte in modo tale da fornire i valori di magnitudo determinati dagli antichi greci

Stelle di bassa luminosita' apparente = grandi valori (positivi) di m

Stelle visibili solo con telescopi spaziali: m = +29

Sirio: m = -1.44; Sole: m = -26.7

Luminosita' assoluta

Magnitudo e luminosita' assolute: quelle che la medesima stella avrebbe se fosse alla distanza di 10 pc.

"Portare" una stella di luminosita' apparente m dalla distanza vera r a quella di 10 pc, equivale nella:

$$m = m_0 - 2.5 \log(l/l_0) \quad \text{(a)}$$

a moltiplicare l'argomento del log per $4\pi\ 10^2$ e dividere per $4\pi\ r^2$:

$$M = m_0 - 2.5 \log(l\ 4\pi\ 10^2 / l_0\ 4\pi\ r^2) =$$

$$m_0 - 2.5\ [\log(l/l_0) + 2 - 2 \log r] \quad \text{(b)}$$

Sottraendo (b) da (a):

$$m - M = 5 \log r - 5$$

Noti m ed r -> M

Temperatura superficiale di una stella

Emissione di corpo nero: $\varepsilon=\sigma\, T_e^4$
(σ = costante di Stefan-Boltzmann)
ε=energia emessa per unita' di tempo e di superficie
Distribuzione spettrale e' una distribuzione di Planck
Possibile ottenere la temperatura misurando la distribuzione spettrale o equivalentemente, l'intensita' della radiazione emessa ad alcune frequenze (usando filtri..U,B,V)

B-V (o U-B) "Indice di colore"

Temperatura superficiale di una stella

La magnitudine nel blu (indicata col simbolo B) è la magnitudine di un oggetto astronomico misurata usando un'emulsione fotografica standard, la quale è più sensibile dell'occhio umano alla parte blu e violetta dello spettro .

Magnitudine nell'infrarosso (I), quella nell'ultravioletto (U) e quella visuale (V). Per ottenere le magnitudini (U), (B), (I) si adoperano appositi filtri.

B-V (o U-B) "Indice di colore"

A minori temperature corrispondono maggiori indici di colore

Temperatura superficiale di una stella

Indice di colore	Temperatura (K)
$-0^m,4$	50000
-0,32	25000
-0,16	15600
0,0	11000
+0,15	8700
+0,30	7600
+0,44	6600
+0,60	6000
+0,68	5520
+0,82	5120
+1,18	4400
+1,45	3600
+1,69	2700

Temperatura superficiale di una stella

Alternativamente.. uso della legge di Wien:

$\lambda_m\ T_e = \text{cost.}$

dove λ_m = lunghezza d'onda di max emissione

Diagramma di Hertzsprung-Russel (HR)

Luminosita’ in funzione della temperatura superficiale (o magnitudo vs indice di colore)

Diagramma HR generico

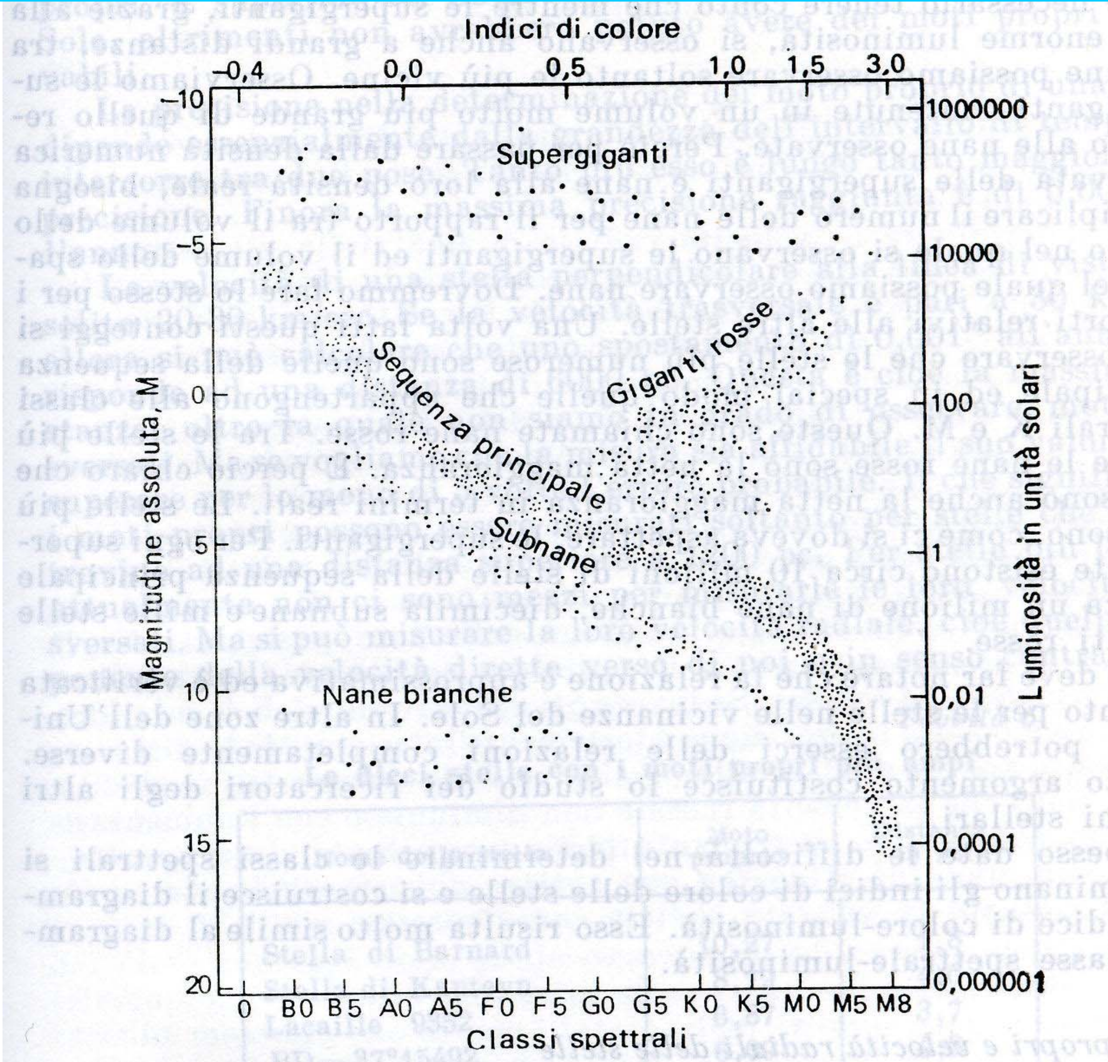

Fig. 8. Diagramma spettro-magnitudine assoluta.

Diagramma di *Hertzsprung-Russel* (HR)

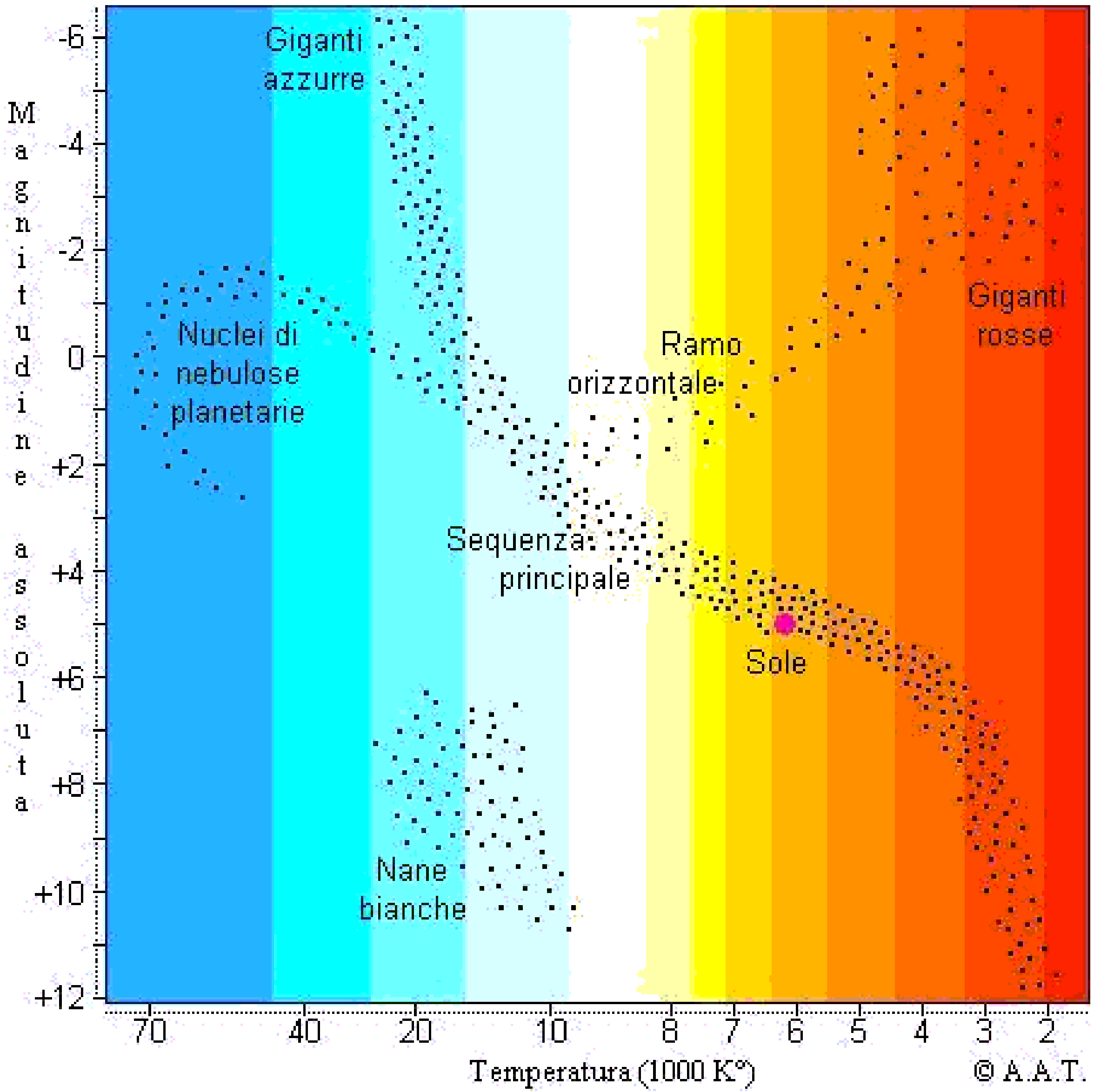

Diagramma HR *(schematico)*

Luminosita' in funzione della temperatura superficiale (o magnitudo vs indice di colore)

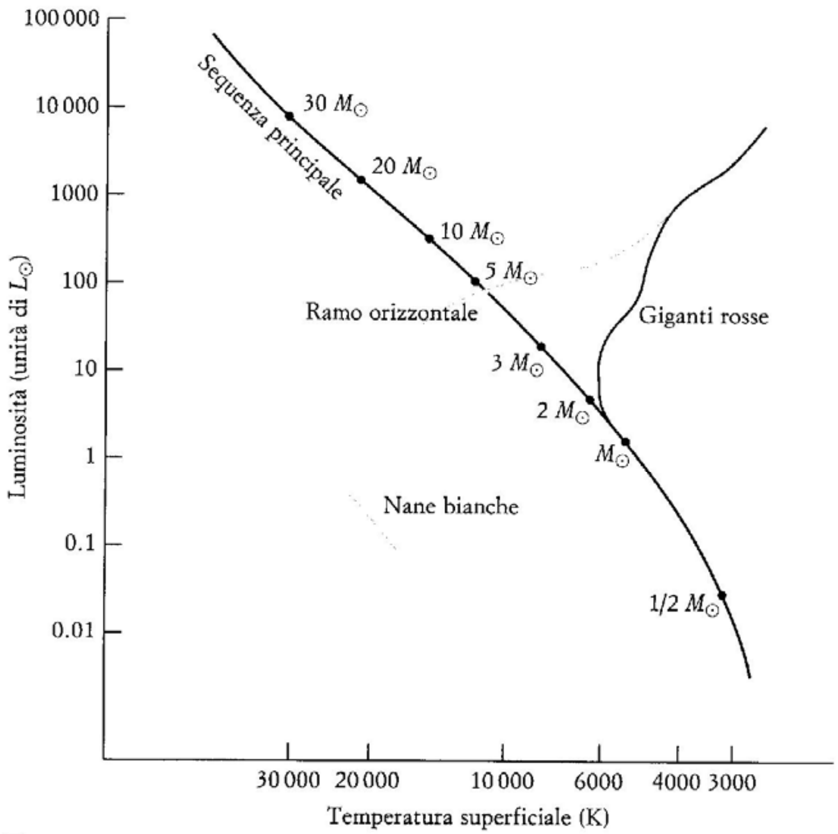

Figura 9
Diagramma di Hertzsprung-Russell semplificato per le stelle. Le stelle si trovano solo in certe regioni del diagramma, come indicato.

Per stelle aventi masse tra 1 e 10 Masse Solari:

$$L \sim M^{\alpha}$$

con $\alpha \sim 4$

Diagramma HR (ammassi globulari)

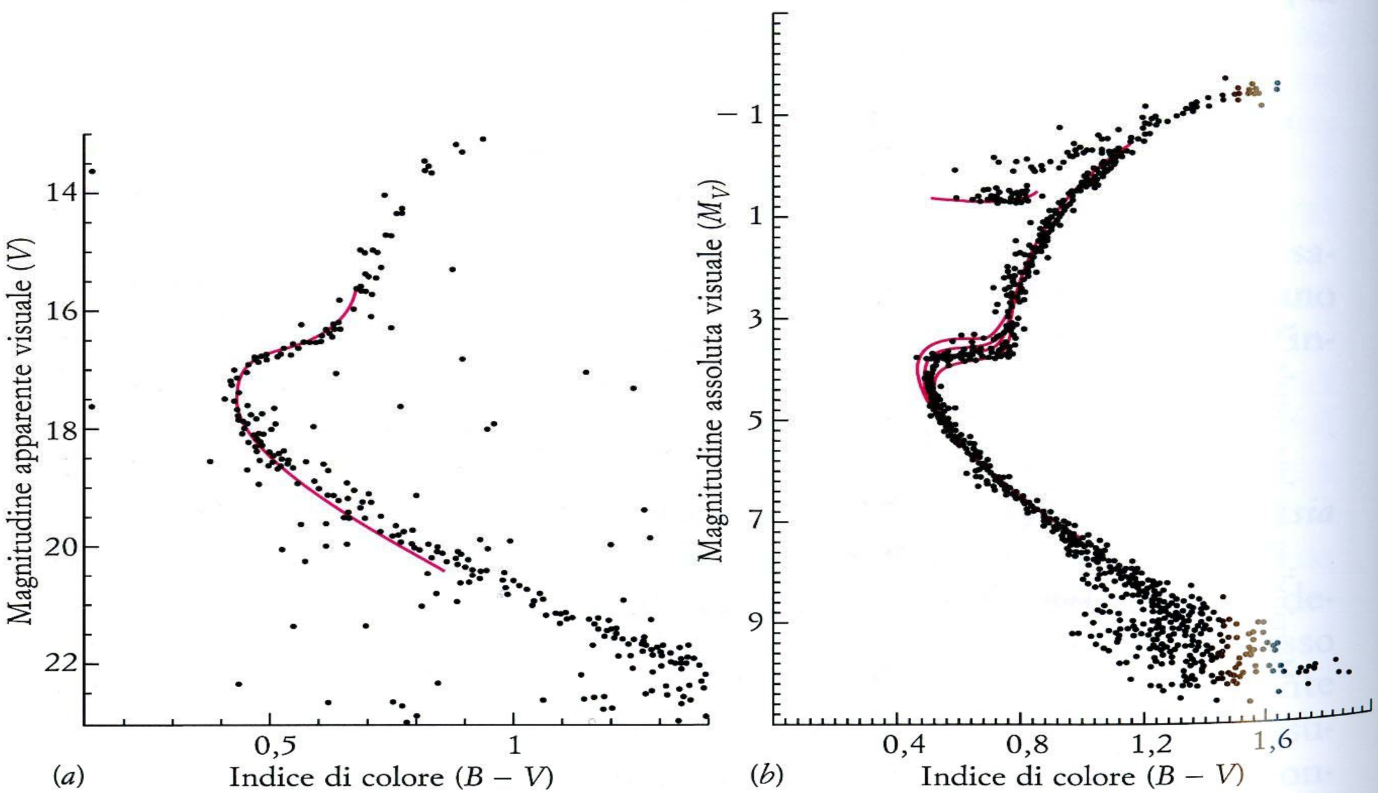

Figura 20
Diagramma H-R per gli ammassi globulari NGC6752 (*a*) e 47 Tucanae (*b*). La dispersione dei punti aumenta alle basse intensità, soprattutto per il maggiore errore delle misure fotometriche di stelle deboli. Le linee continue indicano la migliore interpolazione (*best fit*) dei dati, in base ai modelli teorici di D. A. VandenBerg dell'evoluzione stellare dalla sequenza principale al ramo delle giganti. (*a*) Per NGC6752 il luogo (isocrona) ha un'età di 16 miliardi di anni e l'abbondanza di metalli è minore di quella del Sole di un fattore 30. (*b*) Nel caso dell'ammasso 47 Tucanae, le isocrone che meglio si adattano ai dati hanno un'età intorno ai 12-14 miliardi di anni, e l'abbondanza di metalli, pari al 20% circa del valore solare, è maggiore che in altri ammassi.

Evoluzione stellare

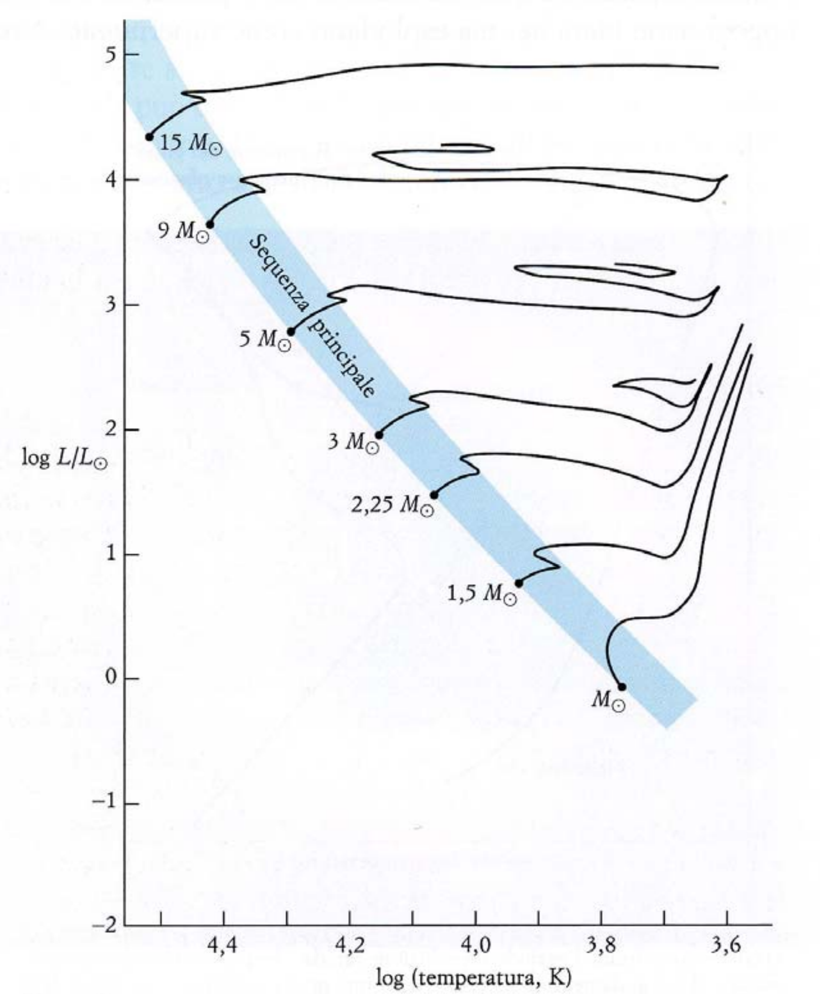

Figura 12
Percorsi evolutivi di stelle con massa diversa in un diagramma H-R. Nel modello si suppone che non vi siano perdite di massa. La stella rimane sulla sequenza principale per la maggior parte della sua vita; le fasi evolutive successive sul ramo delle giganti sono molto più brevi.

Combustione (nucleare) dell'idrogeno → He
Quando il 10% dell'idrogeno e' bruciato →

Raggio e luminosita' aumentano
La stella abbandona la sequenza principale e diviene una gigante rossa

Origine dell'energia solare

Fase di contrazione di una stella:
Energia potenziale gravitazionale => energia cinetica
(aumento di temperatura)

Teorema del viriale:
$2\,E_{termica} + V_g = 0 \Rightarrow$
$E_{tot} = E_{termica} + V_g = -E_{termica}$ *(negativa !)*

Capacita' termica negativa =>
L'energia persa per radiazione non lo raffredda, ma anzi lo riscalda

Teorema del viriale (1)

Equazioni del moto per un sistema di molti corpi (masse m_i, posizioni $\vec{r}_i$) interagenti solo attraverso la gravitazione:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i \;=\; -G \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \tag{1}$$

Sistema in condizione *stazionaria*.
Moltiplichiamo scalarmente il termine a sinistra per $\vec{r}_i$ e sommiamo sull'indice i:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i \;=\; \sum_i m_i \left[\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{r_i^2}{2} \right) - \dot{r}_i^2 \right] \tag{2}$$

Infatti:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{r_i^2}{2} \right) \;=\; \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i \tag{3}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{r_i^2}{2} \right) \;=\; \dot{r}_i^2 + \ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i \tag{4}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i \;=\; \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \frac{r_i^2}{2} - \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \;=\; \frac{d^2}{dt^2} I - 2E_K \tag{5}$$

con: I=momento d'inerzia del sistema ed E_K la sua energia cinetica.
Sistema stazionario $\Rightarrow$ I=costante.
Segue:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i \;=\; -2E_K \tag{6}$$

Teorema del viriale (2)

Moltiplichiamo ora scalarmente il termine a destra della 1 per $\vec{r}_i$ e sommiamo su i:

$$-\sum_{ij} m_i m_j G \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\cdot \vec{r}_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \tag{7}$$

scambiamo in questa i con j:

$$-\sum_{ij} m_i m_j G \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)\cdot \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \;=\; \sum_{ij} m_i m_j G \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\cdot \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \tag{8}$$

Sommiamo ora i due termini uguali dati dalla 7 e dall'ultimo membro della 8 e dividiamo per 2. Otteniamo:

$$\ldots = -\frac{1}{2}\sum m_i m_j G \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \;=\; E_G$$

con E_G l'energia gravitazionale del sistema.

Segue infine:

$$-2E_K \;=\; E_G$$

$\Rightarrow$

$$E_K \;=\; -\frac{1}{2}E_G \;=\; \frac{1}{2}|E_G|$$

L'energia totale del sistema è allora:

$$E_T \;=\; E_K + E_G \;=\; E_G - \frac{1}{2}E_G \;=\; \frac{1}{2}E_G$$

Con che è dimostrato il teorema del viriale.

Notiamo che E_K è poi l'energia termica E_{term}, per cui ritroviamo la forma adoperata in precedenza:

$$E_{tot} \;=\; E_{term} + E_G \;=\; -E_{term}$$

Origine dell'energia solare (1)

Calcolo della temperatura (supposta uniforme!)

$E_{termica}$=3/2 N kT = 3/2 (M_S /M_P) kT

$V_g = -G\, M_S^2/R_S$

(M_S = massa solare; M_p = massa del protone)

Teorema del viriale =>3 kT=G M_S/(R_S M_p)=600 eV

T=7.7 10^6 K

Approccio alternativo al teorema del viriale

Stella sferica, in equilibrio idrostatico e in uno stato termico stazionario:

$$-\rho(r)\frac{GM(r)}{r^2}=\frac{dP(r)}{dr}$$

Moltiplichiamo per $4\pi r^3$ ed integriamo per parti:

$$-\int_0^R \rho(r)\frac{GM(r)}{r}4\pi r^2 dr=\int_0^R \frac{dP(r)}{dr}4\pi r^3 dr = 4\pi r^3 P(r)\Big|_0^R - \int_0^R 12\pi r^2 P(r)dr$$

Definizione di raggio stellare $\Rightarrow P(R)=0 \quad \Rightarrow$

$$-\int_0^R \rho(r)\frac{GM(r)}{r}4\pi r^2 dr \quad = \quad -3\int_0^R 4\pi r^2 P(r)dr$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

Energia gravitazionale della stella E_{grav} — Energia interna totale E_{in}

Infatti per una stella (gas) che soddisfi la relazione adiabatica: $P=(\gamma-1)\varepsilon$ con ε l'energia interna per unita' di volume, l'integrale di destra diviene: $(\gamma-1)E_{in}$

Segue:

$$E_{grav}=-3(\gamma-1)E_{in}$$

L'energia totale: $E_{grav}+E_{in}$ e' allora:

$$E=E_{in}(4-3\gamma)=E_{grav}\left(\frac{3\gamma-4}{3\gamma-3}\right)\le 0 \quad \text{(stella energeticamente legata)}$$

Approccio alternativo al teorema del viriale (1)

$$\text{L'energia totale}: E_{grav} + E_{in} \text{ e' allora}:$$
$$E = E_{in}(4-3\gamma) = E_{grav}\left(\frac{3\gamma-4}{3\gamma-3}\right) \le 0 \quad (\text{stella energeticamente legata})$$

Se γ=5/3 (Sole) ➔ E=1/2 E_{grav}= -E_{in}< 0 (Stella legata gravitazionalmente, con una grande energia di legame)

Una stella con γ>4/3 ha un calore specifico negativo.

Un apporto di energia aumenta E e riduce E_{in} . Poiche' la temperatura e' funzione crescente di E_{in}, cio' porta ad una diminuzione della temperatura.

Analogamente, una perdita radiativa di energia dalla superficie (se non compensata internamente) porta ad un aumento della temperatura interna.

Cio' e' conseguenza dell'ipotesi fatta di equilibrio idrostatico

Valori delle costanti

Valori delle costanti adoperate

$G=6.672\ 10^{-8}\ cm^3/g\ s^2$

$M_S=2.0\ 10^{33}\ g$

$R_S=7.0\ 10^{10}\ cm$

$M_P=1.672\ 10^{-24}\ g$

$k=1.38\ 10^{-23}\ J\ K^{-1} = 8.617\ 10^{-5}\ eV\ K^{-1}$

$1\ erg=6.25\ 10^{11}\ eV$

$L_S=4\ 10^{33}\ erg/s$

Origine dell'energia solare (2)

Condensazione gravitazionale

Temperatura estremamente elevata =>
Processi termonucleari, a partire dalla fusione di nuclei di idrogeno:

$$p + p \rightarrow d + e^{+} + \nu$$

seguita da processi (esotermici) che portano alla formazione di nuclei sempre piu' pesanti , fino al gruppo del Fe

Il processo si arresta quando la produzione di elementi piu' pesanti richiederebbe un notevole apporto energetico

Processi nucleari

Vantaggiosa, dal punto di vista energetico, la fusione di elementi leggeri per formare nuclei piu' pesanti, con liberazione di energia (energia termonucleare).

Al contrario, il processo vantaggioso per i nuclei piu' pesanti e' la fissione in frammenti, accompagnata da liberazione di energia (energia atomica)

Il processo di fusione si arresta quando la produzione di elementi piu' pesanti richiederebbe un notevole apporto energetico

Energie di legame nucleare

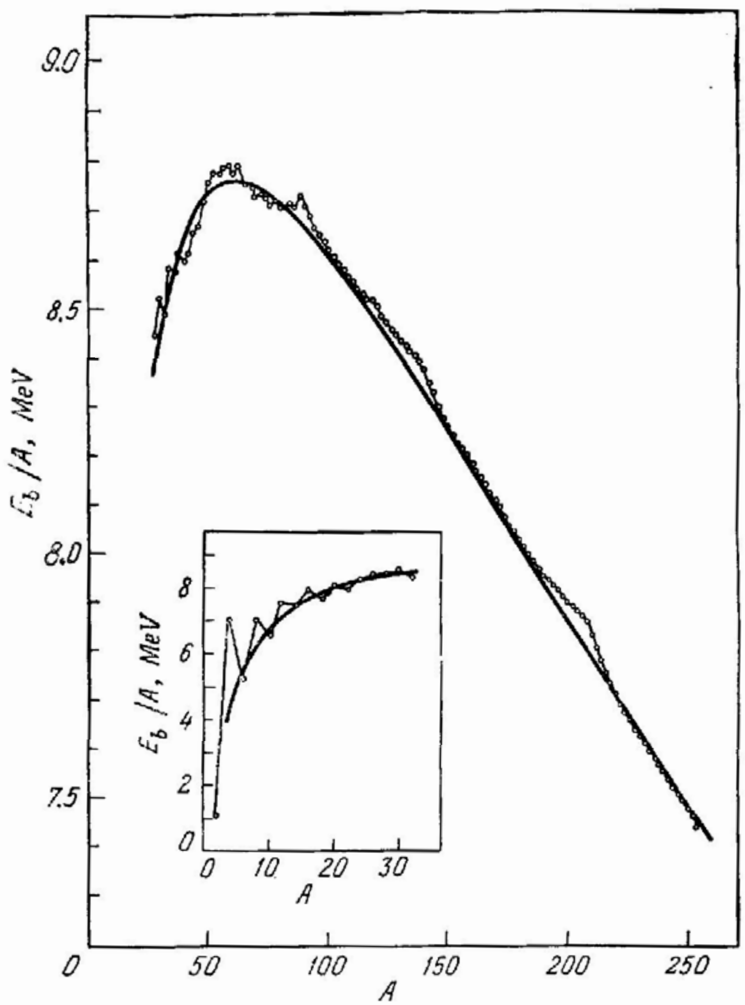

Fig. 2.5. Dependence of nuclear specific binding energy on mass number A. Points are experimental data. Smooth curve is the result of calculations with the aid of the Weizsäcker's formula. The insert shows specific binding energy for light nuclei.

Energia media liberata per protone = 7.5 MeV

Il processo si arresta con la formazione del Fe (massimo dell'energia di legame)

Stima di vita del Sole

Quando la stella ha convertito ~ il 10% del suo idrogeno in He, essa raggiunge il limite di Schonberg-Chandrasekar e diviene instabile.
Il nucleo si contrae mentre il guscio si espande →
La stella diviene una "Gigante"

Nella fusione di 4 nuclei di idrogeno a formare un nucleo di He, si libera, per una massa M di idrogeno, un'energia pari a 0.007 Mc^2

Quando il Sole avra' bruciato il 10% della sua massa, avra' liberato un'energia:

$$E = 7 \times 10^{-4} M_S c^2$$

Poiche' la sua luminosita' L e' sempre rimasta costante →

$$L \times T = 7 \times 10^{-4} M_S c^2$$

Nota la luminosita' (3.9 10^{26} W) e la massa (2×10^{30} kg), si puo' calcolare T

(tempo dopo il quale il Sole uscira' dalla sequenza principale)

Stima di vita del Sole

All'attuale luminosita', il sole durera':

$T=(1.25\ 10^{44}\ J)\ /\ (3.9\ 10^{26}\ W) = 3.2 \times 10^{17}\ s = 1.02\ 10^{10}\ yr$

Energia liberata al secondo, per grammo di materia solare:

$\varepsilon=(3.9\ 10^{26}\ W)/(2\ 10^{30}\ Kg)= 2 \times 10^{-4}\ W\ /\ Kg$

Corpo umano (80 kg; 100W) $\rightarrow$ ε=1.25 W/ Kg

Il sole brucia molto piu' lentamente di noi !!

Stima di vita per una stella della sequenza principale di massa M

Per una stella di massa compresa tra 1 e 10 M_S

$$L \sim M^{\alpha}$$

$L \times T = 7 \times 10^{-4} Mc^2 \rightarrow \quad T \sim M/L \sim M/M^{\alpha} = M^{-(\alpha-1)}$

La vita decresce all'aumentare della massa

- Per una stella avente $M = 2\ M_S \rightarrow T \sim 1.3\ 10^9$ anni

- Per una stella avente $M = 5\ M_S \rightarrow T \sim 8\ 10^7$ anni