

# Oscillazioni dei neutrini: note per il Corso

Vincenzo Flaminio

Ottobre 2006

## 1 La matrice di mixing

Ammettiamo che gli autostati dell'interazione debole:  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$  non coincidano con gli stati di massa definita, che chiameremo:  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ . Chiamiamo  $U$  la matrice unitaria che connette i due insiemi (nota come *matrice di mixing*; avremo allora:

$$\nu_\alpha = \sum_j U_{\alpha j} \nu_j \quad (1)$$

$$\nu_j = \sum_\beta U_{j\beta}^\dagger \nu_\beta \quad (2)$$

dove  $\alpha, \beta = e, \mu, \tau$ .

Ammetteremo che ciascun autostato di massa  $|j\rangle$  sia in un autostato dell'impulso (P) e che quindi abbia un'energia data da  $E_j = \sqrt{P^2 + m_j^2}$ .

La matrice di mixing  $U$  è in generale complessa, se CP è violato.

La relazione 1, scritta in forma esplicita. è:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Nel caso generale in cui CP sia violato, e di conseguenza  $U$  sia complessa, questa viene spesso parametrizzata nella forma del prodotto di tre rotazioni:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

dove si è fatto uso delle abbreviazioni:

$$c_{ij} = \cos \theta_{ij}$$

$$s_{ij} = \sin \theta_{ij}$$

Effettuando i prodotti, si ottiene la matrice<sup>1</sup>:

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Con questo formalismo, il mixing viene a dipendere solo dai tre angoli di mixing  $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ , dalla fase  $\delta$  che descrive la violazione di CP e, come vedremo, dalle differenze dei quadrati delle masse:

$$\delta m_{12}^2 = m_1^2 - m_2^2$$

$$\delta m_{23}^2 = m_2^2 - m_3^2$$

$$\delta m_{13}^2 = m_1^2 - m_3^2$$

delle quali solo due sono indipendenti.

## 2 Oscillazioni tra autostati del flavour

Un neutrino di flavour definito (e.g.  $\alpha$ ), prodotto all'istante  $t=0$ , può esser espresso come combinazione lineare degli autostati di massa, usando la 1. In assenza di interazioni, ciascun autostato di massa sarà descritto da un'onda piana:

$$|\nu_j\rangle_t = |\nu_j\rangle_0 \exp[i(Px - E_j t)] \quad (6)$$

dove  $E_j$  è l'energia dello stato  $j$  — *mo* di massa definita  $m_j$ ,  $P$  il suo impulso (che si suppone uguale per tutti gli stati la cui sovrapposizione costituisce il neutrino prodotto con flavour definito) e dove la "i" è l'unità immaginaria. Il fattore  $\exp(iPx)$ , comune a tutti gli autostati di massa, costituisce una fattore di fase globale che d'ora in avanti potrà esser trascurato.

All'istante  $t$ , lo stato che era stato prodotto per  $t = 0$  come autostato  $\alpha$  del flavour, sarà allora esprimibile nella forma:

$$|\nu_\alpha\rangle_t = \sum_j U_{\alpha j} \exp[-iE_j t] |\nu_j\rangle_0 \quad (7)$$

Se effettuiamo un esperimento che misura il flavour dello stato al tempo  $t$ , troveremo per l'ampiezza di probabilità di un flavour  $\beta$ :

$$A(\alpha \rightarrow \beta) = \langle \nu_\beta | \nu_\alpha \rangle_t = \sum_j U_{\alpha j} \exp[-iE_j t] \langle \nu_\beta | \nu_j \rangle_0 \quad (8)$$

---

<sup>1</sup>Analoga a quella adoperata per descrivere il mixing nel settore dei quark: matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa

Il termine  $\langle \nu_\beta | \nu_j(0) \rangle$  rappresenta l'ampiezza di probabilità di trovare il flavour  $\langle \nu_\beta |$  in un sistema nello stato  $|\nu_j(0)\rangle$ . Facendo ora uso della 2, troviamo che tale ampiezza è  $U_{j\beta}^\dagger = U_{\beta j}^*$ . Ne segue:

$$A(\alpha \rightarrow \beta) = \sum_j U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp[-iE_j t] \quad (9)$$

La probabilità di trovare dopo un tempo  $t$  un neutrino di flavour  $\beta$ , partendo a  $t = 0$  con uno di flavour  $\alpha$  è il modulo quadro di tale ampiezza, cioè:

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}(t) &= \\ &= \left| \sum_j U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp[-iE_j t] \right|^2 = \\ &= \left( \sum_j U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp[-iE_j t] \right) \left( \sum_k U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \exp[+iE_k t] \right) = \\ &= \sum_{jk} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \exp[-i(E_j - E_k)t] \end{aligned} \quad (10)$$

Notiamo ora che:

$$\begin{aligned} E_j &= \sqrt{P^2 + m_j^2} \simeq P \left( 1 + \frac{m_j^2}{2P^2} \right) \\ E_k &= \sqrt{P^2 + m_k^2} \simeq P \left( 1 + \frac{m_k^2}{2P^2} \right) \end{aligned}$$

per cui:

$$E_j - E_k \simeq \frac{m_j^2 - m_k^2}{2P} \simeq \frac{m_j^2 - m_k^2}{2E} \equiv \frac{\delta m_{jk}^2}{2E}$$

dove abbiamo posto:

$$m_j^2 - m_k^2 = \delta m_{jk}^2$$

differenza tra i quadrati delle masse degli stati  $|\nu_j\rangle$  e  $|\nu_k\rangle$ .

Il termine esponenziale nella 10 può allora esser messo nella forma:

$$\exp[-i(E_j - E_k)t] = \cos\left(\frac{\delta m_{jk}^2}{2E}t\right) - i \sin\left(\frac{\delta m_{jk}^2}{2E}t\right)$$

L'ultima relazione scritta diventa allora:

$$P_{\alpha\beta}(t) =$$

$$= \sum_{jk} \Re \left\{ U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \right\} \cos \left( \frac{\delta m_{jk}^2}{2E} t \right) + \sum_{jk} \Im \left\{ U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \right\} \sin \left( \frac{\delta m_{jk}^2}{2E} t \right)$$

Facciamo ora uso dell'equazione:

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

per riscrivere l'ultima equazione nella forma:

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}(t) &= \\ &= \sum_{jk} \Re \left\{ U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \right\} - 2 \sum_{jk} \Re \left\{ U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \right\} \sin^2 \left( \frac{\delta m_{jk}^2}{4E} t \right) + \\ &+ \sum_{jk} \Im \left\{ U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \right\} \sin \left( \frac{\delta m_{jk}^2}{2E} t \right) \end{aligned}$$

Se CP è conservata, la matrice  $U$  è reale ed il termine lineare nella funzione seno in quest'espressione si annulla.

I termini con  $j = k$  nelle due sommatorie contenenti i termini sinusoidali in  $\delta m_{jk}$  sono ovviamente nulli. Data poi la simmetria rispetto ad uno scambio di  $j$  con  $k$ , possiamo limitarci ad effettuare la somma dei termini con  $j \neq k$ , limitandoci a sommare su quelli con  $j > k$  e moltiplicando poi per 2. Inoltre il termine  $\sum_{jk} \Re \left\{ U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \right\}$  è uguale a  $\delta_{\alpha\beta}$ . Otteniamo in tal modo:

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}(t) &= \\ &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j>k} \Re \left\{ U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \right\} \sin^2 \left( \frac{\delta m_{jk}^2}{4E} t \right) + \\ &+ 2 \sum_{j>k} \Im \left\{ U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \right\} \sin \left( \frac{\delta m_{jk}^2}{2E} t \right) \end{aligned}$$

Ripristinando i fattori  $\hbar$  e  $c$  ignorati, l'argomento del primo dei due termini sinusoidali può esser riscritto come:

$$1.267 \delta m_{jk}^2 (eV^2) L(m) / E(MeV)$$

dove  $L$  è il tratto percorso dal neutrino nel tempo  $t$ . L'argomento del secondo termine sinusoidale è ovviamente doppio del primo.

In definitiva, la probabilità che lo stato  $\alpha$  evolva nello stato  $\beta$  (con  $\alpha \neq \beta$ ) dopo un tratto  $L$ , è:

$$\begin{aligned}
P_{\alpha\beta}(L) = & \quad (11) \\
= & 2 \sum_{j>k} \Im \left\{ U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \right\} \sin \left( 2.534 \frac{\delta m_{jk}^2 L}{E} \right) \\
& - 4 \sum_{j>k} \Re \left\{ U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \right\} \sin^2 \left( 1.267 \frac{\delta m_{jk}^2 L}{E} \right)
\end{aligned}$$

dove  $\delta m_{jk}^2$  è espresso in  $eV^2$ ,  $L$  in metri ed  $E$  in Mev (o equivalentemente,  $L$  in chilometri ed  $E$  in Gev).

Notiamo che per  $\alpha \neq \beta$ , nell'ipotesi che CP sia conservato e che quindi il termine lineare nella funzione seno sia assente, la condizione che la probabilità sia definita positiva richiede che la sommatoria:

$$4 \sum_{j>k} \Re \left\{ U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \right\} \sin^2 \left( 1.267 \frac{\delta m_{jk}^2 L}{E} \right)$$

sia negativa.

La probabilità, in tale ipotesi, diventa:

$$P_{\alpha\beta}(L) = \left| 4 \sum_{j>k} \Re \left\{ U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \right\} \sin^2 \left( 1.267 \frac{\delta m_{jk}^2 L}{E} \right) \right| \quad (12)$$

L'andamento di uno generico dei termini nella sommatoria a secondo membro in tale espressione, al variare di  $L/E$ , è di tipo sinusoidale, come si può vedere in figura 1.

La lunghezza d'oscillazione è:

$$\lambda_{jk} = \pi E / 1.267 \delta m_{jk}^2 = 2.48 E / \delta m_{jk}^2 \quad (13)$$

Notiamo che  $\delta m_{ij}^2$  e quindi  $\lambda_{ij}$  possono esser negativi. L'espressione 11 non consente di determinare il loro segno.

Nell'espressione 11 sono presenti, nel caso di tre neutrini, tre diversi termini oscillanti, corrispondenti alle tre differenze di masse quadre:

$$\delta m_{21}^2 = m_2^2 - m_1^2 = -\delta m_{12}^2$$

$$\delta m_{31}^2 = m_3^2 - m_1^2 = -\delta m_{13}^2$$

$$\delta m_{32}^2 = m_3^2 - m_2^2 = -\delta m_{23}^2$$

dove:

$$\delta m_{21}^2 + \delta m_{32}^2 = \delta m_{31}^2 = -\delta m_{13}^2$$

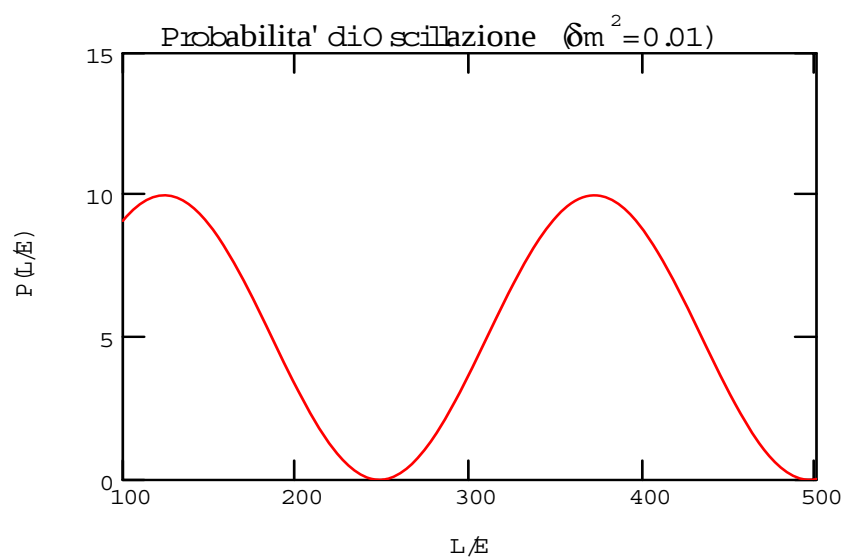


Figure 1:

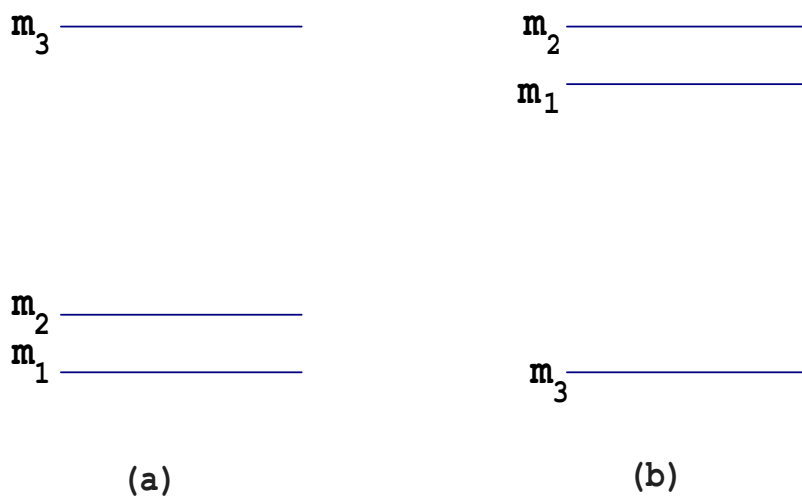


Figure 2:

Un caso particolarmente interessante è quello in cui, delle due differenze di masse quadre indipendenti, una sia molto minore delle altre. Ammettiamo ad esempio che sia:

$$\delta m_{21}^2 \ll \delta m_{32}^2 \approx \delta m_{31}^2$$

Questa situazione può corrispondere ad una delle due configurazioni (a) o (b) mostrate in figura 2.

In tal caso, delle tre lunghezze d'oscillazione presenti nella 11, una è molto maggiore delle altre due. Più precisamente avremo:

$$|\lambda_{12}| = 2.48 \frac{E}{|\delta m_{12}^2|} \gg |\lambda_{32}| = 2.48 \frac{E}{|\delta m_{32}^2|} \simeq |\lambda_{31}| = 2.48 \frac{E}{|\delta m_{31}^2|}$$

In tal caso, a distanze piccole rispetto a  $|\lambda_{12}|$  ma grandi rispetto a  $|\lambda_{32}|$  e  $|\lambda_{31}|$ , vedremo solo l'effetto delle oscillazioni associate alle differenze di massa  $\delta m_{32}^2$  e  $\delta m_{31}^2$ . Se viceversa siamo a distanze dell'ordine o maggiori di  $|\lambda_{12}|$ , vedremo l'effetto delle oscillazioni associate a tutte le differenze di massa.

### 3 Oscillazioni nel vuoto tra due soli flavours

Esaminiamo ora in dettaglio il caso delle oscillazioni tra due soli flavours di neutrini, e due soli autostati di massa.

Ammettendo che la matrice unitaria  $U$  che lega gli autostati del flavour a quelli di massa sia reale, scriveremo:

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \cos\theta |\nu_1\rangle + \sin\theta |\nu_2\rangle \\ |\nu_\mu\rangle &= -\sin\theta |\nu_1\rangle + \cos\theta |\nu_2\rangle \end{aligned} \tag{14}$$

Dove  $\theta$  è l'angolo di mescolamento. Si può verificare che  $\langle \nu_\mu | \nu_e \rangle = 0$ .

Notiamo che se  $\cos\theta$  è vicino ad 1, le 14 ci dicono che lo stato  $|\nu_e\rangle$  "contiene" prevalentemente l'autostato di massa  $|\nu_1\rangle$ , e viceversa per  $|\nu_\mu\rangle$ .

Poichè  $U$  è reale oltre che unitaria ( $U^{-1} = U^T$ ) avremo:

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

per cui:

$$\begin{aligned} |\nu_1\rangle &= \cos\theta |\nu_e\rangle - \sin\theta |\nu_\mu\rangle \\ |\nu_2\rangle &= \sin\theta |\nu_e\rangle + \cos\theta |\nu_\mu\rangle \end{aligned}$$

Se ora un neutrino è prodotto nello stato  $\nu_e$  all'istante  $t = 0$ :

$$|\nu(t=0)\rangle = |\nu_e\rangle$$

dopo un tempo  $t$  avremo:

$$|\nu(t)\rangle = \cos\theta e^{-iE_1 t} |\nu_1\rangle + \sin\theta e^{-iE_2 t} |\nu_2\rangle \tag{15}$$

con:

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2}$$

La probabilità che tale stato sia un  $\nu_\mu$  sarà:

$$|\langle \nu_\mu | \nu(t) \rangle|^2 = |\cos \theta e^{-iE_1 t} \langle \nu_\mu | \nu_1 \rangle + \sin \theta e^{-iE_2 t} \langle \nu_\mu | \nu_2 \rangle|^2$$

dove:

$$\langle \nu_\mu | \nu_1 \rangle = -\sin \theta$$

$$\langle \nu_\mu | \nu_2 \rangle = \cos \theta$$

per cui:

$$|\langle \nu_\mu | \nu(t) \rangle|^2 = 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sin^2 \frac{(E_1 - E_2)t}{2}$$

Se il neutrino è relativistico,  $E_1 - E_2 = \frac{m_1^2 - m_2^2}{2P}$ , per cui:

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu, t) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\delta m^2}{4E_\nu} t \quad (16)$$

Dove abbiamo posto:

$$m_1^2 - m_2^2 \simeq \delta m^2$$

nonchè:  $P = E_\nu$ .

Si sviluppa quindi una componente  $\nu_\mu$ , avente un'ampiezza massima  $\sin^2 2\theta$ , oscillante con periodo  $T = \frac{4\pi E_\nu}{\delta m^2}$ , corrispondente ad una lunghezza d'oscillazione:

$$L_{osc} = cT = 2.5(m) \times \frac{E_\nu(MeV)}{\delta m^2(eV^2)} \quad (17)$$

Notiamo che la probabilità è proporzionale al quadrato della funzione seno, per cui diviene irrilevante il segno di  $\delta m^2$ . Possiamo quindi equivalentemente porre:

$$\delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$$

## 4 Oscillazioni in presenza di materia

Analizzeremo le oscillazioni in presenza di materia limitandoci al caso di due flavours,  $\nu_e$  e  $\nu_\mu$ . Se fossimo nel vuoto, per un tale sistema, indicando con  $\nu_1$  e  $\nu_2$  gli autostati di massa, l'evoluzione temporale sarebbe data da:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} \quad (18)$$

con:

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \equiv P + \begin{pmatrix} \frac{m_1^2}{2P} & 0 \\ 0 & \frac{m_2^2}{2P} \end{pmatrix} \quad (19)$$

Ricordiamo ora la relazione tra gli autostati di massa e quelli del flavour, nel caso di due neutrini:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

con:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (21)$$

Moltiplicando la 18 a sinistra per  $U$  otterremo l'equazione che descrive l'evoluzione degli autostati del flavour:

$$i \frac{d}{dt} U \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} = U H \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} = U H U^\dagger U \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} \quad (22)$$

La matrice:  $U H U^\dagger = U H U^{-1}$  vale:

$$H' = U H U^{-1} = P + \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (23)$$

dove, per brevità di scrittura, si è posto:  $x_1 = \frac{m_1^2}{2P}$ ,  $x_2 = \frac{m_2^2}{2P}$ .

Sviluppando, troviamo:

$$U H U^{-1} = P + \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \cdot x_1 & -\sin \theta \cdot x_1 \\ \sin \theta \cdot x_2 & \cos \theta \cdot x_2 \end{pmatrix} = \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & P + \begin{pmatrix} \cos^2 \theta \cdot x_1 + \sin^2 \theta \cdot x_2 & \sin \theta \cos \theta \cdot (x_2 - x_1) \\ \sin \theta \cos \theta \cdot (x_2 - x_1) & \cos^2 \theta \cdot x_2 + \sin^2 \theta \cdot x_1 \end{pmatrix} = \\ & = P + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[2 \cos^2 \theta \cdot x_1 + 2 \sin^2 \theta \cdot x_2] & -\frac{1}{2} \sin 2\theta (x_1 - x_2) \\ -\frac{1}{2} \sin 2\theta (x_1 - x_2) & \frac{1}{2}[2 \sin^2 \theta \cdot x_1 + 2 \cos^2 \theta \cdot x_2] \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= P + \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)(x_1 - x_2) & -\sin 2\theta(x_1 - x_2) \\ -\sin 2\theta(x_1 - x_2) & (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)(x_1 - x_2) \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$= P + \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} (x_1 - x_2) \quad (26)$$

Esplicitando i termini  $x_1$  ed  $x_2$ :

$$\begin{aligned} H' &= P + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4P} - \frac{m_1^2 - m_2^2}{4P} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} = \\ &= P + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4P} + \frac{\delta m^2}{4P} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

con:

$$\delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$$

La matrice a secondo membro non è diagonale mentre, come sappiamo, lo è quella che descrive l'evoluzione degli autostati di massa.

La rotazione che diagonalizza la matrice a secondo membro è data da:

$$\frac{2H'_{12}}{H'_{22} - H'_{11}} = \tan 2\theta \quad (28)$$

In definitiva avremo:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = H' \begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} \quad (29)$$

con  $H'$  dato dalla 27.

Vediamo ora come questo risultato venga modificato dalla presenza di materia. Nelle considerazioni che seguono, ci limiteremo ad esaminare il caso di neutrini(antineutrini) di basse energie (pochi MeV), quali quelli Solari o quelli emessi da reattori nucleari.

Ammettiamo per semplicità che la densità di materia sia uniforme, ed indichiamo con  $n_e$  la densità di elettroni (numero di elettroni per unità di volume). Le interazioni dei neutrini con la materia possono aver luogo o attraverso processi di *corrente carica* o di *corrente neutra*. A loro volta, le interazioni di corrente neutra possono aver luogo su elettroni, protoni e neutroni. Si può dimostrare che le ampiezze di scattering per interazioni di corrente neutra su elettroni e su protoni sono uguali e di segno opposto per ogni tipo di neutrino, per cui l'ampiezza netta si annulla se la materia è neutra. Le interazioni di corrente neutra su neutroni non si annullano, ma hanno uguale ampiezza  $-\frac{1}{\sqrt{2}}G_F n_n$  (con  $n_n$  il numero di neutroni per unità di volume) per tutti i flavours di neutrini. Esse contribuiscono con un termine che non distingue quindi  $\nu_e$  da  $\nu_\mu$ .

Passando ora ad esaminare le interazioni di corrente carica, queste sono assenti nel caso dello scattering di  $\nu_\mu$  su elettrone, neutrone e protone, alle energie dei neutrini solari, mentre nel caso dei  $\nu_e$  l'ampiezza per scattering su elettrone è data da:

$$\sqrt{2}G_F n_e$$

dove  $G_F$  è la costante di Fermi ed  $n_e$  il numero di elettroni per unità di volume. Tale termine va quindi aggiunto all'elemento  $\langle \nu_e | \nu_e \rangle$  che compare nella matrice  $H'$  nella 29 (l'elemento  $H'_{11}$ ).

In conclusione, in presenza di materia l'hamiltoniana 27 diviene:

$$\hat{H} = P - \frac{1}{\sqrt{2}} G_F n_e + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4P} + \begin{pmatrix} -\frac{\delta m^2}{4P} \cos 2\theta + \sqrt{2} G_F n_e & \frac{\delta m^2}{4P} \sin 2\theta \\ \frac{\delta m^2}{4P} \sin 2\theta & \frac{\delta m^2}{4P} \cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (30)$$

Vediamo che la matrice  $\hat{H}$  non è diagonale nella base  $(\nu_e, \nu_\mu)$ , analogamente alla matrice  $H'$  nel vuoto ma, a differenza di questa, non è diagonale neanche nella base  $(\nu_1, \nu_2)$ .

L'angolo che diagonalizza la matrice a secondo membro nell'ultima espressione è ora dato da:

$$\tan 2\hat{\theta} = \frac{2\hat{H}_{12}}{\hat{H}_{22} - \hat{H}_{11}} = \frac{\delta m^2 \sin 2\theta}{\delta m^2 \cos 2\theta - A}$$

dove:

$$A = 2\sqrt{2} G_F n_e P$$

Vediamo che l'angolo di mixing cambia nella materia. Il cambiamento diviene molto importante se  $A = \delta m^2 \cos 2\theta$ , cioè se la densità di elettroni è uguale a:

$$n_e = \frac{\delta m^2 \cos 2\theta}{2\sqrt{2} G_F P}$$

In tal caso infatti, anche se l'angolo di mescolamento nel vuoto fosse molto piccolo (il che vuol dire che il  $|\nu_e\rangle \simeq |\nu_1\rangle$ ) esso diviene vicino a  $\pi/4$  nella materia. Si ha allora un mescolamento completo, cioè lo stato nato come  $|\nu_e\rangle$  acquista uguali ampiezze  $|\nu_e\rangle$  e  $|\nu_\mu\rangle$ . Se poi la densità elettronica continua ad aumentare al di sopra di tale valore, vediamo dall'espressione di  $\tan 2\hat{\theta}$  che questa diviene dapprima negativa, con che l'angolo di mixing supera  $\pi/4$  e poi, per grandissimi valori della densità elettronica, diviene uguale a  $\pi/2$ . Ora lo stato nato come  $|\nu_e\rangle$  diviene interamente  $|\nu_\mu\rangle$ .

I nuovi autovalori sono facilmente ottenibili dall'equazione:

$$\begin{pmatrix} \hat{H}_{11} - \lambda & \hat{H}_{12} \\ \hat{H}_{21} & \hat{H}_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Si trova (vedi appendice):

$$E_\alpha = |p| - \frac{1}{\sqrt{2}} G_F n_e + \frac{\hat{m}_\alpha^2}{2|p|}$$

dove:

$$\hat{m}_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left\{ (m_1^2 + m_2^2 + A) \pm \sqrt{(\delta m^2 \cos 2\theta - A)^2 + \delta m^4 \sin^2 2\theta} \right\}$$

Gli autostati di massa in presenza di materia sono funzioni della densità elettronica, contenuta nel parametro  $A$ .

La rotazione che l'autostato di massa  $\nu_2$  subisce nel piano  $\nu_e - \nu_x$  via via che esso si muove all'interno del Sole, è mostrata in figura 3 (dove  $\nu_x$  è quello che noi abbiamo arbitrariamente identificato con il  $\nu_\mu$ ). Per alte densità elettroniche lo stato  $\nu_2$  coincide quasi con  $\nu_e$ . Al diminuire della densità  $n_e$  il vettore ruota in verso orario e, alla risonanza, esso ha uguali ampiezze  $\nu_e$  e  $\nu_x$ . Quando infine la densità elettronica diviene molto bassa il vettore  $\nu_2$  viene a coincidere con  $\nu_x$ .

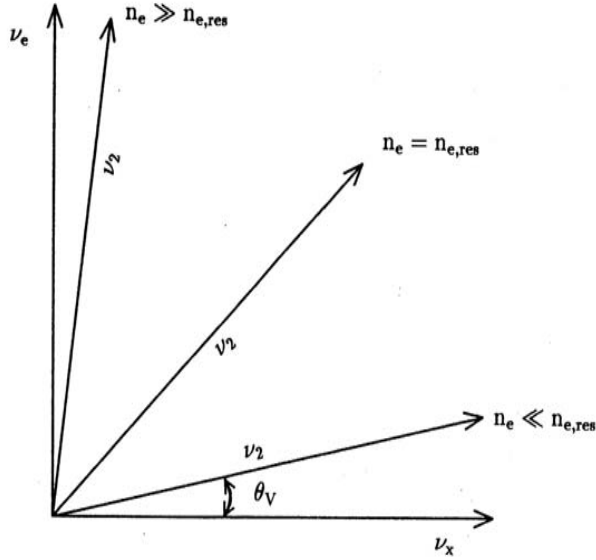


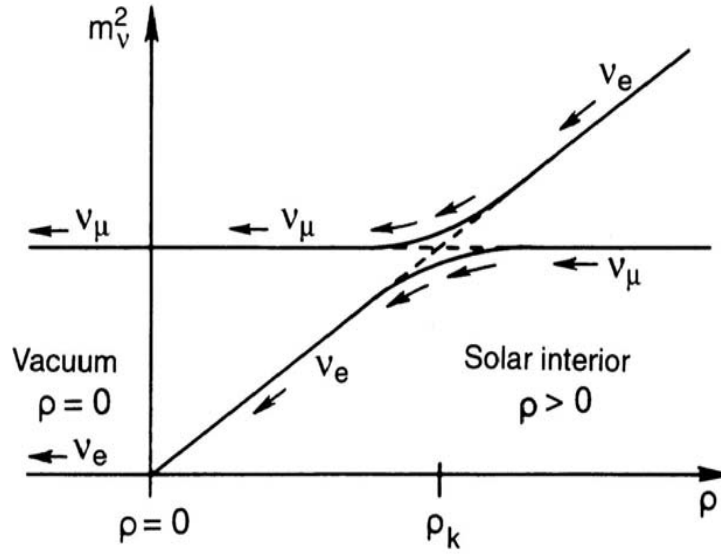
Figure 3:

La variazione dei due autostati in funzione di  $A$ , e quindi della densità elettronica  $n_e$ , è mostrata in figura 4.

L'angolo di mixing nella materia può anche essere espresso nella forma:

$$\begin{aligned}
 \tan 2\hat{\theta} &= \frac{\delta m^2 \sin 2\theta}{\delta m^2 \cos 2\theta - 2\sqrt{2}G_F n_e P} = \\
 &= \frac{\tan 2\theta}{1 - \frac{2\sqrt{2}G_F n_e E}{\delta m^2 \cos 2\theta}} = \tan 2\theta \left( 1 - \frac{4\pi E}{\delta m^2} \cdot \frac{\sqrt{2}G_F n_e}{2\pi \cos 2\theta} \right)^{-1} = \\
 &= \tan 2\theta \left( 1 - \frac{\lambda}{\lambda_0 \sec 2\theta} \right)^{-1} \tag{31}
 \end{aligned}$$

dove si è posto  $E \simeq P$ . In questa equazione  $\lambda = 4\pi E/\delta m^2$  è la lunghezza d'oscillazione nel vuoto, mentre  $\lambda_0 = 2\pi/(\sqrt{2}G_F n_e)$  è una lunghezza che caratterizza la propagazione nella materia (lunghezza d'interazione per lo scattering neutrino-elettrone), indipendente dall'energia del neutrino.  $\lambda_0$  può esser espresso come  $1.77 \cdot$



**Figure 12.24.** The MSW effect. The heavy mass eigenstate is almost identical to  $\nu_e$  inside the Sun, in the vacuum however it is almost identical to  $\nu_\mu$ . If a significant jump at the resonance location can be avoided, the produced electron neutrino remains on the upper curve and therefore escapes detection in radiochemical experiments (after [Bet86]).

Figure 4:

$10^7/\rho y$  dove  $\rho$  è la densità in  $gcm^{-3}$  e  $y$  è il numero di elettroni per nucleone. Nel caso degli antineutrini, il termine aggiuntivo introdotto nella matrice dalla presenza della materia cambia segno; ne segue che il segno di  $\lambda_0$  deve essere invertito.

Dalla 31, ponendo:

$$\lambda/\lambda_0 \equiv B = \frac{4\pi E}{\delta m^2} \cdot \frac{\sqrt{2}G_F n_e}{2\pi}$$

otteniamo:

$$\sin 2\hat{\theta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 2\theta}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(1-B/\cos 2\theta)^2}{\tan^2 \theta}}} = \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{1 + B^2 - 2B \cos 2\theta}}$$

e quindi:

$$\sin 2\hat{\theta} = \sin 2\theta \left(1 - 2(\lambda/\lambda_0) \cos 2\theta + (\lambda/\lambda_0)^2\right)^{-1/2}$$

D'ora in avanti porremo  $\hat{\theta} \equiv \theta_m$ .

In termini di  $\lambda$  e  $\lambda_0$ , la differenza tra gli autostati di massa nella materia è data da:

$$\delta \hat{m}^2 = \delta m^2 \left[1 - 2(\lambda/\lambda_0) \cos \theta + (\lambda/\lambda_0)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

La lunghezza d'oscillazione nella materia è ottenibile dalla relazione:

$$\frac{\lambda_m}{\lambda} = \frac{\delta m^2}{\delta \hat{m}^2}$$

da cui:

$$\lambda_m = \lambda \left[ 1 - 2 (\lambda/\lambda_0) \cos 2\theta + (\lambda/\lambda_0)^2 \right]^{-1/2}$$

Notiamo che le oscillazioni nel vuoto tra due flavours di neutrini determinano solo  $\delta m^2$  e  $\sin^2 2\theta$ , lasciando indeterminato sia il segno di  $\delta m^2$  sia il quadrante cui appartiene l'angolo  $2\theta$ .

L'indeterminazione sull'angolo implica che, ad esempio nel caso dei neutrini solari, non siamo in grado di distinguere tra un valore  $\theta$  e  $\pi/2 - \theta$  per l'angolo di mixing. Ora, questi due valori corrispondono a situazioni fisiche radicalmente diverse. Se infatti  $\theta < \pi/2$ , allora nello stato  $|\nu_e\rangle$  l'ampiezza  $|\nu_1\rangle$  è quella che domina, mentre se è  $\theta > \pi/2$  l'ampiezza che domina in  $|\nu_e\rangle$  è la  $|\nu_2\rangle$ .

Le oscillazioni nella materia ci consentono di distinguere le due possibilità.

Notiamo alcune conseguenze dei risultati trovati:

1. se  $|\lambda| \ll \lambda_0$ , cioè se la lunghezza di oscillazione nel vuoto è molto più corta della lunghezza caratteristica della propagazione nella materia, allora  $\hat{\theta} \approx \theta$  e  $\hat{\delta m}^2 \approx \delta m^2$ . In altri termini l'effetto della materia diviene trascurabile.
2. se  $|\lambda| \gg \lambda_0$ , allora  $\hat{\theta} \approx 0$  e  $\hat{\lambda} \approx 0$ . In tal caso le oscillazioni sono fortemente sopresse dalla presenza della materia.
3. se  $|\lambda| \approx \lambda_0$  l'effetto della materia diviene importante e può aiutare a determinare sia il segno di  $\delta m^2$  che il quadrante cui appartiene l'angolo  $2\theta$ .
4. per un  $\delta m^2$  fissato,  $\lambda$  dipende dall'energia  $E$ , mentre  $\lambda_0$  non ne dipende; quindi  $\lambda/\lambda_0$  cambia al cambiare dell'energia del neutrino. Per il particolare valore dell'energia per cui  $\lambda/\lambda_0 = \cos 2\theta$  avremo:

$$\lambda_m = \lambda / \sin 2\theta$$

$$\tan 2\theta_m = \infty$$

Avremo quindi  $\theta_m = \pi/4$  il che implica un mixing completo. In tali circostanze abbiamo un'amplificazione dell'ampiezza di oscillazione; la probabilità diagonale di transizione si annulla alla distanza:

$$L = \lambda_m/2 = \lambda/(2 \sin 2\theta) = (\lambda_0/2) \cot 2\theta$$

Tale amplificazione delle oscillazioni può spiegare la soppressione osservata negli esperimenti che rivelano i neutrini solari. Ciò è stato proposto per la prima volta da Mikheyev e Smirnov. Essi hanno notato che, nella materia, la dipendenza di  $\sin^2 2\theta_m$  e di  $\lambda_m$  dalla variabile  $x = \lambda/\lambda_0$ :

$$\sin^2 2\theta_m = \sin^2 2\theta / (1 - 2x \cos 2\theta + x^2)$$

ha un'andamento risonante, con un massimo per  $x = \cos 2\theta$  ed una larghezza data da  $\Delta x = 2 \sin 2\theta$ . Quanto più piccolo è  $\theta$  tanto più stretta è la risonanza. Inoltre, al decrescere di  $\theta$  il valore di  $\lambda/\lambda_0 = \cos 2\theta$ , corrispondente al picco della risonanza, si avvicina all'unità.

La condizione di risonanza:  $\lambda = \lambda_0 \cos 2\theta$  può esser messa nella forma:

$$\frac{4\pi E}{\delta m^2} = \frac{1.7 \cdot 10^9}{\rho y} \cos 2\theta$$

o anche:

$$\frac{E}{\delta m^2} \rho = a \cos 2\theta$$

con  $a = 1.35 \cdot 10^6 / y$ .

Consideriamo ora dei neutrini prodotti nella regione centrale del Sole, con uno spettro di energia quale quello ottenuto dai modelli solari, che si estende fino a circa 10-15 MeV. La parte dello spettro corrispondente ai neutrini di energia più elevata (circa 10 MeV) subirà un'amplificazione risonante se:

$$\rho / \delta m^2 \cos 2\theta = a / E \quad (32)$$

Ciò implica che, per dati  $\delta m^2$  e  $\cos 2\theta$  si avrà un'amplificazione risonante per quei neutrini che sono stati prodotti in una regione avente una densità data da:

$$\rho = \delta m^2 \cos 2\theta a / E \quad (33)$$

Tenendo conto anche della larghezza  $\Delta(\lambda/\lambda_0) = 2 \sin 2\theta$  troviamo che il range di valori che  $\rho$  deve avere (fissati  $\delta m^2$ ,  $\cos 2\theta$  ed  $E$ ) perchè si abbia amplificazione risonante è:

$$\rho - \Delta\rho \rightarrow \rho + \Delta\rho \quad (34)$$

con:

$$\Delta\rho = a \sin 2\theta \delta m^2 / E \quad (35)$$

La densità  $\rho$  dovrebbe avere tale valore in uno spessore  $R_{res}$  almeno uguale alla lunghezza  $\lambda_m$  di oscillazione nella materia:

$$R_{res} > \lambda_m = \lambda / \tan 2\theta = 4\pi E / \delta m^2 \tan 2\theta \quad (36)$$

Per un dato valore dell'energia  $E$  l'equazione 33 fornisce il massimo valore che il prodotto  $\delta m^2 \cos 2\theta$  può avere perchè l'amplificazione risonante sia possibile: tale

massimo corrisponderà al massimo valore della densità nel sole ( $\approx 100g/cm^3$  al centro). Per i neutrini di energia più elevata prodotti in questa regione del sole il limite superiore su  $\delta m^2 \cos^2 2\theta$  è  $4 \cdot 10^{-4} eV^2$ . Per un fissato valore di  $E$ , al diminuire di  $\delta m^2$  lo strato risonante si sposta verso strati più superficiali, dove la densità è minore.

D'altro canto la 36 ci dice quale dovrà essere il minimo valore che, a parità di energia  $E$ , il prodotto  $\delta m^2 \tan 2\theta$  può avere perchè l'oscillazione risonante possa aver luogo:

$$\delta m^2 \tan 2\theta \geq 4\pi E / R_{res} \geq 4\pi E_{min} / R_s$$

dove  $E_{min}$  è la minima energia dei neutrini rivelabile (ad esempio 0.234 MeV nell'esperimento del Gallio) ed  $R_s$  è il raggio solare.

È importante notare che l'amplificazione risonante delle oscillazioni riduce il flusso dei neutrini ( $\nu_e$ ) rivelato sulla Terra e che tale riduzione può acquistare valori molto grandi se l'angolo di mescolamento nel vuoto è piccolo. Ciò può esser compreso qualitativamente se si pensa che una volta che i  $\nu_e$ , dopo aver attraversato uno strato risonante, siano stati convertiti in  $\nu_\mu$  essi non saranno più in grado di oscillare all'indietro in  $\nu_e$  poichè, nella zona in cui essi verranno ora a trovarsi (di minore densità) l'oscillazione non è più risonante, ma sarà caratterizzata dal piccolo valore dell'angolo di mescolamento nel vuoto.

La figura 5 mostra le regioni dei parametri  $\delta m^2$  e  $\sin^2 2\theta$  nella quale l'amplificazione risonante delle oscillazioni ha luogo nel Sole, rispettivamente per i neutrini dalla reazione PP (rivelati negli esperimenti del Gallio) e per quelli del Boro (rivelati nell'esperimento del Cloro). Nella figura, le curve solide delimitano le regioni in cui la soppressione dei neutrini a Terra è pari a 0.9, quelle tratteggiate le regioni in cui la soppressione è pari a 0.3.

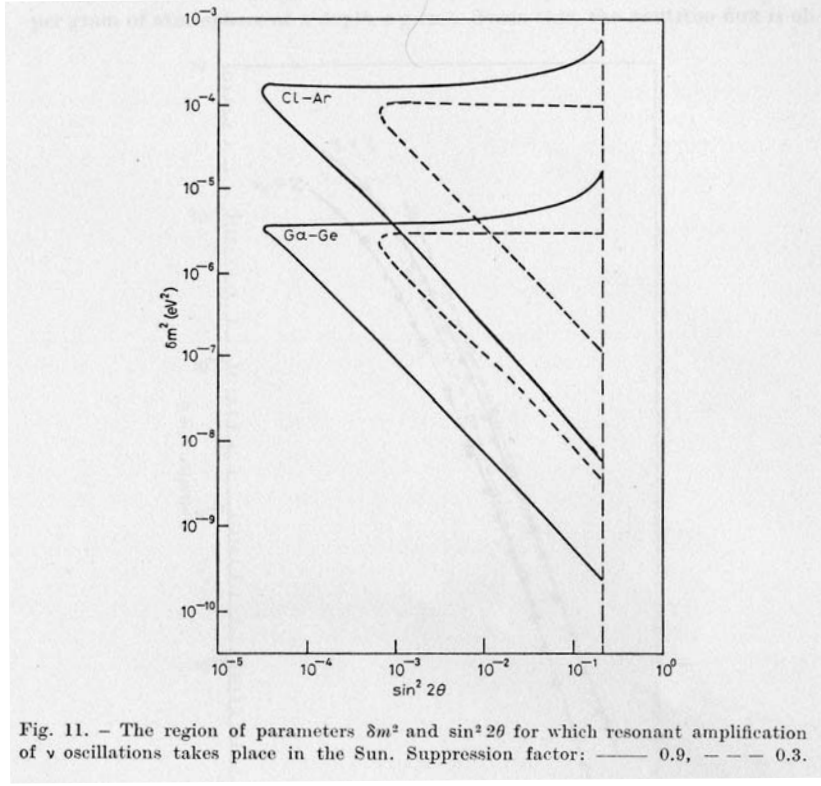


Figure 5:

## 5 Appendice

Calcoliamo gli autovalori della matrice  $\hat{H}$ .

Scriviamo la matrice nella forma:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad (37)$$

dove:

$$a = P - \frac{1}{\sqrt{2}} G_F n_n + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4P} - \frac{\delta m^2}{4P} \cos 2\theta + \sqrt{2} G_F n_e$$

$$c = P - \frac{1}{\sqrt{2}} G_F n_n + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4P} + \frac{\delta m^2}{4P} \cos 2\theta$$

$$b = \frac{\delta m^2}{4P} \sin 2\theta$$

L'equazione agli autovalori è:

$$\hat{H} - \lambda = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (38)$$

cioè:

$$\lambda^2 - \lambda(c + a) + ac - b^2 = 0$$

le cui soluzioni sono:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left( (c + a) \pm \sqrt{(c - a)^2 + 4b^2} \right)$$

Sostituendo ad  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i loro valori, otteniamo:

$$c + a = 2P - \sqrt{2}G_F n_n + \frac{m_1^2 + m_2^2}{2P} + 2\sqrt{2}G_F n_e$$

$$(c - a) = \frac{\delta m^2}{2P} \cos 2\theta - \sqrt{2}G_F n_e$$

$$4b^2 = \frac{\delta m^2}{4P^2} \sin^2 2\theta$$

Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} \hat{E}_{1/2} = & \left( P - \frac{1}{\sqrt{2}}G_F n_n + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4P} + \sqrt{2}G_F n_e \right) \pm \frac{1}{2} \cdot \\ & \cdot \sqrt{\left( \frac{\delta m^2}{2P} \cos 2\theta - \sqrt{2}G_F n_e \right)^2 + \frac{\delta m^4}{4P^2} \sin^2 2\theta} \end{aligned}$$

e quindi, ponendo:  $A \equiv 2\sqrt{2}G_F n_e P$ :

$$\begin{aligned} \hat{E}_{1/2} = & \left( P - \frac{1}{\sqrt{2}}G_F n_n \right) + \frac{1}{2} \cdot \\ & \cdot \frac{1}{2P} \left\{ (m_1^2 + m_2^2) + A \pm \sqrt{(\delta m^2 \cos 2\theta - A)^2 + \delta m^4 \sin^2 2\theta} \right\} \end{aligned}$$

Gli autostati di massa saranno allora:

$$\hat{m}_{1/2}^2 = \frac{1}{2} \cdot \left\{ (m_1^2 + m_2^2) + A \pm \sqrt{(\delta m^2 \cos 2\theta - A)^2 + \delta m^4 \sin^2 2\theta} \right\}$$