Generazione di onde elettromagnetiche

1 Potenziali elettrodinamici

Ammettiamo di essere in un mezzo omogeneo ed isotropo, caratterizzato da una costante dielettrica ϵ e da una permeabilitá magnetica μ. Nel vuoto ci limiteremo a sostituire a μ ed ϵ rispettivamente μ_0 ed ϵ_0. Le equazioni di Maxwell, in presenza di densitá di carica ρ e di corrente J:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \epsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{4}$$

costituiscono un insieme di 8 equazioni differenziali nelle 6 incognite, costituite dalle componenti dei campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Facendo uso dell'equazione di continuitá:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

si puó dimostrare che queste equazioni non sono indipendenti, ma che le prime due possono essere derivate dalle altre. In tal modo ci si riduce a sei equazioni scalari nelle sei incognite costituite dalle componenti dei campi E e B. Tali equazioni presentano tuttavia alcuni inconvenienti. In primo luogo esse non contengono le funzioni incognite (le componenti dei campi) in modo separato. Tutte le equazioni coinvolgono piú funzioni incognite. Il secondo inconveniente é collegato alla formulazione relativistica dell'elettromagnetismo, che richiede l'utilizzo di funzioni, legate ai campi fisici E e B, che manifestino la covarianza relativistica della teoria, cioé di quadrivettori.

Tali funzioni esistono, e vanno sotto il nome di potenziali elettrodinamici. Questi sono un'ovvia estensione dei potenziali $\vec{A}$ e V giá incontrati in elettrostatica e magnetostatica. Un ulteriore vantaggio di tali nuove funzioni é nel fatto che attraverso di esse é possibile trasformare le sei equazioni di Maxwell, in quattro equazioni differenziali (del secondo ordine) in solo quattro funzioni incognite.

Possiamo infatti esprimere il campo $\vec{B}$ in termini del potenziale vettore $A(\vec{r})$, con:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \tag{5}$$

dove $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$, con che l'equazione $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ é automaticamente soddisfatta.

Utilizzando il potenziale vettore, la terza equazione di Maxwell diventa:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{\nabla} \times (\frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$$

da cui si vede che il vettore: $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ha rotore nullo (é irrotazionale). Ció a sua volta implica che esso possa essere espresso come il gradiente di una funzione scalare:

$$\vec{\nabla} V = -(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \tag{6}$$

Con tale scelta sono soddisfatte sia la seconda che la terza delle equazioni di Maxwell. Esaminiamo ora come si trasformino la prima e la quarta delle equazioni. La prima delle equazioni di Maxwell si scrive:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon$$

che, facendo uso della relazione che esprime il campo elettrico in termini dei potenziali, diventa:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = -\rho/\epsilon$$

ovvero:

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\rho/\epsilon \tag{7}$$

Esaminiamo ora la quarta delle equazioni, e sostituiamo in essa a B ed E le loro espressioni in termini dei potenziali:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu \vec{J} - \mu\epsilon \vec{\nabla} \frac{\partial V}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

Facendo uso della proprietá del rotore:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{I} = -\nabla^2 \vec{I} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{I})$$

troviamo:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \mu\epsilon \vec{\nabla} \frac{\partial V}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

ovvero:

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t}) - \mu \vec{J} \tag{8}$$

Come possiamo vedere, abbiamo in tal modo ottenuto quattro equazioni; l'equazione scalare (7) e quella vettoriale (8), che tuttavia non soddisfano il requisito che avevamo richiesto inizialmente, quello di avere delle equazioni disaccoppiate. Vediamo infatti che l'equazione (7) contiene sia la funzione incognita V che $\vec{A}$ e che la stessa cosa é vera per l'equazione (8). Possiamo tuttavia renderle disaccoppiate facendo uso della residua arbitrarietá che ci rimane nella scelta dei potenziali. Questi possono infatti essere sostituiti da altri potenziali, a condizione che i campi fisici E e B ottenibili rimangano inalterati in seguito alla trasformazione. Una tale trasformazione dei campi esiste e va sotto il nome di *trasformazione di gauge*. Ammettiamo infatti di effettuare le seguenti sostituzioni:

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\phi$$

$$V \to V' = V - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Tale trasformazione lascia invariati i campi:

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}V + \vec{\nabla}\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

Scegliamo ora i potenziali in modo che sia:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon\mu\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{9}$$

Le equazioni (7) ed (8) diventano allora disaccoppiate:

$$\nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\rho/\epsilon \tag{10}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J} \tag{11}$$

Dobbiamo per completezza osservare che queste equazioni sono disaccoppiate in coordinate cartesiane; in sistemi di coordinate curvilinee, diverse componenti di $\vec{A}$ sono presenti nella medesima equazione.

Quelle scritte sono delle equazioni differenziali del secondo ordine rispetto alle coordinate spaziali ed a quella temporale. Per risolverle é necessario stabilire le condizioni al contorno non soltanto per i potenziali, ma anche per le loro derivate. Le soluzioni di tali equazioni sono date sotto frome di integrali estesi alle distribuzioni rispettivamente di cariche e di correnti:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_\tau \frac{\vec{J}(\vec{r'}, t - \Delta r/v)}{\Delta r}\, d\tau' \tag{12}$$

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_\tau \frac{\rho(\vec{r'}, t - \Delta r/v)}{\Delta r}\, d\tau' \tag{13}$$

dove $\vec{r}$ é il vettore tracciato a partire dall'origine al punto P dove si calcola i campi; $\vec{r'}$ é il vettore tracciato a partire dall'origine al generico punto dove é presente l'elemento di carica $\rho d\tau$ o l'elemento di corrente $\vec{J}d\tau$; $\Delta r = |\vec{r} - \vec{r'}|$ il vettore che va dal punto dove sono i generici elementi di carica/corrente al punto P; $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ é la velocitá di propagazione delle onde elettromagnetiche nel mezzo.

Queste costituiscono delle soluzioni particolari delle equazioni differenziali complete (10) ed (11). Le soluzioni generali saranno poi ottenibili combinando linearmente tali soluzioni particolari con le soluzioni generali delle equazioni omogenee. Nella prossima sezione discuteremo una semplice dimostrazione delle soluzioni (12) ed (13).

2 Soluzioni delle equazioni differenziali dei potenziali elettrodinamici

Per ottenere delle soluzioni delle equazioni (10) ed (11) (dove le sorgenti ρ e $\vec{J}$ sono legate tra loro dall'equazione di continuitá) procederemo nel modo seguente: calcoleremo dapprima i potenziali generati da una singola carica puntiforme, in moto con una generica velocitá, e poi, a partire dal risultato ottenuto, calcoleremo i potenziali generati da una distribuzione qualsivoglia di cariche in movimento, facendo uso del principio di sovrapposizione.

Amettiamo quindi che una carica δe, uguale a ρdV sia posta in un elementino di volume dV situato nell'origine di un sistema di coordinate. Calcoliamo il corrispondente potenziale. Ammettiamo di essere nel vuoto, lontani da altri conduttori o dielettrici e che i campi preesistenti siano nulli all'infinito:

$$V(t \to -\infty, r \to \infty) = 0$$

$$\vec{A}(t \to -\infty, r \to \infty) \; = \; 0$$

Ció fa si che la soluzione del problema sia univoca.

Poiché la carica é nell'origine del sistema di coordinate, il problema ha simmetria sferica e diventa naturale cercare una soluzione a simmetria sferica. Riscriviamo in coordinate sferiche l'equazione per il potenziale scalare V, per punti fuori dall'origine, dove $\rho = 0$:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\,(r^2\frac{\partial V}{\partial r}) \; - \; \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \; = \; 0 \tag{14}$$

Poniamo:

$$V \; = \; \frac{\Phi(r,t)}{r}$$

da cui segue:

$$\frac{\partial V}{\partial r} \; = \; \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} \; - \; \frac{\Phi}{r^2}$$

$$r^2\frac{\partial V}{\partial r} \; = \; r\frac{\partial \Phi}{\partial r} \; - \; \Phi$$

con che dall'ultima equazione otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r}) \; = \; r\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \; + \; \frac{\partial \Phi}{\partial r} \; - \; \frac{\partial \Phi}{\partial r} \; = \; r\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}$$

Sostituendo questa nell'equazione differenziale (14) e moltiplicando per r, otteniamo:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \; - \; \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \; = \; 0$$

Ma questa é l'equazione differenziale delle onde, la cui soluzione generale é ben nota:

$$\Phi \; = \; \Phi_1(t + \frac{r}{c}) \; + \; \Phi_2(t - \frac{r}{c})$$

Il primo termine a secondo membro rappresenta un'onda entrante, che non soddisfa la condizione al contorno specificata sopra. Rimane cosí il secondo termine soltanto e la soluzione del nostro problema diviene:

$$V \; = \; \frac{1}{r}\Phi(t - \frac{r}{c}) \tag{15}$$

dove la forma della funzione Φ non é ancora determinata. Vediamo che essa descrive un'onda uscente dalla carica.

Il valore della funzione Φ in r=0 ed al tempo t=0, si propaga al punto r in un tempo r/c. In altre parole, il potenziale nel punto r al tempo t é determinato dalla carica, non al tempo t, ma ad un tempo antecedente $t - r/c$. Il termine r/c é una misura del ritardo che ha luogo come conseguenza della velocitá finita di propagazione dei segnali elettromagnetici. Se la carica presente nell'origine delle coordinate cambia di δe al tempo t=0, il conseguente cambiamento nel potenziale nel punto distante r dall'origine avrá luogo un tempo t=r/c piú tardi. Naturalmente, una variazione della carica presente nell'origine puó aver luogo se altre cariche arrivano o partono da tale punto; la carica deve conservarsi. Per il momento la nostra soluzione tiene conto solo delle cariche presenti nell'origine e non di quelle in moto verso l'origine o uscenti dall'origine.

In punti molto prossimi all'origine, dove il ritardo é molto piccolo, il potenziale é determinato dal valore δe che la carica nell'origine ha nel medesimo istante. Tale potenziale, nel vuoto, vale:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\delta e}{r}$$

da cui:

$$V(r \approx 0,t) \;=\; \frac{\Phi(t)}{r} \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\delta e(t)}{r} \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho(t)dV}{r}$$

per cui:

$$\Phi(t) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\rho(t)dV \tag{16}$$

Il potenziale ritardato di una carica puntiforme, $V(t-r/c)$ é, come conseguenza delle (15) e (16):

$$V(t-\frac{r}{c}) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho(t-r/c)dV}{r} \tag{17}$$

Se ora l'origine delle coordinate é posto in un punto generico, tale che la carica sia nel punto di coordinate $\vec{r'} = (x', y', z')$ ed il potenziale debba esser calcolato nel punto di coordinate $\vec{r} = (x, y, z)$, l'espressione del potenziale V diventa:

$$V(t-\frac{\Delta r}{c}) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho(t-\Delta r/c)dV}{\Delta r} \tag{18}$$

dove abbiamo definito $\Delta r \;=\; |\vec{r} - \vec{r'}|$. Vediamo che la dipendenza della densitá di carica dalle coordinate spaziali compare in tale espressione in una veste duplice: in modo diretto, nell'argomento $\vec{r'}$ come nel caso statico, e nella dipendenza temporale $t - \Delta r/c$, legata al fatto che il ritardo nel punto $\vec{r}$, relativo a cariche diverse presenti nel sistema, é diverso.

Per ottenere la soluzione completa del nostro problema, dobbiamo ora integrare la (18) sul volume contenente le cariche. Si ottiene in tal modo l'equazione (13). In modo analogo si procede per dimostrare l'equazione (12). Notiamo che in tali equazioni si era ipotizzato un mezzo omogeneo ed isotropo, non necessariamente coincidente con il vuoto, avente costante dielettrica ϵ e permeabilitá magnetica μ.

Verifichiamo infine che le soluzioni (12) e (13) soddisfino l'equazione di Lorentz, che riscriviamo qui per comoditá:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \,+\, \epsilon_0\mu_0\frac{\partial V}{\partial t} \;=\; 0$$

Facendo uso delle espressioni (12) ed (13) dei potenziali, troviamo:

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot \int_\tau \frac{\vec{J}(\vec{r'}, t-\Delta r/c)}{\Delta r}\,d\tau' \,+\, \frac{\epsilon_0\mu_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \frac{\rho(\vec{r'}, t-\Delta r/c)}{\Delta r}\,d\tau'$$

Poiché $\vec{\nabla}$ opera sulle coordinate $\vec{r}$ del punto P e non tocca la variabile d'integrazione $\vec{r'}$, possiamo portare l'operatore $\vec{\nabla}$ sotto il segno d'integrale:

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{J}(\vec{r'}, t-\Delta r/c)}{\Delta r}\,d\tau' \,+\, \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho(\vec{r'}, t-\Delta r/c)}{\Delta r}\,d\tau'$$

dove si é anche portata l'operazione di derivazione nel secondo termine sotto il segno di integrale.

Notiamo inoltre che l'operatore $\vec{\nabla}$, che coinvolge delle derivate rispetto alle coordinate del punto potenziato P, puó esser sostituito dall'operatore $\vec{\nabla}_{r'}$, che comporta derivate rispetto alle posizioni delle cariche. Tuttavia, a causa dell'ulteriore dipendenza esplicita di $\vec{J}$ dalle coordinate $\vec{r'}$ occorrerá effettuare la sostituzione:

$$\vec{\nabla}_r\cdot\frac{\vec{J}(\vec{r'}, t-\Delta r/c)}{\Delta r} \to -\vec{\nabla}_{r'}\cdot\frac{\vec{J}(\vec{r'}, t-\Delta r/c)}{\Delta r} \,+\, \frac{\vec{\nabla}_{r'}\cdot\vec{J}(\vec{r'}, t-\Delta r/c)}{\Delta r}$$

per cui l'espressione precedente diviene:

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\int[-\vec{\nabla}_{r'}\cdot\frac{\vec{J}(\vec{r'},t-\Delta r/c)}{\Delta r}\ +\ \frac{\vec{\nabla}_{r'}\cdot\vec{J}(\vec{r'},t-\Delta r/c)}{\Delta r}\ +\ \frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{1}{\Delta r}]d\tau'$$

Il primo termine nella parentesi quadra in tale espressione é l'integrale di volume di una divergenza che puó, facendo uso del teorema di Gauss, esser trasformato in un integrale di superficie esteso ad una superficie abbastanza grande da escludere tutte le sorgenti. Si vede cosí che tale contributo é nullo e rimane solo il termine:

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\int[\frac{\vec{\nabla}_{r'}\cdot\vec{J}(\vec{r'},t-\Delta r/c)\ +\ \partial\rho(\vec{r'},t-\Delta r/c)/\partial t}{\Delta r}]\ d\tau'$$

che si annulla come conseguenza dell'equazione di continuitá.

3 Potenziali ritardati a grandi distanze dal sistema di cariche

Dobbiamo ora esaminare l'andamento delle soluzioni per i potenziali date dalle Equazioni (12) ed (13) a grandi distanze dal sistema di cariche. Notiamo che la distanza $\vec{r}$ compare nel termine Δr sia in modo esplicito, nel denominatore di entrambi gli integrali, che come argomento, nell'espressione $t-\Delta r/c$. La prima dipendenza é continua nella variabile $\vec{r}$ ed il suo sviluppo in potenze di r dá termini che decrescono come r^{-n} a grandi distanze. Si puó dimostrare che essi non aggiungono nulla alla radiazione per $n>1$. Possiamo quindi a denominatore sostituire a Δr semplicemente r, e portarlo fuori dal segno di integrale.

Il discorso si fa piú complicato per la dipendenza da r contenuta nell'argomento delle densitá di carica e di corrente. A grandi distanze, infatti, il termine $\Delta r=|\vec{r}-\vec{r'}|$ diventa, al primo ordine:

$$|\vec{r}-\vec{r'}|\ =\ r-(\vec{r'}\cdot\vec{\nabla}r)\ =\ r\ -\ \frac{\vec{r'}\cdot\vec{r}}{r}\ =\ r\ -\ \vec{r'}\cdot\vec{n}$$

dove $\vec{n}$ é il versore di $\vec{r}$. I termini successivi nello sviluppo contengono r a denominatore e possono essere trascurati. Quindi, a grandi distanze dal sistema di cariche, i potenziali diventano:

$$\vec{A}(\vec{r},t)\ =\ \frac{\mu_0}{4\pi r}\int_\tau\vec{J}(\vec{r'},t-r/c+\frac{\vec{r'}\cdot\vec{n}}{c})\ d\tau' \tag{19}$$

$$V(\vec{r},t)\ =\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\int_\tau\rho(\vec{r'},t-r/c+\frac{\vec{r'}\cdot\vec{n}}{c})\ d\tau' \tag{20}$$

dove si é ipotizzato di essere nel vuoto ($\epsilon=\epsilon_0$, $\mu=\mu_0$) Il termine $\vec{r'}\cdot\vec{n}/c$ tra gli argomenti degli integrandi indica quanto l'onda elettromagnetica proveniente dalle parti piú distanti del sistema che irradia é ritardata rispetto all'onda proveniente dalle parti vicine. In altre parole, il termine $\vec{r'}\cdot\vec{n}/c$ determina il tempo che l'onda elettromagnetica impiega ad attraversare il sistema. Se la velocitá delle cariche é v, in tale tempo esse si saranno spostate di $v(\vec{r'}\cdot\vec{n})/c$. Il ritardo interno al sistema sará trascurabile quando tale distanza sará piccola rispetto alle dimensioni del sistema, r'. Quindi la condizione é: $v(\vec{r'}\cdot\vec{n})/c\ll r'$ o, equivalentemente: $v\ll c$. In tal caso le cariche non avranno il tempo di cambiare apprezzabilmente le loro posizioni durante il tempo che l'onda impiega ad attraversare il sistema.

Tuttavia, se vogliamo che nulla realmente cambi nel sistema durante l'intervallo di tempo considerato, dobbiamo richiedere anche che in tale intervallo di tempo le cariche in movimento mantengano la loro velocitá, poiché il potenziale vettore dipende dalle correnti, cioé dalle velocitá delle cariche. Se ad esempio le cariche situate alle estremitá opposte del sistema oscillano in fase,e nel tempo $\vec{r'}\cdot\vec{n}/c$ la fase dell'oscillazione si inverte, l'azione di tali cariche sará reciprocamente indebolita a causa del ritardo interno al sistema. Formuleremo adesso la condizione che deve essere soddisfatta se si vuole che il ritardo interno al sistema non causi uno sfasamento aggiuntivo tra l'emissione da parte delle singole sorgenti. Ammettiamo che le cariche oscillino ed irradino con una frequenza angolare ω. La lunghezza d'onda della luce é data da $\lambda = 2\pi c/\omega$. Nel tempo $\vec{r'} \cdot \vec{n}/c$ la fase dell'oscillazione delle cariche cambia di $\omega \vec{r'} \cdot \vec{n}/c$. Occorre che tale cambiamento sia piccolo rispetto a 2π in tutti i punti del sistema, da cui segue che le dimensioni del sistema debbono essere piccole rispetto alla lunghezza d'onda λ della luce emessa, affinché il ritardo interno al sistema non causi uno sfasamento relativo tra le onde provenienti dai diversi centri emettitori.

In definitiva possiamo dire che il termine $\vec{r'} \cdot \vec{n}/c$ nell'argomento dell'integrando non é importante se sono soddisfatte entrambe le condizioni $v \ll c$ e $r' \ll \lambda$.

4 Radiazione di dipolo

Ammettiamo adesso che entrambe le disuguaglianze menzionate nella sezione precedente siano soddisfatte e che il ritardo $\vec{r'} \cdot \vec{n}/c$ interno al sistema sia trascurabile. É facile vedere che tale termine puó esser trascurato solo nell'espressione del potenziale vettore $\vec{A}$, ma non in quella del potenziale scalare V. In effetti, se nell'espressione del potenziale scalare poniamo $\vec{r'} \cdot \vec{n}/c = 0$, troviamo:

$$V(\vec{r}, t) \; = \; \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_\tau \rho(\vec{r'}, t - r/c) \, d\tau'$$

e questo é semplicemente il potenziale elettrostatico generato nel punto $\vec{r}$ dalla carica totale del sistema, costante nel tempo. Vediamo quindi che, se vogliamo render conto del contributo del potenziale V alla generazione di onde elettromagnetiche, non possiamo arrestare, come fatto, lo sviluppo al primo ordine. Anziché far uso di sviluppi ad ordini piú elevati, é comodo far uso dello sviluppo, tuttora valido, del potenziale vettore, e della condizione di Lorentz che abbiamo imposto ai potenziali:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \, + \, \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \; = \; 0$$

Trascurando il ritardo interno al sistema, l'espressione del potenziale vettore diventa:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \; = \; \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_\tau \vec{J}(\vec{r'}, t - r/c) \, d\tau' \tag{21}$$

Sostituiamo in questa espressione a $\vec{J}$ il prodotto $\rho\vec{v}$, dove ora la densitá di carica ρ é calcolata al tempo $t - r/c$. Si ottiene quindi:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \; = \; \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_\tau \rho(\vec{r'}, t - r/c)\vec{v} \, d\tau'$$

Notiamo ora che, se avessimo a che fare con una singola carica puntiforme e, l'integrale nell'ultima espressione scritta sarebbe semplicemente $e\vec{v}$. Per un sistema di cariche esso sará:

$$\sum_i e_i \vec{v}_{i \; (t-r/c)}$$

dove la somma va calcolata al tempo ritardato $t - r/c$. Ora, il momento di dipolo di un sistema é definito come:

$$\vec{p} \; = \; \sum_i e_i \vec{r'}_i$$

per cui é:

$$\vec{\dot{p}} = \sum_i e_i \frac{d\vec{r'}_i}{dt}$$

ed infine, il potenziale vettore diviene:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\,\vec{\dot{p}}_{(t-r/c)}$$

Notiamo che il potenziale vettore $\vec{A}$ dipende solo dalla derivata temporale del momento di dipolo del sistema. Ora, mentre, come sappiamo, per un sistema elettricamente neutro, il momento di dipolo non dipende dalla scelta dell'origine, per un sistema carico esso ne dipende. Tuttavia, la derivata del momento di dipolo non dipende in alcun caso da tale scelta. Ció fa si che l'espressione trovata per il potenziale vettore sia valida in tutti i casi, anche se si tratta di una singola carica in movimento.

Vediamo adesso di calcolare il potenziale scalare. Lavoriamo in coordinate cartesiane, con il dipolo diretto lungo l'asse z. Ammettiamo inoltre di essere nel vuoto ($\mu = \mu_0$; $\epsilon = \epsilon_0$). La condizione di Lorentz implica che sia:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,[-\frac{z}{r^3}\dot{p} - \frac{z\ddot{p}}{cr^2}] = -\frac{\mu_0 z}{4\pi r^3}[\dot{p} + \frac{r}{c}\ddot{p}]$$

o anche, in notazione vettoriale:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{-\mu_0}{4\pi r^3}[\vec{\dot{p}} + \frac{r}{c}\vec{\ddot{p}}] \cdot \vec{r}$$

Imponiamo ora la condizione di Lorentz, imponendo l'uguaglianza di tale espressione a:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}$$

Integrando poi rispetto a t, si ottiene:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\,[\vec{p} + \frac{r}{c}\vec{\dot{p}}] \cdot \vec{r} + costante$$

dove si vede peró subito che la costante additiva deve esser nulla, dovendo il potenziale ridursi a quello statico:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\,\vec{p} \cdot \vec{r}$$

quando sia $\vec{\dot{p}} = 0$. Notiamo che anche nell'espressione scritta per il potenziale scalare, le grandezze a secondo membro vanno calcolate al tempo ritardato $(t - r/c)$.

Abbiamo in definitiva ottenuto delle espressioni per i potenziali vettore e scalare relativi ad un dipolo variabile nel tempo. Le espressioni ottenute sono:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\,[\vec{p} + \frac{r}{c}\vec{\dot{p}}] \cdot \vec{r}_{\,(t-r/c)} \tag{22}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\,\vec{\dot{p}}_{(t-r/c)} \tag{23}$$

5 Onda elettromagnetica generata dal dipolo: calcolo dei campi

L'espressione trovata per i potenziali elettrodinamici relativi ad un dipolo puó ora essere utilizzata per il calcolo dei campi E e B e di conseguenza per il calcolo del vettore di Poynting e dell'energia irraggiata. Conviene lavorare in coordinate sferiche, con il dipolo posto nell'origine ed orientato lungo l'asse z. Le componenti del potenziale vettore saranno allora:

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{p}\cos\theta}{r} \\ A_\theta &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{p}\sin\theta}{r} \\ A_\phi &= 0 \end{aligned}$$

ed il potenziale scalare:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{p}{r^2} + \frac{\dot{p}}{rc}\right]\cos\theta$$

Per calcolare i campi E e B faremo ora uso delle espressioni del gradiente e del rotore in coordinate sferiche:

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\times\vec{A} = \quad & \frac{\hat{r}}{r^2\sin\theta}\{\frac{\partial}{\partial\theta}(rA_\phi\sin\theta) - \frac{\partial}{\partial\phi}(rA_\theta)\} + \\ & \frac{\hat{\theta}}{r\sin\theta}\{\frac{\partial}{\partial\phi}A_r - \frac{\partial}{\partial r}(A_\phi r\sin\theta)\} + \\ & \frac{\hat{\phi}}{r}\{\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}A_r\} \end{aligned}$$

Poiché

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

e

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \partial\vec{A}/\partial t$$

troviamo:

$$B_r = 0 \tag{24}$$

$$B_\theta = 0 \tag{25}$$

$$B_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r}\left[\frac{\ddot{p}_{(t-r/c)}}{c} + \frac{\dot{p}_{(t-r/c)}}{r}\right] \tag{26}$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}2\frac{\cos\theta}{r}\left[\frac{\dot{p}_{(t-r/c)}}{cr} + \frac{p_{(t-r/c)}}{r^2}\right] \tag{27}$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sin\theta}{r}\left[\frac{\ddot{p}_{(t-r/c)}}{c^2} + \frac{\dot{p}_{(t-r/c)}}{cr} + \frac{p_{(t-r/c)}}{r^2}\right] \tag{28}$$

$$E_\phi = 0 \tag{29}$$

$$\tag{30}$$

Queste equazioni mostrano che i campi E e B sono ortogonali l'uno all'altro. Inoltre notiamo la presenza di termini che hanno una diversa dipendenza dalla distanza r; termini che vanno come $1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$. Tali termini, come vedremo tra un attimo, hanno significati fisici diversi. In particolare, solo i termini con dipendenza $1/r$ corrdispondono ad un'onda elettromagnetica con associato trasporto di energia.

Cominciamo con il considerare il campo a grandi distanze dalle sorgenti. Dobbiamo, per iniziare, intenderci sul significato del termine "grandi distanze". Per farlo, prendiamo ad esempio il caso di un'oscillazione sinusoidale. Sappiamo infatti che potremo poi trattare il caso di un'oscillazione di tipo generico facendo uso del teorema di Fourier.
Ammettiamo quindi che sia:

$$p = p_0 \cos \omega t$$

con che avremo:

$$\dot{p} = -p_0 \omega \sin \omega t$$

$$\ddot{p} = -p_0 \omega^2 \cos \omega t$$

Il rapporto tra il termine in $\ddot{p}$ e quello in $\dot{p}$ nell'espressione di B é:

$$\frac{\ddot{p}/c}{\dot{p}/r} = \frac{\omega r}{c} = \frac{2\pi r}{cT} = \frac{2\pi r}{\lambda}$$

tale rapporto é molto maggiore di uno per:

$$r \gg \lambda/(2\pi)$$

se tale condizione é soddisfatta, é facile vedere che é molto maggiore di uno il rapporto tra il termine in $\ddot{p}$ e quello in $\dot{p}$ nell'espressione della componente θ del campo elettrico.
Il rapporto tra il termine in $\dot{p}$ e quello in p (nell'espressione di E_θ come pure in quella di E_ϕ) analogamente vale:

$$\frac{\dot{p}r}{pc} = \frac{\omega r}{c} = \frac{2\pi r}{\lambda}$$

e quindi anche tale rapporto é molto maggiore di uno per $r \gg \lambda/(2\pi)$. In definitiva possiamo dire che, a distanze molto maggiori della lunghezza d'onda corrispondente all'oscillazione del dipolo (e quindi della radiazione emessa) il termine di gran lunga dominante é quello in $\ddot{p}$.
In tale situazione i campi diventano:

$$\begin{aligned}
B_r &= 0 \\
B_\theta &= 0 \\
B_\phi &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\ddot{p}_{(t-r/c)}}{rc}\sin\theta \\
E_r &= 0 \\
E_\theta &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\ddot{p}_{(t-r/c)}}{rc^2}\sin\theta \\
E_\phi &= 0
\end{aligned}$$

Segue da queste equazioni:

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$$

$$|E| = c|B|$$

Cioé i campi elettrico e magnetico dell'onda, a grandi distanze, soddisfano le medesime equazioni soddisfatte nel caso delle onde piane. Calcoliamo ora il vettore di Poynting associato a tale onda. Troviamo facilmente:

$$\vec{S} \;=\; \vec{E} \times \vec{H} \;=\; \frac{1}{\mu_0}\,\vec{E} \times \vec{B} \;=\; \hat{r}\,\frac{1}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\left(\frac{\ddot{p}_{(t-r/c)}}{r}\right)^2 \sin^2\theta \tag{31}$$

Vediamo che $\vec{S}$ é diretto radialmente verso l'esterno e che decresce come $1/r^2$. Inoltre il modulo é massimo per $\theta = \pi/2$.
Calcoliamo ora il flusso totale di $\vec{S}$ attraverso una superficie sferica di raggio r, con centro sul dipolo:

$$P \;=\; \Phi(S) \;=\; \int \vec{S}\cdot\vec{n}\,dS \;=\; \frac{\ddot{p}^2}{8\pi\epsilon_0 c^3}\int_{-1}^{1}(1-\cos^2\theta)d\cos\theta \;=\; \frac{\ddot{p}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \;=\; \frac{\mu_0\ddot{p}^2}{6\pi c}$$

Vediamo che la potenza totale che attraversa la sfera é indipendente dal raggio. Inoltre, la potenza totale, come quella per unitá di superficie, é proporzionale al quadrato della derivata seconda del momento di dipolo.

Esaminiamo ora la potenza totale, tenendo conto anche dei termini che abbiamo fin qui trascurato. Vedremo che tali termini non contribuiscono al trasporto netto di energia. Sviluppiamo il prodotto $\vec{E}\times\vec{H}$ tenendo conto di tutti i termini contenuti nelle espressioni (24-30). Troviamo:

$$\begin{aligned}\vec{S}_T \;=\;& \frac{\hat{\theta}}{16\pi^2\epsilon_0}\,2\sin\theta\cos\theta\left[\frac{\dot{p}\ddot{p}}{c^2r^3} + \frac{p\ddot{p}}{cr^4} + \frac{\dot{p}^2}{cr^4} + \frac{p\dot{p}}{r^5}\right]\\ &-\frac{\hat{r}}{16\pi^2\epsilon_0}\,\frac{\sin^2\theta}{r^2}\left[\frac{\dot{p}\ddot{p}}{c^2r} + \frac{p\ddot{p}}{cr^2} + \frac{\dot{p}\ddot{p}}{c^2r} + \frac{\dot{p}^2}{cr^2} + \frac{p\dot{p}}{r^3}\right] + \vec{S}\end{aligned}$$

dove $\vec{S}$ é il vettore di Poynting giá calcolato, associato ai termini che dominano a grandi distanze. Calcoliamo ora la potenza media trasportata in un periodo. Notiamo che nel far la media incontriamo una somma di termini contenenti prodotti di p con le sue derivate. I termini del tipo:

$$\dot{p}\ddot{p} \;=\; p_0^2\omega^2\sin\omega t\,\cos\omega t$$

hanno ovviamente valor medio nullo. La stessa cosa é vera per i termini $p\dot{p}$. I termini in $p\ddot{p}$ hanno un valor medio dato da:

$$\overline{p\ddot{p}} \;=\; p_0^2\omega^2\overline{\cos^2\omega t} \;=\; -\frac{p_0^2\omega^2}{2}$$

mentre i termini $\dot{p}^2$ danno un contributo al valor medio dato da:

$$\overline{\dot{p}^2} \;=\; p_0^2\omega^2\overline{\sin^2\omega t} \;=\; \frac{p_0^2\omega^2}{2}$$

Vediamo cosi che termini dei due tipi si elidono ed il valor medio della potenza trasportata dall'onda si riduce a quello del termine $\vec{S}$, giá calcolato prima, che é quello che domina a grandi distanze. Ne concludiamo che il trasporto di energia é affidato solo a quelle parti dei campi E e B che descrescono come $1/r$, che sono quelle che costituiscono l'onda elettromagnetica vera e propria.
Gli altri termini dominano per $r \ll \lambda$; essi descrivono il cosiddetto *campo vicino*. Esso non é un campo statico, ma non trasporta energia.

6 Irraggiamento da parte di un'antenna dipolare

Consideriamo ora, come applicazione di quanto visto nella precedente sezione, un dipolo costituito da due sferette conduttrici, collegate tra loro da un tratto di conduttore rettilineo di lunghezza l. Ammettiamo che una sorgente di forza elettromotrice alternata di pulsazione ω agisca, tale da mantenere delle oscillazioni di corrente $i(t) = i_0 \cos\omega t$ lungo la barretta conduttrice. La carica al generico istante t su una delle sferette sará allora:

$$q(t) = \int_0^t i(t)\,dt = \frac{i_0}{\omega}\sin\omega t$$

Se il sistema era inizialmente scarico, la carica sull'altra sferetta sará, al medesimo istante t: $-q(t)$. Il sistema si comporterá allora come un dipolo, di valore:

$$p(t) = q(t)\,l = \frac{l\,i_0}{\omega}\sin\omega t$$

la cui derivata seconda é:

$$\ddot{p} = l\,\frac{di(t)}{dt} = -l\,\omega i_0\,\sin\omega t$$

Il sistema irradierá quindi onde elettromagnetiche di frequenza $\nu = \omega/2\pi$. Il relativo vettore di Poynting sará dato dall'espressione (31):

$$\vec{S} = \hat{r}\,\frac{1}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\left(\frac{\ddot{p}}{r}\right)^2 \sin^2\theta \tag{32}$$

che nel nostro caso vale:

$$\vec{S} = \hat{r}\,\frac{1}{16\pi^2\epsilon_0 c^3 r^2}\left(l\,\frac{di(t)}{dt}\right)^2 = \hat{r}\,\frac{1}{16\pi^2\epsilon_0 c^3 r^2}\,(l\,i_0\,\omega\sin\omega t)^2\,\sin^2\theta =$$
$$\hat{r}\,\frac{\mu_0}{16\pi^2 c r^2} l^2\,i_0^2\,\omega^2\sin^2\omega t\sin^2\theta = \hat{r}\frac{Z_0}{16\pi^2 c^2 r^2}\,l^2 i_0^2\omega^2\,\sin^2\omega t\sin^2\theta$$

dove abbiamo fatto uso della definizione dell'impedenza caratteristica del vuoto:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

La potenza totale irraggiata sará:

$$P = \frac{1}{6\pi}\frac{Z_0}{c^2}\,l^2\,(\frac{di}{dt})^2 = \frac{1}{6\pi}\frac{Z_0}{c^2}\,l^2 i_0^2\omega^2\cos^2\omega t \quad (watt)$$

e la potenza efficace sará ottenibile da questa mediando su di un periodo dell'onda:

$$\overline{P} = \frac{Z_0}{c^2}\,l^2\omega^2 i_{eff}^2 = \frac{2\pi}{3}\,Z_0\,i_{eff}^2\,(\frac{l}{\lambda})^2$$

dove abbiamo definito la corrente efficace:

$$i_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i_0^2\cos^2\omega t\,dt$$

Vediamo che la potenza media é proporzionale al quadrato della corrente efficace. Sembrerebbe inoltre che essa dovesse essere proporzionale al quadrato del numero di lunghezze d'onda contenute nell'antenna. Tuttavia dobbiamo ricordare che le formule adoperate valgono nell'approssimazione che sia $l \ll \lambda$, quindi l'ultima asserzione é ingiustificata. Vedremo in seguito come modificare le relazioni ottenute nel caso in cui la disuguaglianza $l \ll \lambda$ non sia soddisfatta.

Ricordiamo che, per una resistenza R, la potenza dissipata per effetto Joule é data da: $W = Ri^2$, cioé é proporzionale al quadrato della corrente. Poiché anche la nostra antenna dissipa potenza (sotto forma di radiazione di onde elettromagnetiche) proporzionalmente al quadrato della corrente (o meglio del suo valore efficace), si é deciso di definire anche in tal caso una *resistenza di radiazione* dell'antenna come il coefficiente che moltiplica il termine i_{eff}^2 nell'espressione della potenza irraggiata:

$$R_{rad} \;=\; \frac{2\pi}{3}\, Z_0\, \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$$

Questa espressione puó esser trasformata, con ovvi passaggi, in :

$$R_{rad} \;=\; \frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c}\, \left(l^2 k^2\right)$$

dove k é il numero d'onda: $k = 2\pi/\lambda$. Il coefficiente che moltiplica la grandezza l^2k^2 ha le dimensioni di una resistenza e vale numericamente 20Ω ; il termine l^2k^2 é adimensionale.

7 Antenna $\lambda/2$

A frequenze elevate la lunghezza d'onda della radiazione diviene confrontabile alle dimensioni dell'antenna e non é piú lecito servirsi dell'approssimazione fatta: $r' \ll \lambda$. Una trattazione completa del problema della radiazione da una generica antenna in tali situazioni richiederebbe un corso apposito. Ci limiteremo quindi a discutere un esempio particolare, al solo scopo di mettere in evidenza l'approccio che viene seguito nella soluzione di problemi di questo tipo. L'esempio é quello di un'antenna rettilinea, di lunghezza pari a metá della lunghezza d'onda λ.

Un commento generale che é opportuno fare, relativo anche ad altre geometrie, é quello relativo alla prossimitá dell'antenna alla Terra. Questa puó esser trattata approssimativamente come una superficie piana, perfettamente conduttrice. In tale ipotesi, si puó far uso del metodo delle immagini, ed un'antenna posta al di sopra della superficie terrestre puó esser considerata come un insieme di due antenne, di cui la seconda é costituita dall'immagine della prima. La radiazione nello spazio puó allora esser calcolata come quella generata dall'insieme delle due antenne, tenendo conto dello sfasamento dovuto alla distanza che le separa. Il problema é analogo a quello dell'interferenza tra la luce emessa da due fenditure praticate in uno schermo opaco e, come in quel caso, cosí anche qui l'interferenza tra le onde emesse dall'antenna e dalla sua immagine dará luogo ad una redistribuzione della potenza nello spazio.

Limitiamoci ora a studiare l'emissione di onde elettromagnetiche da parte di un'antenna di lunghezza $l = \lambda/2$, ignorando il contributo della sua eventuale immagine. Nell'antenna, eccitata da una tensione sinusoidale di pulsazione:

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T = 2\pi c/cT = 2\pi c/\lambda = \pi c/l$$

avremo due nodi di corrente alle estremitá ed un ventre al centro. La tensione avrá viceversa dei ventri alle estremitá ed un nodo al centro. Il fenomeno é analogo a quello di un'onda acustica in una canna d'organo, con entrambe le estremitá aperte, che oscilla nel suo modo fondamentale.

Prendiamo un sistema di coordinate cartesiane avente l'asse z diretto parallelamente all'antenna e con origine nel centro di questa. La corrente potrá essere scritta come:

$$i \;=\; i_0\, cos\frac{2\pi z}{\lambda}$$

A grandi distanze dall'antenna possiamo, nell'espressione (12) del potenziale vettore, considerare la distanza a denominatore come una costante R, da portare quindi fuori dal segno d'integrale. Non possiamo peró trattare come costante la distanza r che compare nell'argomento della corrente. Scriveremo allora:

$$\vec{A} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi R}\int_{-l/2}^{l/2} \vec{i}_{t-r/c}\, dz$$

Un elementino di corrente $i\, dz$ dará un contributo al potenziale vettore:

$$dA \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi r}\, i_{t-r/c}\, dz \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi r}\, i_0\, \cos\frac{2\pi z}{\lambda}\, \cos\omega(t-r/c)\, dz$$

dove si deve ricordare che il vettore $d\vec{A}$ é diretto lungo l'asse z.

In coordinate sferiche questo é:

$$\begin{aligned}
dA_r &= \frac{\mu_0 i_0}{4\pi r}\cos\frac{2\pi z}{\lambda}\, \cos\omega(t-r/c)\, \cos\theta\, dz \\
dA_\theta &= -\frac{\mu_0 i_0}{4\pi r}\cos\frac{2\pi z}{\lambda}\, \cos\omega(t-r/c)\, \sin\theta\, dz \\
dA_\phi &= 0
\end{aligned}$$

da cui, usando la:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

troviamo:

$$\begin{aligned}
dB_r &= 0 \\
dB_\theta &= 0 \\
dB_\phi &= \frac{1}{r}\frac{\mu_0 i_0}{4\pi}\{\frac{\partial}{\partial r}\left[-\cos\frac{2\pi z}{\lambda}\, \cos\omega(t-r/c)\sin\theta\, dz\right] - \\
&\quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\cos\frac{2\pi z}{\lambda}\, \cos\omega(t-r/c)\cos\theta\, dz\right]\}
\end{aligned}$$

Trascurando i termini che decrescono piú velocemente di $1/r$, la componente dB_ϕ diventa:

$$dB_\phi \;=\; -\frac{\mu_0 i_0}{4\pi r}\frac{\omega}{c}\sin\theta\cos\frac{2\pi z}{\lambda}\, \sin\omega(t-r/c)\, dz$$

Il campo B si ottiene integrando tale espressione rispetto a z, tra $-\lambda/4$ e $+\lambda/4$:

$$B \;=\; B_\phi \;=-\frac{\mu_0 i_0}{4\pi R}\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4}\cos\frac{2\pi z}{\lambda}\, \sin\omega(t-r/c)\, dz$$

Notiamo che é:

$$r \;=\; R - z\cos\theta$$

per cui il termine $\omega(t-r/c)$ diventa:

$$\omega(t-R/c) + \omega(\frac{z\cos\theta}{c})$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
\sin\omega(t-r/c) &= \sin\left[\omega(t-R/c) + \omega(z\cos\theta/c)\right] = \\
&\quad \sin(\omega(t-R/c))\cos(\omega\frac{z\cos\theta}{c}) + \\
&\quad \cos(\omega(t-R/c))\sin(\omega\frac{z\cos\theta}{c})
\end{aligned}$$

Notiamo che il primo termine nell'ultima espressione scritta é una funzione pari di z, mentre il secondo é dispari. Ciascuno di tali termini andrebbe ora moltiplicato per la funzione $\cos(2\pi z/\lambda)$ e poi integrato sulla variabile z, tra $-\lambda/4$ e $\lambda/4$. Poiché tale funzione é pari in z, ne segue che il contributo del secondo dei due termini esaminati all'integrale (7) é nullo. Il modulo di B_ϕ sará dunque:

$$B_\phi = \frac{\mu_0 i_0}{2\lambda R} \sin\theta \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \cos\frac{2\pi z}{\lambda} \cos\frac{\omega z\cos\theta}{c} \sin\omega(t - R/c)\, dz$$

Essendo l'integrando una funzione pari di z, questo puó ancora essere espresso come:

$$B_\phi = \frac{\mu_0 i_0}{\lambda R} \sin\omega(t - R/c) \sin\theta \int_0^{\lambda/4} \cos\frac{2\pi z}{\lambda} \cos\frac{\omega z\cos\theta}{c}\, dz$$

Facendo infine uso delle relazioni trigonometriche:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

e ponendo $k = 2\pi/\lambda$, l'integrando diventa:

$$\cos kz\cos(kz\cos\theta) = \frac{1}{2}\{\cos\left[kz(1+\cos\theta)\right] + \cos\left[kz(1-\cos\theta)\right]\}$$

Effettuando l'integrazione e semplificando, otteniamo infine:

$$B_\phi = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi R} \sin\omega(t - R/c) \frac{\cos\left[\pi/2\cos\theta\right]}{\sin\theta}$$

Il campo elettrico, a grandi distanze, sará diretto perpendicolarmente al vettore $\vec{R}$ ed a $\vec{B}$. Abbiamo visto che $\vec{B}$ é diretto lungo la coordinata azimutale $\hat{\phi}$. Ne segue che $\vec{E}$ sará diretto lungo $\hat{\theta}$. Se quindi immaginiamo di tracciare una superficie sferica con centro nell'origine e su tale superficie disegnamo paralleli e meridiani, $\vec{B}$ sará diretto lungo i paralleli, $\vec{E}$ lungo i meridiani. Sia E che B hanno una dipendenza dall'angolo θ del tipo:

$$\frac{\cos\left[\pi/2\cos\theta\right]}{\sin\theta}$$

Essi sono massimi all'equatore e minimi ai poli. Il modulo di $\vec{E}$ puó esser ottenuto facilmente facendo uso della relazione, tuttora valida: $E = cB$, da cui si ha:

$$E = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{i_0}{2\pi R} \sin\omega(t - R/c) \frac{\cos\left[\pi/2\cos\theta\right]}{\sin\theta}$$

dove la costante $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ é l'impedenza caratteristica del vuoto Z_0, che vale 377Ω. L'espressione precedente puó quindi anche essere scritta nella forma:

$$E = 60 \frac{i_0}{R} \sin\omega(t - R/c) \frac{\cos\left[\pi/2\cos\theta\right]}{\sin\theta}$$

La potenza irradiata dall'antenna puó essere ottenuta dal vettore di Poynting:

$$P = \frac{E\,B}{\mu_0} = \frac{Z_0 i_0^2}{4\pi^2 R^2} \sin^2\omega(t - R/c) \frac{\cos^2\left[\pi/2\cos\theta\right]}{\sin^2\theta}$$

e la potenza totale si ottiene da questa integrando sulla sfera di raggio R:

$$P_T = \frac{Z_0 i_0^2 \sin^2(\omega(t - R/c))}{4\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\cos^2\left[\pi/2\cos\theta\right]}{\sin^2\theta}\, d\cos\theta$$

L'integrale definito vale 1.21848. Raccogliendo i rimanenti fattori numerici, otteniamo:

$$P_T = 36.56\, i_0^2 = 73.11\, i_{eff}^2 \;\; (watt)$$

Ne deduciamo che la resistenza d'antenna é di circa 73.11 Ω.