Compito di Fisica II

11 Settembre 2000

Esercizio I

Un campo magnetico uniforme é confinato in un volume cilindrico di raggio $R = 5\ cm$ (fig. 1) e diretto lungo l'asse di questo. Il campo, nullo a t = 0, aumenta linearmente nel tempo con coefficiente angolare $\beta = 100\ Gauss/s$.

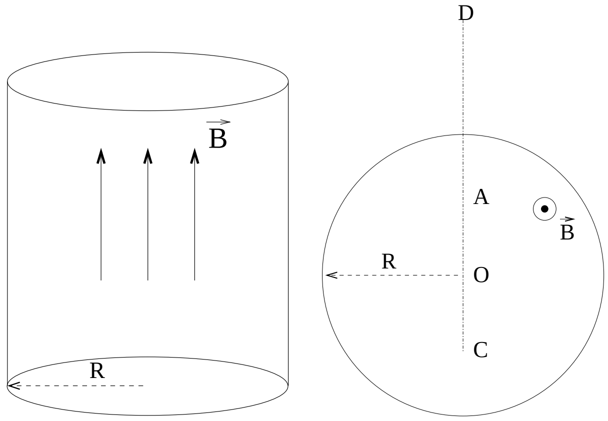

Figure 1: Esercizio I

- Determinare in modulo, direzione e verso l'accelerazione a $t = 0$ di un elettrone posto, con velocitá nulla, nei punti A, O, C, D come indicato in figura 1 con $|AO| = |OC| = a = 2\ cm$ e $|OD| = b = 1\ m$.

Una moneta ed una corona circolare d'argento vengono poste, perpendicolarmente all'asse del cilindro e centrate con esso, su due piani paralleli distanti $d = 10\ cm$. La moneta ha raggio a e spessore $h = 2\ mm$. La corona circolare ha raggio b e sezione $S = 1\ cm^2$. La resistivitá dell'argento é $\rho = 1.6\ 10^{-8}\ \Omega \cdot m$.
Calcolare :

- la corrente che scorre nella corona circolare;
- il momento di dipolo magnetico della moneta;
- il modulo, direzione e verso della forza risentita dalla moneta.

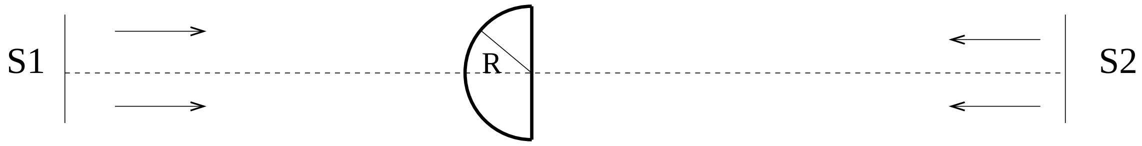

Figure 2: Esercizio II

Si consideri ora una variazione sinusoidale del campo magnetico tra 0 e 2 $Tesla$ con una frequenza $\nu = 10\ Hz$. Calcolare, in questo caso, la potenza media dissipata nella corona circolare e nella moneta.

Esercizio II

Una mezza sfera di raggio $R = 1\ cm$ e massa $M = 0.1\ g$ é posta tra da due sorgenti di onde piane come mostrato in figura 2. L'intensitá del campo elettrico nel massimo é pari a $E = 10\ V/m$. La superficie é riflettente. Se la mezza sfera é inizialmente equidistante dalle due sorgenti ed in quiete, dove si troverá dopo un tempo $T = 1\ ora$?

Esercizio III

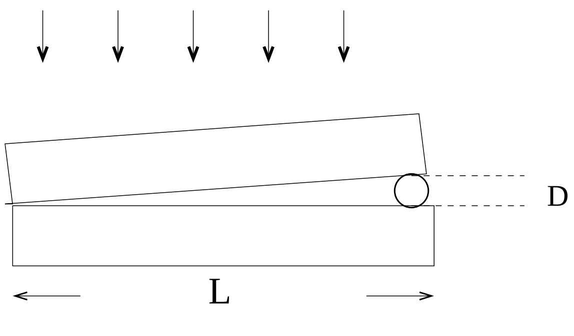

Figure 3: Esercizio III

Una sorgente estesa di luce monocromatica ($\lambda = 680\ nm$) investe perpendico-

larmente due lastre di vetro molto sottili e lunghe $L = 120\ mm$. Le due lastre sono in contatto ad una estremitá e separate all'altra estremitá da un filo avente un diametro $D = 0.048\ mm$ (vedi figura 3).
Si calcoli il numero dei massimi delle frange d'interferenza prodotte nella riflessione della luce, sull'intera lunghezza di 120 mm della prima superficie investita dalla radiazione.

Soluzione
Esercizio I

Considero un sistema di riferimento cilindrico con origine al centro della spira e con l'asse z coincidente con l'asse del cilindro e diretto verso l'alto.
Il campo $\vec{E}$ indotto ha linee di forza circolari centrate con l'asse del cilindro. Applicando la legge di Faraday si ottiene :

$$\begin{aligned} 2\pi r E &= \pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{\beta}{2} r \hat{\phi} \quad r \leq R \\ 2\pi r E &= \pi R^2 \frac{\partial B}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{\beta R^2}{2r} \hat{\phi} \quad r \geq R \end{aligned}$$

Direzione e verso del campo nei punti A, C, D sono specificate in figura 4. Nel punto O il campo é nullo. L'accelerazione nei punti A, C, D é data da :

$$\vec{a} = \frac{q_e}{m_e} \vec{E}$$

con $m_e = 9.1\ 10^{-31} Kg$, $q_e = 1.6\ 10^{-19} C$ e considerando che 1 $Tesla = 10^4\ Gauss$ si ottiene :

$$\begin{aligned} |a|_{A,C} &= 1.76\ 10^7\ m/s^2 \\ |a|_D &= 2.2\ 10^6\ m/s^2 \end{aligned}$$

La densitá di corrente $\vec{j}$ nella corona circolare segue le linee del campo $\vec{E}$ ed é data da :

$$\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho} = -\frac{\beta R^2}{2\rho b} \hat{\phi}$$

La corrente che scorre nella corona circolare é :

$$I_{cc} = -\frac{\beta R^2 S}{2\rho b} = 78\ mA$$

In regime stazionario la corrente percorre la moneta lungo le linee del campo $\vec{E}$. Il momento di dipolo della moneta si puó ottenere sommando i contributi dei momenti di dipolo dm generati dagli anellini di raggio r, spessore dr ed altezza h e percorsi dalle correnti infinitesime dI :

$$\begin{aligned} dI(r) &= -\frac{\beta r}{2\rho} h dr \\ dm(r) &= \pi r^2 dI \end{aligned}$$

quindi :

$$\begin{aligned} \vec{m} &= -\frac{\pi \beta h}{2\rho} \int_0^a r^3 dr \hat{z} = -\frac{\pi \beta h a^4}{8\rho} \hat{z} \\ |\vec{m}| &= 7.8\ 10^{-5}\ A \cdot m^2 \end{aligned}$$

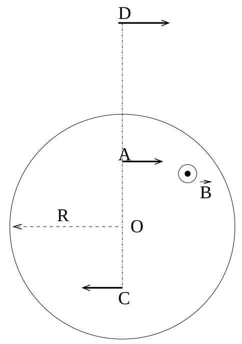

Figure 4: Esercizio I - Soluzione

L'unico campo magnetico non uniforme é il campo generato dalla corona circolare esterna al cilindro. Poiché $b >> a$ si puó considerare il campo prodotto dalla corona circolare costante sulla superficie della moneta ed uguale al campo $\vec{B}_{cc}$ prodotto sul suo asse :

$$\vec{B}_{cc} = \frac{\mu_0 I_{cc} b^2}{2(z^2+b^2)^{3/2}}\hat{z}$$

Il campo al centro della spira ($z = 0$) ha modulo 4.9 10^{-8} $Tesla$. La forza risentita dalla moneta é quindi :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B}_{cc}) = \\ &= -\frac{m\mu_0 I_{cc} b^2}{2}\frac{3d}{(d^2+b^2)^{5/2}}\hat{z} \\ &\simeq -\frac{m\mu_0 I_{cc}}{2}\frac{3d}{b^3}\hat{z} \end{aligned} \tag{1}$$

e quindi si ottiene :

$$|\vec{F}| = 1.15\ 10^{-12}\ N$$

La potenza W dissipata nella corona circolare é :

$$\begin{aligned} W_{cc}(t) &= I_{cc}^2 R_\Omega \\ &= \left(\frac{\partial B}{\partial t}\frac{R^2 S}{2\rho b}\right)^2 \frac{\rho 2\pi b}{S} \\ &= \frac{\pi R^4 S}{2\rho b}\left(\frac{\partial(B_0 cos 2\pi\nu t)}{\partial t}\right)^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Quindi la potenza media é :

$$< W >= \frac{\pi^3 R^4 S B_0^2 \nu^2}{\rho b} = 483\ W$$

La corrente in questo caso varia tra 0 ed un massimo di 2.45 10^2 A, la variazione del campo in funzione del tempo é molto piú veloce.
La potenza dissipata nella moneta si ricava integrando sui contributi di tutti gli anellini di resistenza R in cui la moneta é stata idealmente suddivisa :

$$\begin{aligned} R_\Omega(r) &= \frac{\rho 2\pi r}{hdr} \\ dW(r) &= R(r)(dI(r))^2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)^2 \frac{hr^3dr}{\rho} \end{aligned}$$

quindi la potenza totale é :

$$W(t) = \int_0^a W(r)dr = \frac{\pi}{8\rho}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)^2 a^4h$$

Quindi la potenza media dissipata é :

$$< W >= \frac{\pi^3 B_0^2 \nu^2 a^4 h}{4\rho} = 62\ W$$

Esercizio II

La pressione generata dalla radiazione incidente sulla parte piatta della mezza sfera é :

$$|\vec{F}| = \frac{2I\pi R^2}{c}$$

dove I é il vettore di Poynting.
Consideriamo ora un elemento della superficie della semisfera. Nel caso di incidenza ad angolo θ (fig. 5) rispetto alla normale al piano di incidenza la radiazione esercita una pressione P :

$$P = 2\frac{I}{c}cos^2\theta$$

La forza su una corona di area dA é data da :

$$\begin{aligned} dF &= 2\frac{I}{c}cos^2\theta dA \\ dA &= 2\pi Rsen\theta Rd\theta \end{aligned}$$

la componente non nulla é quella lungo x e quindi :

$$dF_x = 2\frac{I}{c}cos^3\theta dA$$

Integrando su tutta la semifera si ottiene :

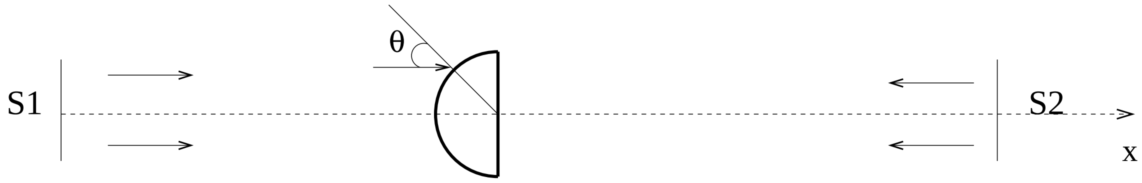

Figure 5: Esercizio II - Soluzione

$$\int dF_x = \frac{4\pi R^2 I}{c}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3\theta sen\theta d\theta$$
$$= \frac{\pi R^2 I}{c}$$

Quindi la forza totale agente sulla sfera é :

$$F = \frac{1}{2}\frac{\pi R^2 I}{c}$$

Dopo un tempo T si e' quindi spostata nel verso negativo di un tratto :

$$\Delta s = \frac{1}{4}\frac{\pi R^2 I T^2}{Mc} = 0.45\ 10^{-2}\ m$$

Esercizio III

La luce riflessa dalla seconda faccia della lastra superiore e quella riflessa dalla prima faccia di quella inferiore hanno una differenza di cammino ottico pari a:

$$2d\ =\ 2x\sin\alpha\ =\ 2x\frac{D}{L}$$

dove abbiamo indicato con x la coordinata orizzontale del punto in cui la luce investe la lastra inferiore, misurata a partire dal punto di contatto (figura 6). La conseguente differenza di fase é:

$$\delta\ =\ 2\pi 2\frac{d}{\lambda}\ =\ \frac{4\pi x D}{\lambda L}$$

Alla riflessione della luce sulla prima faccia della lastra inferiore é inoltra associato un ritardo di fase pari a π, per cui lo sfasamento complessivo é:

$$\theta\ =\ \pi(4\frac{xD}{\lambda L} - 1)$$

La condizione per un massimo é:

$$\theta\ =\ 2m\pi$$

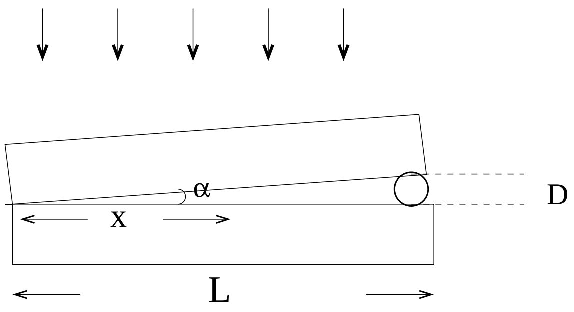

Figure 6: Esercizio III - Soluzione

con m intero, cioé:

$$2m \;=\; 4\frac{xD}{\lambda L} - 1$$

La prima frangia luminosa si ha per m=0, cioé per:

$$x \;=\; \frac{\lambda L}{4D} \;=\; 4.25\;10^{-4}\;\;(m)$$

per m=1 si ha invece:

$$x \;=\; 3\frac{\lambda L}{4D} \;=\; 1.275\;10^{-3}\;\;(m)$$

Vediamo cosí che, al variare di m, cambia la posizione del massimo nella figura d'interferenza. In generale avremo:

$$x \;=\; (2m+1)\frac{\lambda L}{4D} \;=\; (2m+1)\;4.25\;10^{-4}\;\;(m)$$

Il massimo valore che x puó avere é la lunghezza L=0.12 m della lastra. Ne segue che il massimo valore di m é dato da:

$$0.12 \;=\; 4.25\;10^{-4}\,(2m_{max}+1)$$

da cui:

$$m_{max} \;=\; 140.7$$

Si hanno quindi 141 possibili valori di m, cui corrispondono dei massimi (da 0 a 140), cioé 141 massimi equispaziati. La distanza tra due massimi adiacenti sará pari a 0.85 mm.