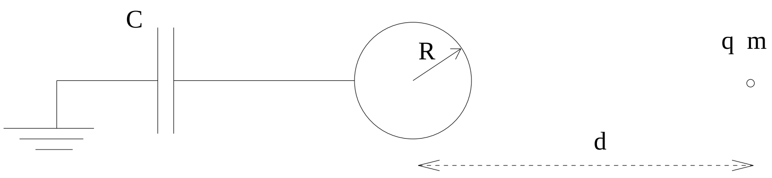
Compitino di Fisica Generale II - Prima prova

Una sferetta di raggio R è connessa a terra attraverso un condensatore di capacità C. I fili delle connessioni hanno resistenza e capacità trascurabile. Una particella di carica q e massa m è posta a distanza $d << R$.

1.- Mostrare che la differenza di potenziale ai capi del condensatore è proporzionale alla carica della particella.

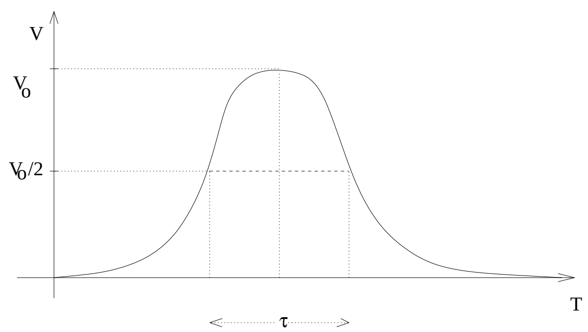


Per mezzo di una forza esterna si porta la carica q dalla posizione d a $2d$ a velocità costante in un tempo T.

2.- Calcolare il lavoro effettuato dalla forza esterna.

3.- Calcolare il lavoro effettuato dalla forza esterna nel caso in cui il condensatore venga staccato da terra prima di muovere la carica.

Il dispositivo sferetta-condensatore viene utilizzato per rivelare il passaggio di una particella il cui moto si può considerare rettilineo uniforme. La differenza di potenziale $V(t)$ ai capi del condensatore viene visualizzata tramite un oscilloscopio ed è mostrata in figura 2. Dal grafico vengono misurati V_0 e τ.



4.- Determinare la distanza di minimo avvicinamento tra la particella e la sferetta ed il modulo della velocità della particella;

5.- Stimare un limite superiore per l'angolo di deflessione della particella.

6.- Discutere cosa implica, in questo problema, l'affermazione che le resistenze sono trascurabili.

Soluzione

1.- Sia q_1 la carica sull'armatura del condensatore collegata alla sferetta. La carica della sferetta sarà $-q_1$. La d.d.p. ai capi di C è

$$V = \frac{q_1}{C} = -\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d},$$

da cui deduciamo

$$q_1 = \frac{C}{C_*}\frac{r}{d}q,$$

avendo posto $C^* = C + 4\pi\varepsilon_0 r$. Pertanto, il potenziale V è proporzionale alla carica q:

$$V = \frac{q_1}{C} = \frac{r}{C_* d}q.$$

2.- Calcoliamo il lavoro come differenza di energia elettrostatica. Se la distanza tra la carica q e la sferetta è x, l'energia elettrostatica è

$$U(x) = \frac{1}{2}\frac{q(x)^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q(x)q}{4\pi\varepsilon_0 x} + \frac{1}{2}CV(x)^2 = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{C}{C_*}\frac{r}{x^2}q^2,$$

con

$$q(x) = \frac{C}{C_*}\frac{r}{x}q, \qquad V(x) = \frac{q(x)}{C}.$$

L'energia iniziale è $U_I = U(d)$, mentre l'energia finale è $U_F = U(2d)$. Il lavoro fatto risulta

$$\mathcal{L} = U_F - U_I = U(2d) - U(d) = \frac{3}{8}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{C}{C_*}\frac{r}{d^2}q^2.$$

Il risultato si trova anche integrando la forza:

$$\mathcal{L} = \int_d^{2d} F(x)\mathrm{d}x,$$

con

$$F(x) = \frac{q(x)q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{q^2 rC}{4\pi\varepsilon_0 C_* x^3}.$$

3.- Se C è staccato da terra la carica sulle armature rimane costante, come pure la carica sulla sferetta. Allora

$$\mathcal{L} = \Delta U = -\frac{q(d)q}{4\pi\varepsilon_0\, 2d} + \frac{q(d)q}{4\pi\varepsilon_0\, d} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{C}{C_*}\frac{r}{d^2}q^2.$$

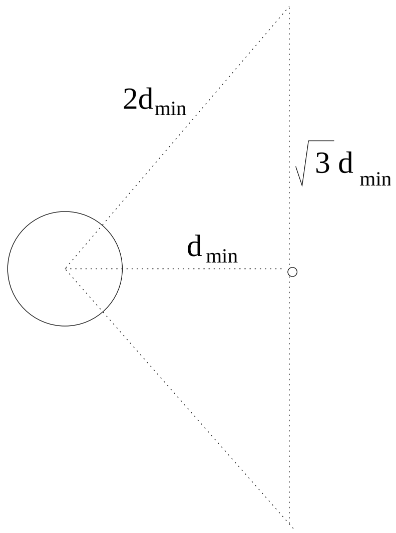
Il lavoro fatto è maggiore che nel caso precedente.

4.- $V = V_0$ quando la distanza è minima, per cui

$$d_{\min} = \frac{rq}{C_* V_0}.$$

Allora, $V = V_0/2$ quando la distanza tra la particella e la sferetta è $2d_{\min}$. La distanza percorsa nel tempo τ è dunque $2d_{\min}\sqrt{3}$, per cui la velocità della particella risulta

$$v = 2\frac{d_{\min}\sqrt{3}}{\tau} = 2\frac{rq\sqrt{3}}{C_* V_0 \tau}.$$



5.- Consideriamo la forza trasversa al moto. La variazione della componente trasversa dell'impulso si può stimare con $\Delta p = F_\perp \tau$. Una stima del limite superiore per Δp lo si ottiene prendendo per $F_\perp$ il valore trasverso massimo, cioè $q_1 q/(4\pi\varepsilon_0 d_{\rm min}^2)$. Abbiamo quindi la stima sulla deviazione α:

$$\Delta p_{\rm max} = \frac{\tau C C_*^2 V_0^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2 q} \qquad \alpha = \frac{\Delta p_{\rm max}}{p} = \frac{\Delta p_{\rm max}}{mv} = \frac{\tau^2 C C_*^3 V_0^4}{4\pi\varepsilon_0 r^3 q^2 m\, 2\sqrt{3}}.$$

6.- L'affermazione che le resistenze sono trascurabili significa che i tempi di percorrenza τ e T sono molto maggiori del tempo caratteristico RC del circuito, di modo che le correnti che circolano siano trascurabili e quindi sia trascurabile anche la dissipazione Joule.

Il moto della particella si può risolvere esattamente. L'energia del sistema, comprendendo il termine cinetico della particella in movimento è

$$E = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + x^2\dot{\varphi}^2) + U(x),$$

dove x è la distanza tra la particella e la sferetta, φ è l'angolo. Chiaramente $E = mv_\infty^2/2$ si conserva. La deviazione è $\alpha = \Delta\varphi - \pi$.

Il momento angolare è

$$L = mx^2\dot{\varphi}$$

e pure si conserva. Sostituendo $\dot{\varphi} = L/(mx^2)$, possiamo scrivere

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{L^2}{2mx^2} + U(x).$$

Nel punto di minima distanza $\dot{x} = 0$ e $x = d_{\rm min}$. Abbiamo allora

$$L^2 = d_{\rm min}^2 \left(m^2 v_\infty^2 - 2mU(d_{\rm min})\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{C}{C_*} r q^2 m + \frac{r^2 q^2 m^2 v_\infty^2}{C_*^2 V_0^2}$$

e

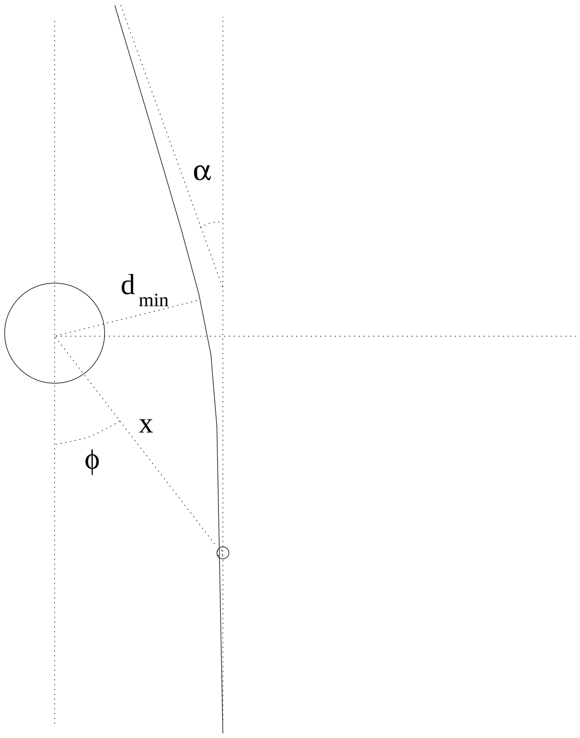
$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{mk}{2x^2}$$

con

$$k = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{C}{C_*}\frac{rq^2}{m} + \frac{L^2}{m^2} = \frac{r^2q^2v_\infty^2}{C_*^2V_0^2}.$$

Integrando $1/\dot{x}$ troviamo la traiettoria:

$$t = \int_0^t \mathrm{d}t' = \int_{d_{\min}}^x \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{2\frac{E}{m} - \frac{k}{x'^2}}} = \frac{m}{2E}\sqrt{2\frac{E}{m}x^2 - k}.$$



Ponendo $t = \tau/2$ a $x = 2d_{\min}$ troviamo la velocità all'infinito:

$$v_\infty = \frac{2rq\sqrt{3}}{C_*V_0\tau},$$

che coincide colla stima di prima. Dividendo $\dot{\varphi}$ per $\dot{x}$ e integrando otteniamo la deviazione

$$\Delta\varphi = 2\int_{-\infty}^{d_{\min}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \frac{2L}{m}\int_{-\infty}^{d_{\min}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{2\frac{E}{m} - \frac{k}{x^2}}}$$

L'integrale dà un arcoseno nella variabile $1/x$ e il risultato alla fine è

$$\Delta\varphi = \frac{\pi L}{m\sqrt{k}} = \pi\sqrt{1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{CC_*^3V_0^4\tau^2}{12r^3q^2m}} \sim \pi + \pi\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{CC_*^3V_0^4\tau^2}{24r^3q^2m},$$

da cui abbiamo subito la deviazione $\alpha = \Delta\varphi - \pi$, che sta nel rapporto $\pi/(4\sqrt{3}) < 1$ rispetto al limite superiore stimato prima. Il potenziale in funzione del tempo risulta

$$V(t) = \frac{rq}{C_* \sqrt{\frac{2E}{m}t^2 + \frac{mk}{2E}}}$$

ed il suo grafico è mostrato in figura.