Domanda a

Poniamo l'asse z lungo l'asse delle spire orientato in modo che la corrente scorra nelle spire in verso antiorario. L'energia della spira interna può essere scritta come:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

dove $\vec{B}$ è il campo generato dalla spira grande sul suo asse e si è indicato con $\vec{\mu}$ il momento di dipolo magnetico della spira piccola, dati da:

$$\vec{\mu} = \pi r_1^2 I_1 \hat{z}$$
$$\vec{B} = \mu_0/2I_2 \frac{r_2^2}{(r_2^2 + z^2)^{3/2}}$$

quindi:

$$U(z) = -\gamma \frac{1}{(r_2^2 + z^2)^{5/2}}$$

dove:

$$\gamma = \pi \frac{\mu_0}{2} I_1 I_2 r_1^2 r_2^2 > 0$$

La forza lungo la direzione z è data da:

$$m\frac{d^2 z}{dt^2} = F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -3\gamma \frac{z}{(r_2^2 + z^2)^{5/2}}$$

Per piccoli spostamenti ($z << r_2$)l'equazione precedente si scrive:

$$m\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{3\gamma z}{r_2^5} = 0$$

Da cui la frequenza delle piccole oscillazioni è:

$$\omega^2 = \frac{3\gamma}{m r_2^5}$$

Domanda b

Il coefficiente di mutua induzione M_{21} si calcola dividendo il flusso del campo generato dalla spira 2 attraverso la spira 1 per la corrente I_2 e supponendo il campo B uniforme attraverso la spira 1:

$$M_{21} = \Phi_1(B_2)/I_2 = \pi r_1^2 \frac{\mu_0 I_2}{2 I_2 r_2} = \frac{\mu_0 r \pi}{2k^2}$$

Il calcolo del coefficiente di mutua induzione M_{12} si può scrivere come:

$$M_{12} = \Phi_2(B_1)/I_1$$

Il flusso del campo generato dalla spira 1 attraverso la spira 2 non è facilmente calcolabile come integrale sulla superficie piana passante attraverso la spira 2. Per calcolare il valore di $\Phi_2(B_1)$ basta ricordare che il flusso di B_1 attraverso tutto il piano passante per le spire è zero e che lontano dalla spira 1 il campo B può essere considerato come un campo di dipolo:

$$\Phi_2(B_1) = -\Phi_2(B_1)(r > r_2) = -\int_{r_2}^{\text{inf}} B_{1z}(r) 2\pi r dr =$$
$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{r_2}^{\text{inf}} \frac{-\mu_1}{r^3} 2\pi r dr = \frac{\mu_0\mu_1}{2r_2} = \frac{\mu_0}{2}\frac{r_1^2 I_1}{r_2}$$

e quindi si ha:

$$M_{12} = \frac{\mu_0 r\pi}{2k^2} = M_{21}$$

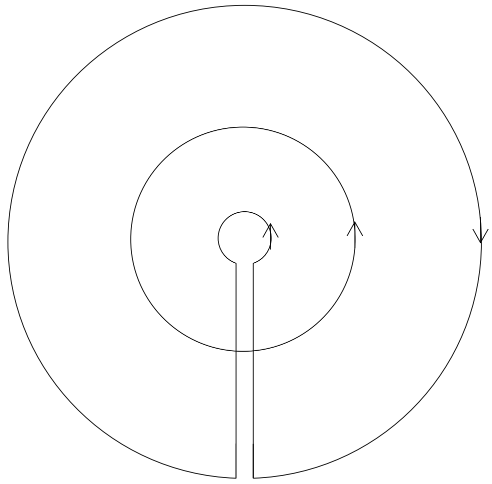
Allo stesso risultato si poteva giungere calcolando il flusso di B come integrale attraverso una superficie a forma di semisfera il cui bordo è definito dalla spira 2. In tal caso si può utilizzare l'approssimazione di dipolo su tutta la semisfera, in quanto ciascun punto di tale superficie è distante dalla spira 1:

$$\Phi_2(B_1) = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \int_{S_2} B_{2r} dS_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mu_1}{r_2^3}\cos\theta 2\pi r_2^2 \sin\theta d\theta =$$
$$= \frac{\mu_0\mu_1}{2r_2} = \frac{\mu_0 r I_1}{2k^2}$$

che porta, quindi, allo stesso risultato di prima.

Domanda c

Calcoliamo il flusso generato dalla spira 2 attraverso il circuito (13) utilizzando i versi delle correnti indicati in figura:



$$\Phi_{13} = \Phi_3(B_2) - \Phi_1(B_2) = \left(-\frac{\mu_0 r_2^2}{2r_3} + \frac{\mu_0 r_1^2}{2r_2}\right) I_2$$

da cui si ha:

$$M_{(13)2} = \frac{\mu_0 r}{2}\left(-1/k + 1/k^2\right) \approx -\frac{\mu_0 r}{2}\left(1/k\right) = M < 0$$

Domanda d

Quando nel circuito 2 scorre una corrente si genera una elettromotrice indotta in (13) data da: $-M\frac{dI_2}{dt}$ e l'equazione del circuito (13) si scrive come:

$$RI_{1-3} + L\frac{dI_{1-3}}{dt} + M\frac{dI_2}{dt} = 0$$

Essendo:

$$\begin{aligned} I_2(t) = I_0\frac{t}{\tau} \quad &\rightarrow \quad \frac{dI_2}{dt} = \frac{I_0}{\tau} \qquad (0 < t < \tau) \\ I_2(t) = I_0\frac{2\tau - t}{\tau} \quad &\rightarrow \quad \frac{dI_2}{dt} = -\frac{I_0}{\tau} \qquad (\tau < t < 2\tau) \\ I_2(t) = 0 \quad &\rightarrow \quad \frac{dI_2}{dt} = 0 \qquad (t > 2\tau) \end{aligned}$$

L'equazione del circuito deve essere risolta nei tre intervalli temporali imponendo la condizione di continuità della corrente I_{1-3}. La soluzione è quindi espressa da:

$$\begin{aligned} I_{1-3} &= \frac{MI_0}{R\tau}\left(e^{-\frac{R}{L}t} - 1\right) \qquad (0 < t < \tau) \\ I_{1-3} &= \frac{MI_0}{R\tau}\left(1 + e^{-\frac{R}{L}t} - 2e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\right) \qquad (\tau < t < 2\tau) \\ I_{1-3} &= \frac{MI_0}{R\tau}\left(e^{-\frac{R}{L}\tau} - 1\right)^2 e^{-\frac{R}{L}t} \qquad (t > 2\tau) \end{aligned}$$